Como los ejercicios se ponen en orden cronológico inverso, añadir nuevos ejercicios al principio implica recolocar todas las páginas posteriores con todos los diagramas; para evitarlo se intentan dejar fijas las hojas finales y a veces se insertan espacios en blanco deliberadamente.

2016-Septiembre

B. Pregunta 3.-

Planteamiento general común:
Utilizamos un modelo puntual: asumimos toda la carga de la esfera concentrada en un punto situado en su centro, y asumimos que cuando enunciado indica “separadas una distancia” indica la separación entre sus centros. Si llamamos Q_1 y Q_2 a la carga de las esferas y d a la distancia entre ellas, el módulo de la fuerza repulsiva que cada una ejerce sobre la otra, utilizando la ley de Coulomb es $F=K\frac{Q_1 Q_2}{d^2}$. Usando datos del enunciado d=0,1 m, F=0,20 N
El campo eléctrico en el punto medio que une ambas cargas lo calculamos usando superposición y sumando ambos que serán vectores con la misma dirección y sentidos opuestos.
a) $Q_1=Q_2$

$$0,20=9\cdot10^9\frac{Q_1^2}{0,1^2}\Rightarrow Q_1=\sqrt{\frac{0,20\cdot0,1^2}{9\cdot10^9}}=4,71\cdot10^{-7}C$$

El campo eléctrico en el punto medio que une ambas cargas será nulo: serán vectores iguales en módulo y dirección pero sentido opuesto.
b) $Q_2=4Q_1$

$$0,20=9\cdot10^9\frac{4Q_1^2}{0,1^2}\Rightarrow Q_1=\sqrt{\frac{0,20\cdot0,1^2}{4\cdot9\cdot10^9}}=2,36\cdot10^{-7}C$$

El campo eléctrico en el punto medio que une ambas cargas tendrá el sentido del creado por Q_2 que es la carga de módulo mayor, por lo que tendrá sentido desde Q_1 hacia Q_2. Su módulo será la resta de ambos módulos, y al ser el punto medio la distancia ahora serán 0,1/2=0,05 m

$$|E|=|E_2|-|E_1|=K\frac{Q_2}{d^2}-K\frac{Q_1}{d^2}=K\frac{Q_1}{d^2}(4-1)=3\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{2,36\cdot10^{-7}}{0,05^2}=2,55\cdot10^6\,N/C$$

2016-Junio

A. Pregunta 3.-

a) El potencial en el punto (8,6) se obtiene por superposición

$$V(P)=V_1(P)+V_2(P)=K\frac{q_1}{r_1}+K\frac{q_2}{r_2}=9\cdot10^9\left(\frac{3\cdot10^{-6}}{\sqrt{0,08^2+0,06^2}}+\frac{9\cdot10^{-6}}{0,0}6\right)=1,62\cdot10^6V$$

b) Al tener ambas cargas el mismo signo el campo entre ellas tiene sentido opuesto. Si llamamos x a la distancia del origen y de q_1 a ese punto, la distancia a la segunda es (0,08-x). Aplicamos superposición sabiendo que el campo total es nulo y que tienen sentidos opuestos

$$0=\cancel{K}\frac{q_1}{x^2}-\cancel{K}\frac{q_2}{(0,08-x)^2}\Rightarrow\sqrt{3\cdot\cancel{10^{-6}}}(0,08-x)=\sqrt{9\cdot\cancel{10^{-6}}}\,x\Rightarrow x=\frac{0,08\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{9}+\sqrt{3}}=0,029\,m$$

2016-Modelo

A. Pregunta 3.-

a) El campo eléctrico es conservativo: el campo creado por la carga q asigna a cada punto del espacio un valor de potencial, por lo que la diferencia de potencial entre dos puntos solamente depende de dichos puntos.

$$V_{P_2}-V_{P_1}=\frac{Kq}{R_2}-\left(\frac{Kq}{R_1}\right)=Kq\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=-1,35\cdot10^4\,V$$

Validación física: la carga q es positiva, luego el potencial que genera es positivo y su módulo es más pequeño cuanto más lejos estemos de la carga, luego al estar P_2 más alejado que P_1 tiene un potencial menor, y la diferencia de potencial es negativa.
b) El campo eléctrico es conservativo: el trabajo realizado por el campo para llevar una carga de un punto a otro solamente depende de la diferencia de potencial entre ambos puntos, no de la

trayectoria recorrida entre ambos.

$$W_{1\rightarrow 2}=-q_1(V_{P_2}-V_{P_1})=-10^{-6}\cdot(-1{,}35\cdot 10^4)=1{,}35\cdot 10^{-2}\,J$$

El signo positivo, según convenio, indica que se realiza a favor del campo: el trabajo lo realiza el campo. Una carga positiva se mueve hacia potenciales menores.

