Energía potencial. Energía de escape.

Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcula:

a) **¿Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite?.**

b) **¿Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo.**

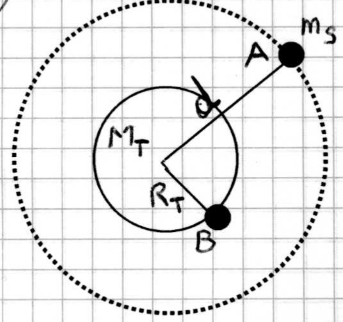
Datos:

Radio medio de la Tierra: $R_T = 6370$ km

Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

a)



$d = 6370 + 1200 = 7570$ Km

ENERGÍAS POTENCIALES:

En "A" (en la órbita): $E_{P_A} = -G \times \dfrac{M_T \times m_S}{d} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{P_A} = -6'67 \times 10^{-11} \times \dfrac{5'98 \times 10^{24} \times 600}{7500 \times 10^3} \simeq -3'16 \times 10^{10}$ (J)

En "B" (en la superficie terrestre): $E_{P_B} = -G \times \dfrac{M_T \times m_S}{R_T} \Rightarrow$

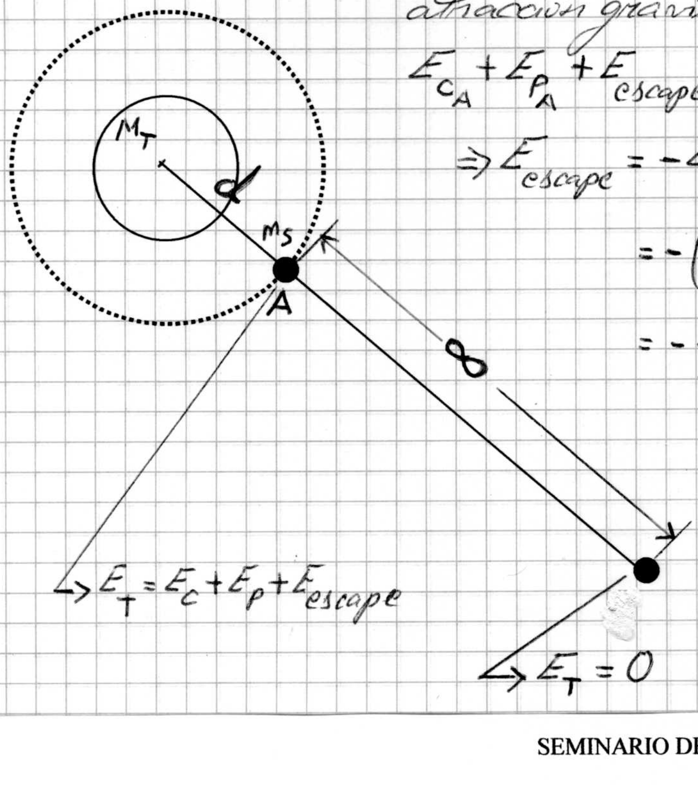
$\Rightarrow E_{P_B} = -6'67 \times 10^{-11} \times \dfrac{5'98 \times 10^{24} \times 600}{6370 \times 10^3} \simeq -3'76 \times 10^{10}$ (J)

Aumento de la energía potencial gravitatoria del satélite:

$\Delta E_P = E_{P_A} - E_{P_B} = -3'16 \times 10^{10}$ (J) $- (-3'76 \times 10^{10})$ (J) $\simeq \underline{\underline{6 \times 10^{9} \text{ (J)}}}$

b)

Principio de conservación de la energía: la energía total en la órbita ha de ser igual a la energía total en el infinito (punto sin atracción gravitatoria):



$E_{C_A} + E_{P_A} + E_{escape} = E_{C_\infty} + E_{P_\infty} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{escape} = -E_{C_A} - E_{P_A} =$

$= -\left(\dfrac{1}{2} G \times \dfrac{M_T \times m}{d}\right) - \left(-G \times \dfrac{M_T \times m_S}{d}\right) =$

$= -\dfrac{1}{2} G \times \dfrac{M_T \times m_S}{d} + G \times \dfrac{M_T \times m_S}{d} =$

$= \dfrac{1}{2} G \times \dfrac{M_T \times m_S}{d} =$

$= \dfrac{1}{2} \times 3'16 \times 10^{10} =$

$= \underline{\underline{1'58 \times 10^{10} \text{ (J)}}}$

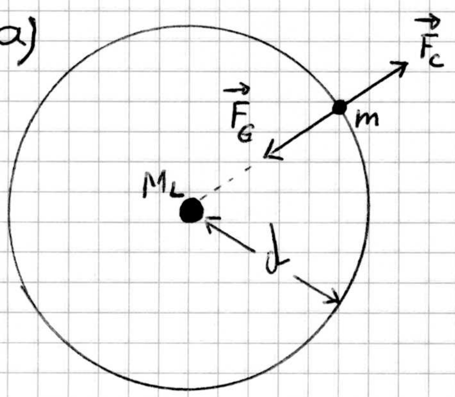
Masa y velocidad en función del período.

La nave espacial Apolo XI orbitó alrededor de la Luna con un período de 119 minutos y a una distancia media al centro de la Luna de 1'8.10^6 metros. Suponiendo que su órbita fue circular y que la Luna es una esfera uniforme:

a) Determina la masa de la Luna y la velocidad orbital de la nave.
b) ¿Cómo se vería afectada la velocidad orbital si la masa de la nave espacial se hiciese el doble?.

Dato:
Constante de gravitación universal: G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}

a)



Para que la nave permanezca en su órbita circular, la fuerza de atracción que sobre ella ejerce la Luna tendrá que igualar en módulo a la fuerza centrífuga de la nave.

$$\left|\vec{F}_G\right| = \left|\vec{F}_c\right| \Rightarrow G \times \frac{M_L \times m}{d^2} = m \times a_c = m \times \frac{V^2}{d} = m\frac{(w \times d)^2}{d} =$$

$a_c = \frac{V^2}{d}$; $V = w \times d$

$$= m \times \frac{w^2 \times d^2}{d} = m \times w^2 \times d = m \times \frac{4\pi^2}{T^2} \times d \Rightarrow$$

$w = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow G \times \frac{M_L \times m}{d^2} = m \times \frac{4\pi^2}{T^2} \times d \Rightarrow M_L = \frac{4\pi^2 \times d^3}{G \times T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times (1'8 \times 10^6)^3}{6'67 \times 10^{-11} \times (119 \times 60)^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{2'3024 \times 10^{20}}{3'4003 \times 10^{-3}} \simeq \boxed{6'7712 \times 10^{22}\ Kg}$$

$$G \times \frac{M_L \times m}{d^2} = m \times \frac{V^2}{d} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G \times M_L}{d}} = \sqrt{\frac{6'67 \times 10^{-11} \times 6'7712 \times 10^{22}}{1'8 \times 10^6}} =$$

$$= \sqrt{2509105'778} \simeq \boxed{1584'0157\ m/s}$$

b)

La velocidad lineal en la órbita queda determinada por la expresión utilizada en el apartado anterior:

$V = \sqrt{\frac{G \times M_L}{d}}$, no dependiendo de la masa de la nave, por tanto la velocidad orbital NO SE VERÁ AFECTADA.

CAMPOS GRAVITATORIOS

SELECTIVIDAD

13

Densidad. Velocidad de escape.

Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2. Calcular:

a) ¿Cuál es su densidad media?.
b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?.

Dato:
Constante gravitatoria universal: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

a) Densidad del planeta: $\rho_P = \frac{M_P}{V_P} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho_P = \frac{\frac{g_P \times R_P^2}{G}}{\frac{4}{3} \times \pi \times R_P^3} = \frac{3 \times g_P}{4 \times G \times R_P \times \pi} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6'67 \times 10^{-11} \times 3000 \times 10^3 \times \pi} \simeq 7158'39 \ \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rightarrow g_P = G \times \frac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow M_P = \frac{g_P \times R_P^2}{G}$$

$$\rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 \Rightarrow V_P = \frac{4}{3} \times \pi \times R_P^3$$

b) La VELOCIDAD DE ESCAPE es la que debe tener un objeto para no verse afectado por la atracción gravitatoria del planeta.