2015-Septiembre

B. Pregunta 3.-

Como se piden solamente valores escalares (energía potencial y potencial), el diagrama no es totalmente imprescindible, ya que no hay que representar vectores, solamente tener claras las posiciones relativas y distancias.

a) Para cada una de las tres cargas, su energía potencial se obtiene por superposición como suma de energía potencial asociada al campo creado por cada una de las otras dos cargas. Como las distancias entre cargas son iguales, será el doble de energía potencial asociada a una única carga.

$$E_{p\,carga\,3}=E_{p\,carga\,1}+E_{p\,carga\,2}=K\frac{qq}{d}+\frac{Kqq}{d}=2K\frac{q^2}{d}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{(10^{-6})^2}{0{,}1}=0{,}18\,J$$

b) Para el punto medio de cada lado, el potencial se obtiene por superposición como la suma de potencial asociado al campo creado por cada una de las 3 cargas. Dos de ellas están a una distancia de 5 cm, y la otra a una distancia igual a la altura del triángulo equilátero, que es 10·sen(60º)

$$V_{punto\,medio\,entre\,2\,cargas}=2V_{cargas\,ese\,lado}+v_{carga\,opuesta}=2K\frac{q}{d/2}+\frac{Kq}{d\cdot sen(60^o)}$$

$$V_{punto\,medio\,entre\,2\,cargas}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{10^{-6}}{0{,}05}+9\cdot 10^9\cdot\frac{10^{-6}}{0{,}1\cdot sen(60^o)}=4{,}64\cdot 10^5\,V$$

2015-Junio-Coincidentes

B. Pregunta 3.-

(Gauss en lámina infinita cargada: 2013-Septiembre-A5, 2010-Junio-Fase Específica-B-Cuestión2-b, 2009-Modelo-B-Problema1)

a) Utilizamos directamente la expresión del campo generado por una lámina infinita cargada, que se puede deducir utilizando la ley de Gauss. El campo es perpendicular al plano, y como la densidad superficial de carga es positiva, el campo va dirigido hacia fuera del plano, siendo su módulo

$|\vec{E}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ independiente de la distancia a la que nos encontremos del plano.

Cambiando a unidades SI $|\vec{E}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{10^{-6}\cdot 10^4}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}=5{,}65\cdot 10^8\,N/C$

b) El campo eléctrico es conservativo: el trabajo realizado por el campo para llevar una carga de un punto a otro solamente depende de la diferencia de potencial entre ambos puntos, no de la trayectoria recorrida entre ambos.

Como el campo eléctrico es uniforme

$$\vec{E}=-grad\,V\Rightarrow|E|=\frac{\Delta V}{\Delta x}\Rightarrow\Delta V=|E|\Delta x$$

Sustituyendo

$$W_{1\rightarrow 2}=-q(V_2-V_1)=-5\cdot 10^{-6}\cdot(-5{,}65\cdot 10^8\cdot 0{,}10)=2{,}83\cdot 10^2\,J$$

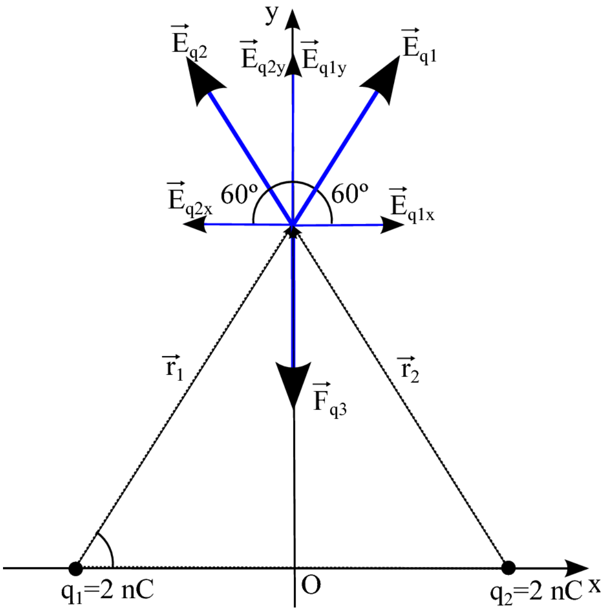
El signo positivo, según convenio, indica que se realiza a favor del campo: el trabajo lo realiza el campo. Una carga positiva se mueve hacia potenciales menores, y se movería alejándose del plano cargado positivamente.

2015-Junio

B. Pregunta 3.-

Cierta similitud a otros problemas con triángulos equiláteros: 2010-Junio-Coincidentes-A2, 2000-Septiembre-A2.

a) Realizamos un diagrama según el enunciado, llamando q_1 a la carga en el vértice inferior izquierdo (punto A) y q_2 a la carga en el vértice inferior derecho (punto B).



Para calcular el campo lo podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

La distancia de las dos cargas al tercer vértice es la misma, 2 cm = 0,02 m al ser un triángulo equilátero. Como los ángulos del triángulo equilátero son de 60º, para su altura, que es la coordenada y del tercer vértice (punto C), podemos plantear según el diagrama

$$tg\,60^o=\frac{OC}{AB/2}$$

$$OC=\frac{AB\,tg\,60^o}{2}=\frac{0{,}02\cdot\sqrt{3}}{2}=0{,}01\cdot\sqrt{3}\,m$$