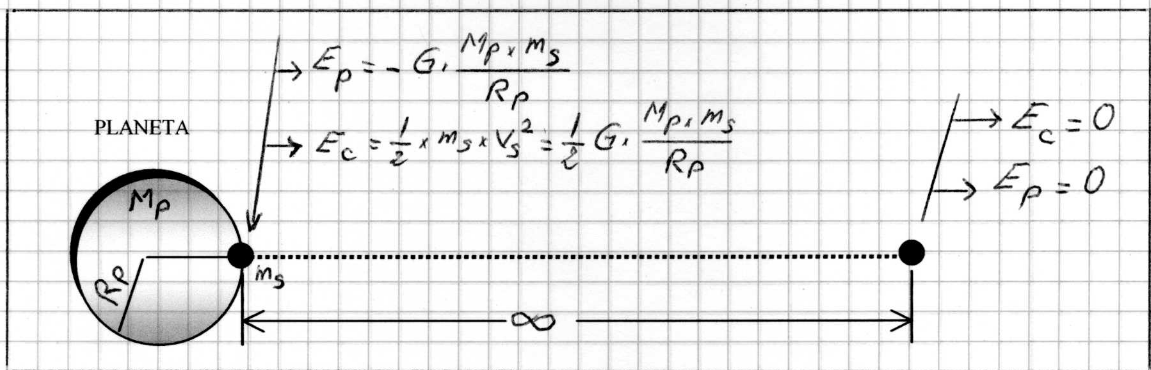
$\sum$ Energías en la superficie del planeta $= \sum$ Energías en el infinito $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E_c + E_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \times m_s \times V_s^2 + \left(- G \times \frac{M_P \times m_s}{R_P}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_s^2 = \frac{2 \times G \times M_P}{R_P} = \frac{2 \times g_P \times R_P^2}{R_P} = 2 \times g_P \times R_P \Rightarrow V = \sqrt{2 \times g_P \times R_P} \Rightarrow$$

$$\rightarrow g_P = G \times \frac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow G \times M_P = g_P \times R_P^2$$

$$\Rightarrow V_s = \sqrt{2 \times 6 \times 3000 \times 10^3} = 6000 \ m/s = 6 \ \frac{Km}{s}$$



COLEGIO
SAN ALBERTO MAGNO
Travesía Iván de Vargas, 1 y 3
MADRID

CAMPOS GRAVITATORIOS

SELECTIVIDAD

14

Velocidad lineal, aceleración radial. Período. Energía de lanzamiento.

Se coloca un satélite meteorológico de 1000 kg en una órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina:

a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el período del satélite en la órbita.

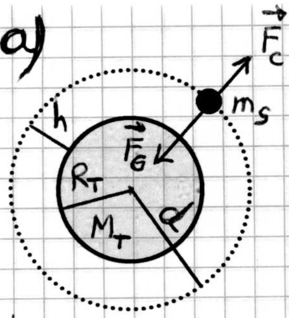
b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.

Datos:

Radio medio terrestre: $R_T = 6370$ km

Gravedad en la superficie terrestre: $g_0 = 9'8$ m.s $^{-2}$

a)



El satélite se mantiene en órbita si: $|\vec{F}_G| = |\vec{F}_c| \Rightarrow$

$$\Rightarrow G \cdot \frac{M_T \times m_S}{d^2} = m_S \cdot a_c = m_S \times \frac{V^2}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{G \times M_T}{d}} = \sqrt{\frac{g_0 \times R_T^2}{d}} = \sqrt{\frac{9'8 \times (6370 \times 10^3)^2}{6670 \times 10^3}} \simeq 7721'3 \ m/s$$

$d = R_T + h = (6370 + 300) \cdot 10^3 = 6670 \cdot 10^3 (m)$

En la superficie Terrestre: $|\vec{P}| = |\vec{F}_G| \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_S \times g_0 = G \cdot \frac{M_T \times m_S}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2}$$

Aceleración radial:

$$a_c = \frac{V^2}{d} = \frac{(7721'3)^2}{6670 \cdot 10^3} \simeq 8'94 \ m/s^2$$

Periodo de revolución:

$$V = W \times d = \frac{2\pi}{T} \times d \Rightarrow T = \frac{2\pi \times d}{V} = \frac{2\pi \times 6670 \times 10^3}{7721'3} \simeq 5427'7 \ (s)$$

b)

Principio de conservación de la energía:

$$\sum E_A (\text{en la órbita}) = \sum E_B (\text{en la superficie Terrestre}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = 0 + E_{p_B} + \text{Energía de lanzamiento} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\text{lanzamiento}} = E_{c_A} + E_{p_A} - E_{p_B} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \times m_S}{R_T + h} + \left(-G \frac{M_T \, m_S}{R_T + h}\right) - \left(-G \frac{M_T \, m_S}{R_T}\right) =$$

$$= G \cdot M_T \times m_S \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T + h} + \frac{1}{R_T}\right) =$$

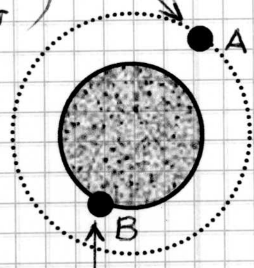
$$= g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_S \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_T + h} + \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$= 9'8 \times (6370 \cdot 10^3)^2 \times 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{6670 \cdot 10^3} + \frac{1}{6370 \cdot 10^3}\right) \simeq$$

$$\simeq 3'9765 \cdot 10^{17} \times (8'2023 \cdot 10^{-8}) \simeq 3'26 \times 10^{10} \ (J)$$

$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \times m_S}{R_T + h}$

$\rightarrow E_p = -G \frac{M_T \times m_S}{R_T + h}$



$\rightarrow E_c = 0$

$\rightarrow E_p = -G \cdot \frac{M_T \times m_S}{R_T}$

Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a 3'6.10^7 m de su superficie. Calcula:

a) La velocidad del satélite.

b) Su aceleración.

c) El período de rotación del satélite alrededor de la Tierra, expresado en días. ¿Qué nombre reciben los satélites de este tipo?.

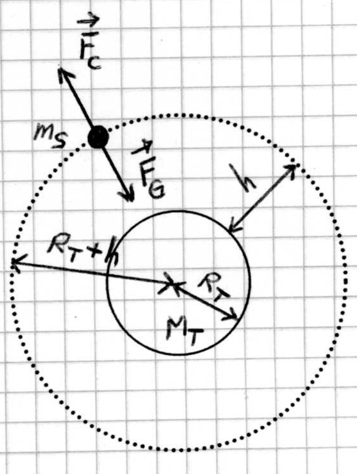
Datos:

Radio terrestre: $R_T = 6'38.10^6$ m

Masa de la Tierra: $M_T = 5'97.10^{24}$ kg

Constante de gravitación universal: $G = 6'67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

a) Para que el satélite permanezca en su órbita, la fuerza gravitatoria y la centrífuga deberán de ser iguales en módulo y dirección, aunque de sentidos opuestos: $|\vec{F}_G| = |\vec{F}_c| \Rightarrow$



$$\Rightarrow G \times \frac{M_T \times m_S}{(R_T+h)^2} = m_S \times a_c = m_S \times \frac{V^2}{R_T+h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{G \times M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{6'67 \times 10^{-11} \times 5'97 \times 10^{24}}{6'38 \times 10^6 + 3'6 \times 10^7}} \simeq$$

$$\simeq 3065'276152 \ m/s \simeq \underline{\underline{3065'28 \ m/s}}$$

b) $$a_c = \frac{V^2}{R_T+h} = \frac{(3065'28)^2}{6'38 \times 10^6 + 3'6 \times 10^7} \simeq \underline{\underline{0'22 \ m/s^2}}$$

c) $$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{V}{R_T+h} \Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V} = \frac{2\pi(6'38 \times 10^6 + 3'6 \times 10^7)}{3065'28} \simeq$$

$$\simeq \underline{\underline{86870'16955 \text{ segundos}}} =$$

$V = w \times d \Rightarrow w = \frac{V}{d}$

$$= 86870'17 (s) \times \frac{1 \text{ día}}{24 \times 36 \times 10^2 (s)} \simeq$$

$$\simeq \underline{1 \text{ día}}.$$

Los satélites cuyo período de traslación es de 1 día (el mismo que el de la Tierra) reciben el nombre de <u>GEOESTACIONARIOS</u> (deberán situarse en el plano del ecuador terrestre).

Velocidad lineal. Período. Velocidad de escape.