El vector que va de A a C es $0{,}01\,\vec{i}+0{,}01\sqrt{3}\,\vec{j}$

El vector que va de B a C es y $-0{,}01\,\vec{i}+0{,}01\sqrt{3}\,\vec{j}$

$$\vec{E}(C)=K\frac{q_1}{0{,}02^2}\frac{(0{,}01\,\vec{i}+0{,}01\sqrt{3}\,\vec{j})}{0{,}02}+K\frac{q_2}{0{,}02^2}\frac{(-0{,}01\,\vec{i}+0{,}01\sqrt{3}\,\vec{j})}{0{,}02}$$

$$Como\,q_1=q_2=2\cdot10^{-9}$$

$$\vec{E}(C)=9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-9}}{0{,}02^3}0{,}01(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j})=18\cdot\frac{0{,}01}{0{,}02^3}(2\sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}(P)=7{,}8\cdot10^4\vec{j}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = 60º

$|\vec{E}_{q1x}|=|\vec{E}_{q2x}|;|\vec{E}_{q1y}|=|\vec{E}_{q2y}|$ Por la simetría, por lo que solamente hay componente y, su valor será dos veces la componente y asociada a una única carga, ya que ambas son iguales.

$$|E(C)|=2|E_{q1y}(C)|=2\cdot K\frac{q_1}{0{,}02^2}sen(60^o)=2\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-9}}{0{,}02^2}\cdot0{,}866=7{,}8\cdot10^4\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.

El cálculo de potencial es más sencillo ya que es un escalar y no implica vectores; utilizando el principio de superposición el potencial total en C es la suma de los potenciales creados por las cargas en A y B. Como ambas cargas son iguales y están a la misma distancia de C, 0,02 m.

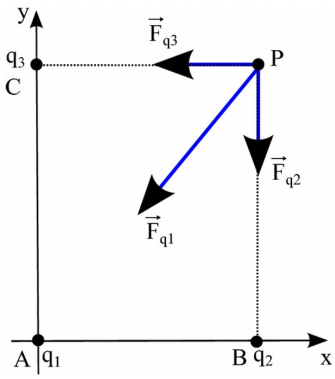
$$V(C)=2K\frac{q_1}{r_1}=2\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-9}}{0{,}02}=1{,}8\cdot10^3\,V$$

b) Al colocar una carga en el punto C, que llamamos $q_3=-2\cdot10^{-9}$, la fuerza se obtendrá utilizando el campo total obtenido en el apartado a, y como la carga es negativa y las otras dos positivas, será una fuerza dirigida hacia el centro de coordenadas.

$$\vec{F}(C)=q\vec{E}=-2\cdot10^{-9}\cdot7{,}8\cdot10^4\vec{j}=-1{,}56\cdot10^{-4}N$$

2015-Modelo

A. Pregunta 3.-



Realizamos un diagrama para visualizar mejor la configuración de cargas:
a) Utilizamos el principio de superposición para calcular la expresión del potencial total creado por las tres cargas $V_{total}=V_1+V_2+V_3$

$$V_1=K\frac{q_1}{r_{AP}}=9\cdot 10^9\cdot\frac{3\cdot 10^{-6}}{5}=5400\,V \quad ; \quad r_{AP}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5\,m$$

$$V_2=K\frac{q_2}{r_{BP}}=9\cdot 10^9\cdot\frac{1\cdot 10^{-6}}{4}=2250\,V \quad ; \quad r_{BP}=\sqrt{(3-3)^2+(4-0)^2}=4\,m$$

$$V_3=K\frac{q_3}{r_{CP}}=9\cdot 10^9\cdot\frac{q_3}{3}=3\cdot 10^9\cdot q_3 \quad ; \quad r_{CP}=\sqrt{(3-0)^2+(4-4)^2}=3\,m$$

$$V_{total}=V_1+V_2+V_3 \Rightarrow 10650=5400+2250+3\cdot 10^9\cdot q_3 \Rightarrow q_3=\frac{10650-5400-2250}{3\cdot 10^9}=1\cdot 10^{-6}=1\,\mu C$$

b) Utilizamos el principio de superposición para calcular la fuerza total. Llamamos q_4 a a la carga en el punto P. Lo podemos resolver de dos maneras equivalentes

A. Utilizando la definición vectorial de la fuerza eléctrica $\vec{F}=K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Calculamos el vector $\vec{u}_r$ que va de A a P, conociendo la distancia AP ya calculada antes

$$\vec{u}_r=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j} \qquad \vec{F}_1=K\frac{q_1 q_4}{r_{AP}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot(-7\cdot 10^{-6})}{5^2}\left(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_1=-4{,}536\cdot 10^{-3}\vec{i}-6{,}048\cdot 10^{-3}\vec{j}\,N$$

El vector $\vec{u}_r$ que va de B a P es $\vec{j}$, y la distancia BP son 4 m

$$\vec{F}_2=K\frac{q_2 q_4}{r_{BP}^2}\vec{u}_r=9\cdot 10^9\cdot\frac{1\cdot 10^{-9}\cdot(-7\cdot 10^{-9})}{4^2}\vec{j}\Rightarrow\vec{F}_2=-3{,}9375\cdot 10^{-3}\vec{j}\,N$$

El vector $\vec{u}_r$ que va de C a P es $\vec{i}$, y la distancia CP son 3 m

$$\vec{F}_3=K\frac{q_3 q_4}{r_{CP}^2}\vec{u}_r=9\cdot 10^9\cdot\frac{1\cdot 10^{-9}\cdot(-7\cdot 10^{-9})}{3^2}\vec{i}\Rightarrow\vec{F}_2=-7\cdot 10^{-3}\vec{i}\,N$$

Sumando ambas tenemos

$$\vec{F}_{total}=-1{,}1536\cdot 10^{-2}\vec{i}-9{,}9855\cdot 10^{-3}\vec{j}\,N$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = 53,13º = arctg (4/3), cos(α)=3/5=0,6; sen(α)=4/5=0,8

$$|\vec{F}_1|=K\frac{q_1 q_4}{r_{AP}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot(-7\cdot 10^{-6})}{5^2}=7{,}56\cdot 10^{-3}\,N$$

$$|\vec{F}_{1x}|=|F_1|\cdot\cos(\alpha)=7{,}56\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}6=4{,}536\cdot 10^{-3}\,N$$

$$|\vec{F}_{1y}|=|F_1|\cdot sen(\alpha)=7{,}56\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}8=6{,}048\cdot 10^{-3}\,N$$

$$|\vec{F}_2|=|F_{2y}|=K\frac{q_2 q_4}{r_{BP}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot(-7\cdot 10^{-6})}{4^2}=3{,}9375\cdot 10^{-3}\,N$$

$$|\vec{F}_3|=|F_{3x}|=K\frac{q_3 q_4}{r_{CP}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot(-7\cdot 10^{-6})}{3^2}=7\cdot 10^{-3}\,N$$

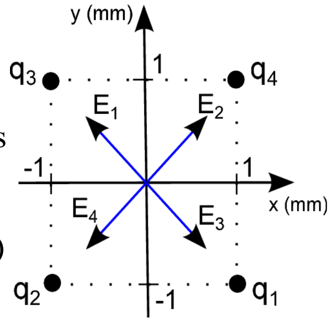
Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

$$\vec{F}_{total}=-1{,}1536\cdot 10^{-2}\vec{i}-9{,}9855\cdot 10^{-3}\vec{j}\,N$$

(También podríamos haber calculado primero el campo total en el punto P, y luego la fuerza combinando el valor de campo y el de la carga en el punto P)

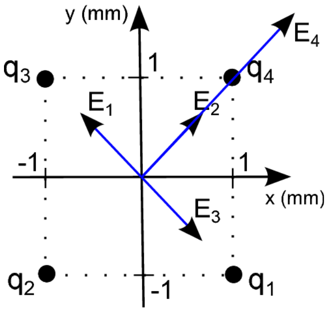
2014-Septiembre

B. Pregunta 3.-



a) Llamamos q_1 a la carga en P_1, q_2 a la carga en P_2, q_3 a la carga en P_3 y q_4 a la carga en P_4. Realizamos un diagrama. Por el principio de superposición, el campo eléctrico total será la suma de los campos generados por las cuatro cargas. Por la simetría de la configuración, vemos que el campo asociado a q_1 se anula con el campo asociado a q_3. Para que el campo eléctrico sea nulo en (0,0), el campo asociado a q_4 debe anularse con el campo asociado a q_2. Como la distancia de los puntos P_2 y P_4 a (0,0) es la misma, la carga q_4 tiene que tener el mismo valor que q_2= 2 μC.
Por el principio de superposición, el potencial eléctrico total será la suma de los potenciales generados por las cuatro cargas. Como las cuatro carga son iguales y las distancias al punto también

$$V_{total}(0,0)=4\cdot V_1(0,0)=4\cdot K\cdot\frac{q_1}{R_1}=4\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{(10^{-3})^2+(10^{-3})^2}}=5{,}09\cdot 10^7\,V$$



b) Por el principio de superposición, el potencial eléctrico total será la suma de los potenciales generados por las cuatro cargas. Para que el potencial se anule, dado que las cargas q_1, q_2 y q_3 son positivas y generarán un potencial positivo, la carga q_4 debe ser negativa.

$$V_4(0,0)=-3\cdot V_1(0,0)\Rightarrow K\cdot\frac{q_4}{R_4}=-3\cdot K\cdot\frac{q_1}{R_1}\Rightarrow q_4=-3\cdot q_1=-6\,\mu C$$

Por el principio de superposición, el campo eléctrico total será la suma de los campos generados por las cuatro cargas. Realizamos un nuevo diagrama. Tal y como se ha razonado en el apartado a, de nuevo los campos generados por q_1 y q_3 se anulan entre sí. Sin embargo, como q_4 ahora es negativa, el campo generado por q_4 y q_2 tienen ahora el mismo sentido.
Por la geometría de la configuración, las componentes x e y del campo son iguales: calculamos el módulo inicialmente

$$|E_2|=K\cdot\frac{|q_2|}{R_2^2}=9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{(10^{-3})^2+(10^{-3})^2}=9\cdot 10^9\,V/m$$

$$|E_4|=K\cdot\frac{|q_4|}{R_4^2}=9\cdot 10^9\cdot\frac{6\cdot 10^{-6}}{(10^{-3})^2+(10^{-3})^2}=2{,}7\cdot 10^{10}\,V/m$$