La nave espacial "*Lunar Prospector*" permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

a) La velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.
b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

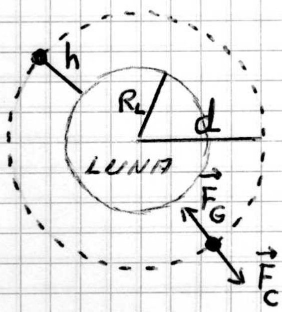
Datos:
Masa de la Luna: $M_L = 7'36.10^{22}$ kg
Radio medio lunar: $R_L = 1740$ km
Constante de gravitación universal: $G = 6'67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

a) Para que la nave espacial permanezca en órbita circular, es necesario que se igualen las fuerzas centrífuga y gravitacional: $|\vec{F}_c| = |\vec{F}_G| \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \times a_c = m \times \frac{V^2}{d} = G \times \frac{M_L \times m}{d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{G \times M_L \times d}{d^2}} = \sqrt{\frac{G \times M_L}{d}} = \sqrt{\frac{G \times M_L}{R_L + h}} =$$

$$d = R_L + h$$



$$= \sqrt{\frac{6'67 \times 10^{-11} \times 7'36 \times 10^{22}}{(1740+100) \times 10^3}} = 1633'401359 \ m/s \simeq \boxed{1633'4 \ m/s}$$

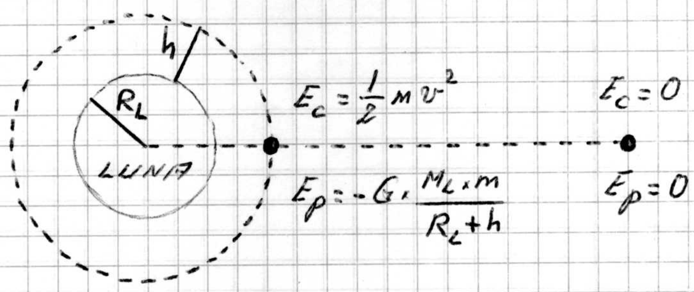
$$V = W \times d = \frac{2\pi}{T} \times d \Rightarrow T = \frac{2\pi \times d}{V} = \frac{2\pi \times (R_L + h)}{V} = \frac{2\pi \times (1740+100) \times 10^3}{1633'4} =$$

$$= 7077'911697 \ s \simeq \boxed{7077'9 \ s}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía: $E_c = |E_p| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_s \times v_e^2 = G \times \frac{M_L \times m_s}{R_L + h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \times G \times M_L}{R_L + h}} =$$



$$= \sqrt{\frac{2 \times 6'67 \times 10^{-11} \times 7'36 \times 10^{22}}{(1740+100) \times 10^3}} =$$

$$= \boxed{2310 \ m/s}$$

Momento angular. Energías.

La **velocidad angular** con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es w_1 = 1'45.10 $^{-4}$ rad/s , y su **momento angular** respecto al centro de la órbita es L_1 = 2'2.10 ^{12} kg.m^2.s^{-1}.

a) Determina el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

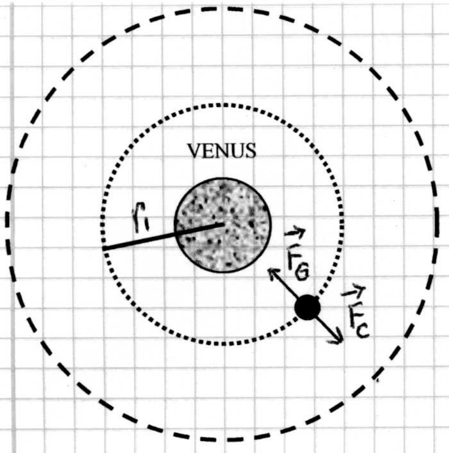
b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular w_2 = 10 $^{-4}$ rad/s ?.

Datos:

Masa de Venus: M_V = 4'87.10 ^{24} kg

Constante gravitatoria universal: G = 6'67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}

a)



NOTA: Momento angular orbital: L = R.m.v

El satélite (m_s) se mantiene en la órbita de radio r_1 de Venus (M_V), porque: $|\vec{F_G}| = |\vec{F_C}| \Rightarrow G \cdot \frac{M_V \times m_s}{r_1^2} = m_s \cdot a_c = m_s \cdot \frac{V_s^2}{r_1} =$ ($a_c = \frac{v^2}{d}$)

$= m_s \times \frac{w_1^2 \times r_1^2}{r_1} = m_s \times w_1^2 \times r_1 \Rightarrow G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_1^2} = m_s \times w_1^2 \times r_1 \Rightarrow$ ($v = w \times d$)

$\Rightarrow r_1^3 = \frac{G \cdot M_V}{w_1^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6'67 \times 10^{-11} \times 4'87 \times 10^{24}}{(1'45 \times 10^{-4})^2}} = 24.906.130'74\ (m) \simeq$ **[1]**