Como tienen misma dirección y sentido $|E_{total}|=|E_2|+|E_4|=9\cdot 10^9+2{,}7\cdot 10^{10}=3{,}6\cdot 10^{10}\,V/m$
Usando la geometría de la configuración, expresamos el campo vectorialmente:

$$\vec{E}_{total}(0,0)=3{,}6\cdot 10^{10}\cdot\cos(45^o)\,\vec{i}+3{,}6\cdot 10^{10}\cdot sen(45^o)\,\vec{j}\,V/m=2{,}5\cdot 10^{10}\,\vec{i}+2{,}5\cdot 10^{10}\,\vec{j}\,V/m$$

2014-Junio-Coincidentes

B. Pregunta 3.-

Llamamos q_1 a la carga en (0,3), q_2 a la carga en (0,-3), P al punto (1,0), Q al punto (0,0) y R al punto (-1,0), y los representamos en un diagrama (distancias en cm)

a) El potencial en P es la suma de potenciales asociados a q_1 y q_2, utilizando el principio de superposición, y como ambas cargas son iguales y las distancias al punto P también coinciden, el potencial total en P será el doble del potencial creado por una de las cargas.

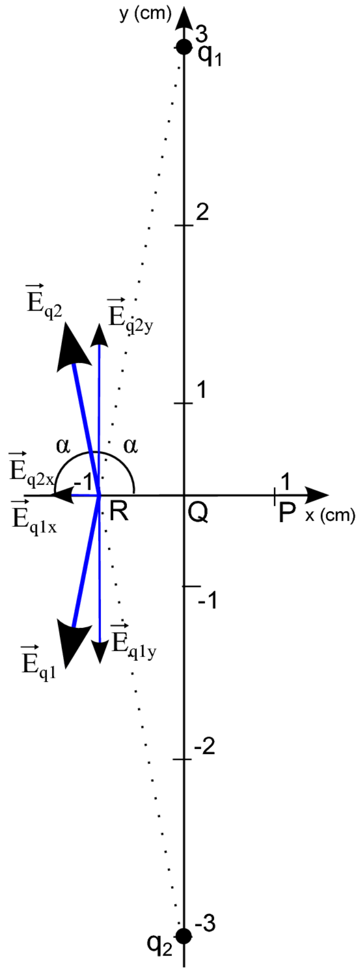
$$V(P)=V_1(P)+V_2(P)=2V_1(P)=2K\frac{q}{r_{q_1-P}}$$

$$5\cdot10^3=2\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{q}{\sqrt{0{,}01^2+0{,}03^2}}\Rightarrow q=\frac{5\cdot10^3\cdot\sqrt{0{,}001}}{9\cdot10^9}\approx8{,}78\cdot10^{-9}C$$

Para el punto Q de manera similar

$$V(Q)=V_1(Q)+V_2(Q)=2V_1(Q)=2K\frac{q}{r_{q_1-Q}}$$

$$V(Q)=2\cdot9\cdot10^9\cdot\frac{8{,}78\cdot10^{-9}}{0{,}03}=5{,}27\cdot10^3V=5{,}27\,kV$$



b) Utilizando el principio de superposición $\vec{E}_{total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

Lo podemos resolver de dos maneras equivalentes

A. Utilizando la definición vectorial de la campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Calculamos el vector $\vec{u}_r$ que va de q_1 a R, calculando la distancia utilizando Pitágoras es $\vec{u}_r=\frac{-0{,}01\,\vec{i}-0{,}03\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}01^2+0{,}03^2}}=-0{,}316\,\vec{i}-0{,}949\,\vec{j}\,m$

$$\vec{E}_1=K\frac{q_1}{d^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}_1=9\cdot10^9\cdot\frac{8{,}78\cdot10^{-9}}{0{,}01^2+0{,}03^2}(-0{,}316\,\vec{i}-0{,}949\,\vec{j})$$

$$\vec{E}_1=-2{,}50\cdot10^4\vec{i}-7{,}50\cdot10^4\vec{j}\,N/C$$

De manera análoga con q_2 llegamos a

$$\vec{u}_r=\frac{-0{,}01\,\vec{i}+0{,}03\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}01^2+0{,}03^2}}=-0{,}316\,\vec{i}+0{,}949\,\vec{j}\,m$$

$$\vec{E}_2=K\frac{q_2}{d^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}_2=9\cdot10^9\cdot\frac{8{,}78\cdot10^{-9}}{0{,}01^2+0{,}03^2}(-0{,}316\,\vec{i}+0{,}949\,\vec{j})$$

$$\vec{E}_2=-2{,}50\cdot10^4\vec{i}+7{,}50\cdot10^4\vec{j}\,N/C$$

Sumando ambas tenemos

$$\vec{E}_{total}(Q)=-5\cdot10^4\vec{i}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg(3/1) = 71,56º, pero con la simetría vemos que $|\vec{E}_{1y}|=|\vec{E}_{2y}|$ y que las componentes verticales se cancelan, y que en el eje x ambas componentes son iguales

$$|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}|=K\frac{q_1}{d^2}\cos(\alpha)=9\cdot10^9\cdot\frac{8{,}78\cdot10^{-9}}{0{,}01^2+0{,}03^2}\cos(71{,}56^o)=2{,}5\cdot10^4\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

$$\vec{E}_{total}(Q)=-5\cdot10^4\vec{i}\,N/C$$

2014-Junio

B. Pregunta 3.-

a) El electrón tiene carga negativa, y como $\vec{F}=q\vec{E}$ la fuerza será opuesta al sentido del campo, de modo que según los sentidos del diagrama será frenado con una fuerza constante, se detendrá, y luego será acelerado en el sentido opuesto al que llegó, regresando a la posición x=0 con el mismo módulo de velocidad.
La velocidad final del electrón será en la misma dirección pero sentido opuesto, por lo que si
$\vec{v_0}=-100\,\vec{i}\; m/s$ será $\vec{v_f}=100\,\vec{i}\; m/s$
No se pide, pero podemos calcular en qué punto se detendría, utilizando conservación de energía. El campo siempre va dirigido hacia potenciales menores, por lo que el potencial en punto final donde se detiene será menor (tomamos V=0) que en el punto inicial de la región, x=0, donde será V=-Ed positivo, considerando d distancia recorrida positiva, y la expresión es una visión simple de E=-grad V para el caso de que el módulo del campo eléctrico sea constante como indica el enunciado.

$$\Delta E_m=0\Rightarrow\Delta E_c-\Delta E_p=0\Rightarrow-\frac{1}{2}m v^2-q\,\Delta V=0$$

$$\frac{-1}{2}m v^2=-q\,E\,d\Rightarrow d=\frac{mv^2}{2qE}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot100^2}{2\cdot(-1{,}6\cdot10^{-19})(-8\cdot10^{-9})}=3{,}55\,m$$

b) $\vec{F}=q\vec{E}=-1{,}6\cdot10^{-19}\cdot(-8\cdot10^{-9}\,\vec{i})=1{,}28\cdot10^{-27}\,\vec{i}\;N$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{1{,}28\cdot10^{-27}\,\vec{i}}{9{,}1\cdot10^{-31}}=1407\,\vec{i}\;m/s^2$$

Como tenemos la aceleración, podemos validar el cálculo de distancia recorrida hasta detenerse, ya que al ser MRUA se cumple v^2-v_0^2=2as. Velocidad, aceleración y s=x-x_0 tienen signo según el sistema de referencia elegido.
-Si consideramos el tramo en el que es frenado (velocidad inicial negativa, velocidad final nula, aceleración positiva, y desplazamiento negativo)
$v^2-v_0^2=2\,as\Rightarrow s=\frac{-v_0^2}{2a}=\frac{-(-100)^2}{2\cdot1407}=-3{,}55\,m$ Como s=x-x_0 y x_0=0 m (empieza a detenerse al entrar en la región con campo en x<0), tenemos que x=-3,55 m al detenerse.
-Si consideramos el tramo en el que es acelerado (velocidad inicial nula, velocidad final positiva, aceleración positiva, y desplazamiento negativo)
$v^2-v_0^2=2\,as\Rightarrow\frac{v^2}{2a}=\frac{100^2}{2\cdot1407}=3{,}55\,m$ Como s=x-x_0 y x_0=-3,55 m, x=0 m cuando vuelve a adquirir de nuevo la velocidad; como no hay fuerzas no conservativas regresa con la misma energía cinética al mismo punto.

2014-Modelo

A. Pregunta 3.-

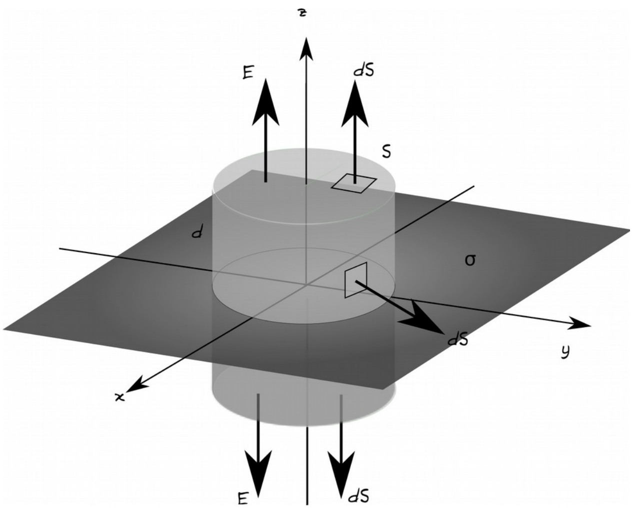
a) Como enunciado indica una carga puntual q, comparamos la expresión con la de la ley de Coulomb $\vec{E}=K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r=\frac{9}{r^2}\vec{u}_r\Rightarrow Kq=9\Rightarrow q=\frac{9}{K}=\frac{9}{9\cdot10^9}=10^{-9}C=1\,nC$

b) $W_{A\to B}=\int_A^B\vec{F}\,d\vec{r}=q'\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\,d\vec{r}=q'\int_5^{10}\frac{9}{r^2}dr=q'\left[\frac{-9}{r}\right]_5^{10}=q'\left(\frac{-9}{10}+\frac{9}{5}\right)=\frac{9q'}{10}$

También podíamos haber planteado W=-q'ΔV y calcular potenciales.
Igualando $-9\cdot10^{-6}=9q'/10\rightarrow q'=-10^{-5}$ C = -10 μC