$\simeq 2'49 \times 10^7\ (m)$

$L_1 = r_1 \times m_s \times V_s = r_1 \cdot m_s \times w_1 \times r_1 = m_s \times w_1 \times r_1^2 \Rightarrow m_s = \frac{L_1}{w_1 \times r_1^2} = \frac{2'2 \times 10^{12}}{1'45 \times 10^{-4} \times (2'49 \times 10^7)^2} \simeq$ ($v = w \times d$)

$\simeq 24'47\ Kg$

b) $\sum Energías_{ÓRBITA\ "A"} = \sum Energías_{ÓRBITA\ "B"} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} + E_{LANZAMIENTO} = E_{C_B} + E_{P_B} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{LANZAMIENTO} = E_{C_B} + E_{P_B} - E_{C_A} - E_{P_A} =$

$= \frac{1}{2} G \frac{M_V \times m_s}{r_2} + \left(-G \frac{M_V \times m_s}{r_2}\right) - \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_V m_s}{r_1} - \left(-G \frac{M_V m_s}{r_1}\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{2} G \frac{M_V \cdot m_s}{r_2} - G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_2}} \underbrace{- \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_1} + G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_1}} =$

$= -\frac{1}{2} G \times \frac{M_V \times m_s}{r_2} + \frac{1}{2} G \times \frac{M_V \times m_s}{r_1} =$

$= \frac{1}{2} G \cdot M_V \cdot m_s \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 6'67 \times 10^{-11} \times 4'87 \times 10^{24} \times 24'47 \left(\frac{1}{2'49 \times 10^7} - \frac{1}{3'19 \times 10^7}\right) =$

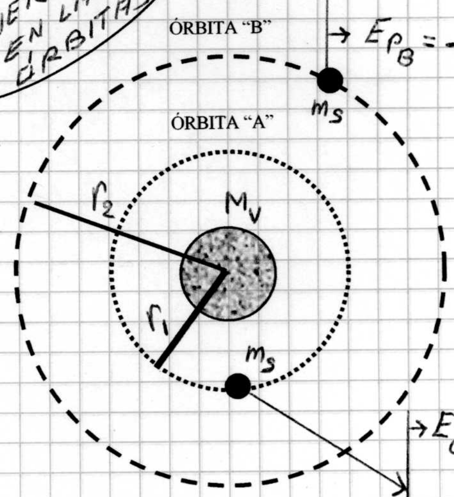
$\simeq 3'974 \times 10^{15} \times (8'813 \times 10^{-9}) =$

$= 34.987.610\ (J) \simeq 3'5 \times 10^7\ (J)$

ENERGÍAS EN LAS ÓRBITAS

$E_{C_B} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_2}$

$E_{P_B} = -G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_2}$



$E_{C_A} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_1}$

$E_{P_A} = -G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{r_1}$

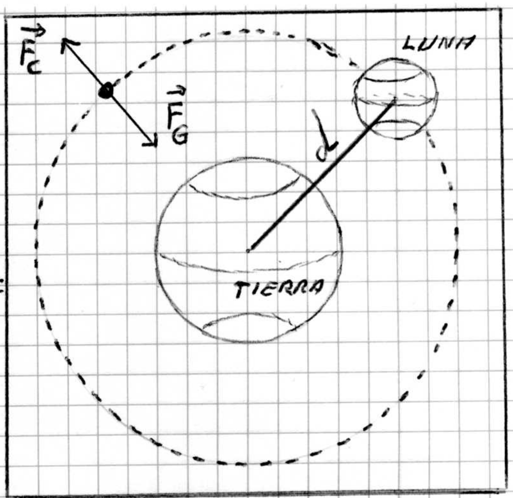
FÓRMULA [1]: $r_2 = \sqrt[3]{\frac{G \times M_V}{w_2^2}} \Rightarrow$

$r_2 = \sqrt[3]{\frac{6'67 \times 10^{-11} \times 4'87 \times 10^{24}}{(10^{-4})^2}} \simeq 3'19 \times 10^7\ (m)$