2013-Septiembre

A. Pregunta 5.- *(Gauss en lámina infinita cargada: 2010-Junio-Fase Específica-B-Cuestión2-b, 2009-Modelo-B-Problema1)*



a) Realizando un diagrama en el fijamos la lámina en el plano XY y asumimos carga positiva, podemos comprobar como, al ser la lámina plana e infinita, la contribución del campo en un punto concreto de la carga existente en cualquier diferencial de superficie, siempre genera un campo cuya componente paralela al plano XY siempre puede ser cancelada por la componente paralela al plano XY del campo generado por la carga existente en otro diferencial de superficie situado de manera simétrica respecto a la proyección del punto sobre el plano de carga. Por lo tanto podemos concluir que el campo será perpendicular al plano, en la dirección del eje z, y podemos elegir como superficie gaussiana una superficie cerrada que tenga dos caras planas a una distancia d del plano, conectadas por una superficie perpendicular al plano. Ejemplos podrían ser un prisma o un cilindro: la forma de las secciones planas de la superficie es indiferente. Aplicando Gauss a esta superficie

$$\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=(\int_{CaraSuperior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{CaraInferior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{CarasLaterales}\vec{E}\,d\vec{S})=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Como en las caras laterales el campo y el vector superficie son perpendiculares, su producto vectorial es cero, tomando una superficie de las caras superiores e inferiores muy pequeña por lo que vector campo será uniforme en toda ella, y teniendo en cuenta que por simetría serán iguales en módulo, podemos escribir

$\Phi_c=2|\vec{E}|\int_{CaraSuperior}dS=2|\vec{E}|S=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$ Para calcular la carga encerrada, como $\sigma=\frac{Q}{S}\Rightarrow Q=\sigma S$

Sustituyendo $2|\vec{E}|S=\sigma\frac{S}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

En esta expresión es notable que el campo no depende de la distancia a la que estemos de la lámina: si estamos muy cerca las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son más intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen menor componente perpendicular a la lámina, mientras que si estamos muy lejos, las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son menos intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen mayor componente perpendicular a la lámina.

b) Tal y como se ha razonado en el apartado a, el campo eléctrico es constante en el exterior de la lámina. El campo y el potencial están relacionados, $\vec{E}=-grad\,V$, $V_A-V_B=\int_A^B\vec{E}\,d\vec{r}$.

Si los dos puntos están separados una distancia d en dirección perpendicular al plano cargado, al ser el campo eléctrico de módulo constante y perpendicular al plano, se llega a

$|V_A-V_B|=|\vec{E}|d=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$. Para expresarlo con signo tenemos que aclarar la posición relativa de A y B: asumiendo que B es más lejano a la placa que A, como el campo va dirigido hacia el exterior de la placa, tendremos $V_A-V_B=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d$

Si los dos puntos están separados una distancia d en dirección paralela al plano cargado, al ser el plano eléctrico de módulo constante y perpendicular al plano, ambos puntos estarían en una superficie equipotencial, perpendicular al vector campo, y la diferencia de potencial sería nula.

2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 3.-

a) Utilizando el principio de superposición, el campo total será la suma de los campos creados por cada una de ellas. Se podría realizar un diagrama; sería simple ya que ambas cargas están en la misma línea recta, que es el eje x, el punto medio es (0,10) cm, que llamamos P, y al ser el punto medio la distancia de ambas cargas a P es la misma e igual a 0,1 m

$$\vec{E}_1(P)=K\frac{q_1}{d^2}\vec{u}_r=9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}1^2}\vec{i}=1{,}8\cdot10^5\vec{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_2(P)=K\frac{q_2}{d^2}\vec{u}_r=9\cdot10^9\cdot\frac{-4\cdot10^{-6}}{0{,}1^2}(-\vec{i})=3{,}6\cdot10^5\vec{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_{total}(P)=\vec{E}_1(P)+\vec{E}_2(P)=1{,}8\cdot10^5\vec{i}+3{,}6\cdot10^5\vec{i}=5{,}4\cdot10^5\vec{i}\ N/C$$

b) Lo podemos plantear de varias maneras:
1. Con la definición de trabajo en función de potencial

$$W_{\infty\to P}=-q\cdot\Delta V=-q(V(P)-V(\infty))=-q((V_1(P)+V_2(P)))=-q(K\frac{q_1}{d_1}+K\frac{q_2}{d_2})$$

$$W_{\infty\to P}=-0{,}01\cdot10^{-3}\cdot(9\cdot10^9(\frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}1}+\frac{-4\cdot10^{-6}}{0{,}1}))=1{,}8\,J$$

El trabajo es positivo, luego se realiza a favor del campo/lo realiza el campo. Se puede ver que es la suma de trabajo asociado a colocar esa carga respecto a cada una de las dos cargas: respecto a la carga positiva el trabajo es negativo, se realiza contra el campo porque es acercar desde el infinito una carga positiva a otra positiva, y respecto a la carga negativa el trabajo es positivo, lo realiza el campo. Como la carga negativa es mayor en módulo, el término asociado positivo prevalece.
2. Con la interpretación del concepto de energía potencial, que es (ver apuntes en FiQuiPedia)
-Cambiado de signo, W realizado por el campo para llevar una carga desde la referencia (∞) hasta ese punto.
-W realizado por campo para llevar una carga desde ese punto a la referencia ∞.
-W aportado (realizado externo/contra el campo) para llevar una carga desde ∞ hasta ese punto "traerla del infinito, E aportada para crear esa configuración de cargas"
La energía potencial de una carga de 0,01 mC en ese punto es