Masa. Energía potencial electrostática

a)
Sabiendo que el período de la Luna en su órbita terrestre es T = 27'3 días y la distancia Tierra-Luna es d = 3'86.10 ^{5} km (centro a centro), hallar la masa de la Tierra.
b)
Una partícula cuya carga es de 4.10 $^{-14}$ C está en una posición donde el potencial electrostático es de – 10 V, ¿cuál será su energía potencial electrostática?. Expresese el resultado en electrón-voltios.
Dato:
Constante gravitatoria universal: G = 6'67.10^{-11} N.m^2.kg $^{-2}$

a) La Tierra ejerce sobre la Luna una fuerza de atracción gravitatoria que la mantiene en órbita circular, de radio d, estable.



$$|\vec{F_G}| = |\vec{F_C}| \Rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d^2} = M_L \cdot a_c = M_L \cdot \frac{v^2}{d} = M_L \cdot \frac{w^2 d^2}{d} =$$

$v = w \cdot d$

$$= M_L \cdot w^2 \cdot d = M_L \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot d \Rightarrow$$

$w = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d^2} = M_L \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot d \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3'86 \cdot 10^5 \cdot 10^3)^3}{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot (27'3 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 10^2)^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{2'27 \cdot 10^{27}}{371'09} \simeq \boxed{6'12 \cdot 10^{24}\ Kg}$$

$\rightarrow G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$
$\rightarrow d = 3'86 \cdot 10^5 \cdot 10^3\ (m)$
$\rightarrow T = 27'3 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 10^2\ (s)$

b) La energía potencial electrostática de una partícula cargada es:

$$E_p = V \cdot Q = (-10) \cdot 4 \cdot 10^{-14} = -4 \cdot 10^{-13}\ (J) =$$

$$= -4 \cdot 10^{-13} (J) \cdot \frac{1\ eV}{1'6 \cdot 10^{-19} (J)} = -2500000\ (eV) = \boxed{-25 \cdot 10^5 (eV)}$$

NOTA: El electronvoltio (eV) es la energía que tendría una carga de $1'6 \cdot 10^{-19}$ (C), la de un electrón, estando situada en un punto donde el potencial sea de un voltio.

COLEGIO
SAN ALBERTO MAGNO
Travesía Iván de Vargas, 1 y 3
MADRID

CAMPOS GRAVITATORIOS

SELECTIVIDAD

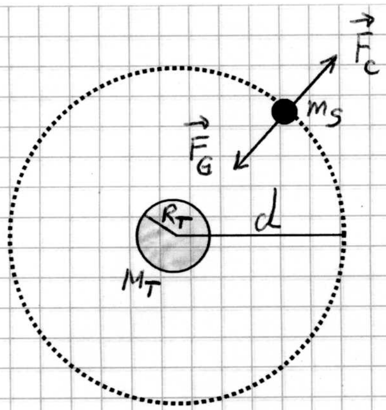
19

Peso. Período. Energías.

Un satélite artificial de 350 kg se encuentra en una órbita circular de 15000 km de radio alrededor de la Tierra. Determina:

a) El peso del satélite estando en esta órbita.
b) El período de rotación del satélite alrededor de la Tierra.
c) La energía total del satélite en esta órbita.

Dato:
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6370$ km



$d = 15000$ Km

a) Es necesario calcular el valor de la gravedad que afecta al satélite, a esa distancia:

$$|\vec{g}_S| = G\cdot\frac{M_T}{d^2} = \frac{g_0\cdot R_T^2}{d^2} = \frac{9'8\cdot(6370\cdot10^3)^2}{(15000\cdot10^3)^2} \simeq 1'77\ m/s^2$$

$$\hookrightarrow g_0 = G\cdot\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{G\cdot M_T = g_0\cdot R_T^2}$$

Peso del satélite, a esa distancia:

$$|\vec{P}_S| = m_S\cdot g_S = 350(Kg)\cdot 1'77(m/s^2) = 619'5\ N$$

b) $|\vec{V}_S| = w_S\cdot d = \frac{2\pi}{T}\cdot d \Rightarrow$ Período de rotación del satélite:

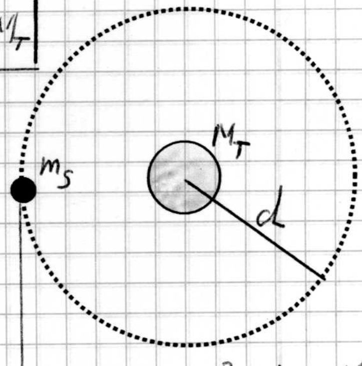
$$T = \frac{2\pi\cdot d}{V_S} = \frac{2\pi\cdot d}{\sqrt{g_S\cdot d}} = \frac{2\pi\cdot 15000\cdot10^3}{\sqrt{1'77\cdot 15000\cdot10^3}} \simeq 18291'1\ (s)$$

$$\hookrightarrow |\vec{F}_G| = |\vec{F}_c| \Rightarrow G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d^2} = m_S\cdot a_c = m_S\cdot\frac{V_S^2}{d} \Rightarrow V_S^2 = \frac{G\cdot M_T}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_S = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{d}} = \sqrt{\frac{g_S\cdot d^2}{d}} = \sqrt{g_S\cdot d}$$

$$\hookrightarrow g_S = G\cdot\frac{M_T}{d^2} \Rightarrow \boxed{g_S\cdot d^2 = G\cdot M_T}$$

c) Energía mecánica del satélite, a esa distancia:



$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d} + \left(-G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d} = -\frac{1}{2}\,\frac{g_S\cdot d^2\cdot m_S}{d} = -\frac{1}{2}\cdot g_S\cdot d\cdot m_S =$$

$$G\cdot M_T = g_S\cdot d^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 1'77\cdot 15\cdot10^6\cdot 350 =$$

$$\simeq -4'65\cdot10^9\ (J)$$

$$\hookrightarrow E_c = \frac{1}{2}m_S\cdot V_S^2 = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d}$$

$$\hookrightarrow E_p = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_S}{d}$$

$$\hookrightarrow E_T = E_c + E_p$$

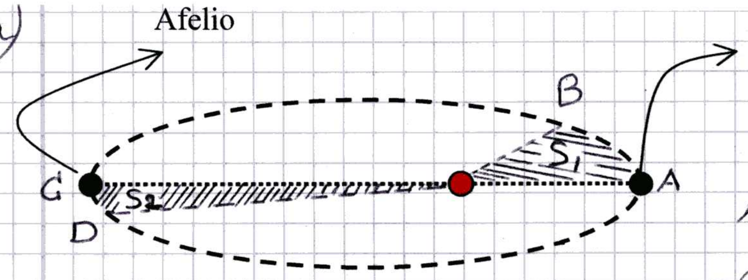
Segunda ley de Kepler.

El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8'75.10^{7}$ km del Sol, y en el afelio (posición más alejada) está a $5'26.10^{9}$ km del Sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad?, ¿Y mayor aceleración?.
b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial?, ¿Y mayor energía mecánica?.

Razónense las respuestas.

a)



Puede hacerse una demostración más exhaustiva pero para responder a esta cuestión basta con aplicar la SEGUNDA LEY DE KEPLER o LEY DE LAS ÁREAS: "Los radios vectores que unen al Sol y los planetas en tiempos iguales son iguales".

En un mismo tiempo t: $S_1 = S_2 \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD} \Rightarrow \vec{V}_{AB} > \vec{V}_{CD} \Rightarrow$ la velocidad es mayor cuando se encuentra en el perihelio que cuando está en el afelio: $\boxed{\vec{V}_{PERIHELIO} > \vec{V}_{AFELIO}}$

ACELERACIONES:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{AFELIO} = \dfrac{\vec{V}^2_{AFELIO}}{R_{AFELIO}} \\[2ex] \vec{a}_{PERIHELIO} = \dfrac{\vec{V}^2_{PERIHELIO}}{R_{PERIHELIO}} \end{array}\right\} \vec{V}_{PERIHELIO} > \vec{V}_{AFELIO} \text{ y } R_{PERIHELIO} < R_{AFELIO} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{PERIHELIO} > \vec{a}_{AFELIO}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{P,AFELIO} = -G \times \dfrac{M_{SOL} \times m_{COMETA}}{R_{AFELIO}} \\[2ex] E_{P,PERIHELIO} = -G \times \dfrac{M_{SOL} \times m_{COMETA}}{R_{PERIHELIO}} \end{array}\right\} R_{PERIHELIO} < R_{AFELIO} \Rightarrow \left|E_{P,PERIHELIO}\right| > \left|E_{P,AFELIO}\right|$$

, en valor absoluto; pero teniendo en cuenta el SIGNO NEGATIVO DE LAS ENERGÍAS POTENCIALES GRAVITATORIAS: $\boxed{E_{P,AFELIO} > E_{P,PERIHELIO}}$