$$E_p(P)=E_{p1}(P)+E_{p2}(P)=K\,q_1\frac{q}{d_1}+K\,q_2\frac{q}{d_2}=K\,q(\frac{q_1}{d_1}+\frac{q_2}{d_2})$$

$$E_p(P)=9\cdot10^9\cdot0{,}01\cdot10^{-3}(\frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}1}+\frac{-4\cdot10^{-6}}{0{,}1})=-1{,}8\,J$$

$$W_{\infty\to P}(realizado\ por\ el\ campo)=-E_p(P)=1{,}8\,J$$

2013-Junio
B. Pregunta 1.-
a) Si ambas cargas se repelen tienen el mismo signo. Si la suma es positiva, ambas tienen signo positivo.

$$F=K\frac{q_1 q_2}{r^2}\Rightarrow 2=9\cdot 10^9\cdot\frac{q_1 q_2}{0{,}2^2}\Rightarrow q_1 q_2=8{,}9\cdot 10^{-12}$$

Sustituimos $q_1+q_2=6\cdot 10^{-6}$

$$q_1\cdot(6\cdot 10^{-6}-q_1)=8{,}9\cdot 10^{-12}\Rightarrow q_1^2-6\cdot 10^{-6}q_1+8{,}9\cdot 10^{-12}=0$$

$$q_1=\frac{6\cdot 10^{-6}\pm\sqrt{(6\cdot 10^{-6})^2-4\cdot 1\cdot(8{,}9\cdot 10^{-12})}}{2}=\frac{6\cdot 10^{-6}\pm 6{,}32\cdot 10^{-7}}{2}=\begin{matrix}2{,}68\cdot 10^{-6}C\\3{,}32\cdot 10^{-6}C\end{matrix}$$

Los dos resultados son válidos y están asociados las dos cargas q_1 y q_2.

b) En el punto medio de la recta que une ambas cargas los vectores campo eléctrico tendrán sentidos opuestos, ya que ambas cargas tienen el mismo signo y se repelen, pero no tendrán el mismo módulo, ya que aunque la distancia de las dos cargas a ese punto sea la misma, no lo son los valores de la carga.

Tomamos unas posiciones arbitrarias en el eje X para dar el resultado (las cargas podrían estar invertidas respecto a esta elección pero el planteamiento sería similair): suponemos que $q_1=2{,}68\cdot 10^{-6}$ C está en el origen de coordenadas, y $q_2=3{,}32\cdot 10^{-6}$ C en x=0,2 m

El campo en el punto medio, x=0,1 m

$E_1=Kq_1/r^2=9\cdot 10^9\cdot 2{,}68\cdot 10^{-6}/0{,}1^2=2{,}4\cdot 10^6$ N/C (dirigido hacia x positivas)

$E_2=Kq_2/r^2=9\cdot 10^9\cdot 3{,}32\cdot 10^{-6}/0{,}1^2=3\cdot 10^6$ N/C (dirigido hacia x negativas)

Utilizando el principio de superposición, el campo total será

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=(2{,}4\cdot 10^6-3\cdot 10^6)\vec{i}=-6\cdot 10^5\vec{i}\ N/C$$

Al estar ambas cargas a la misma distancia, el campo total tiene el sentido de la carga mayor.

2013-Modelo
B. Pregunta 3.-
a) Para aplicar el teorema de Gauss utilizamos como superficie una esfera concéntrica con el centro de la esfera maciza no conductora, con radio r=2R de modo que pasa por el punto en el que queremos calcular el campo. Por la simetría del problema el campo será siempre perpendicular a la superficie elegida, tendrá el mismo módulo en toda la superficie, y al ser positiva la carga contenida el campo estará dirigido hacia el exterior de la esfera.

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$ Se nos da como dato $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$|\vec{E}|\oint_S dS=4\pi K Q\Rightarrow|\vec{E}|=4\pi K\frac{Q}{4\pi r^2}=K\frac{Q}{r^2}$$ Expresión idéntica a la de una carga puntual.

Para r=2R $E=\frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{(2\cdot 0{,}2)^2}=5{,}625\cdot 10^4\,V/m$

El potencial tiene la misma expresión que para una carga puntual

$$V=K\frac{Q}{r}=\frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{2\cdot 0{,}2}=2{,}25\cdot 10^4\,V$$

b) Utilizamos el principio de conservación de la energía mecánica

1. Posición inicial. $E_p=0$ (posición muy lejana), $E_c=\frac{1}{2}m v_0^2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^{-12}\cdot(10^5)^2=1{,}5\cdot 10^{-2}\,J$

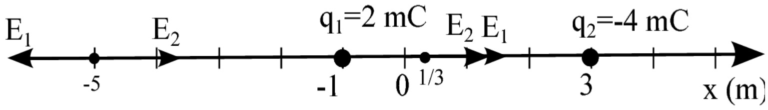
2. Posición final. $E_p=KQq/r=KQ^2/r$; $E_c=0$ (se parará)

Igualando ambas

$$1{,}5\cdot 10^{-2}=9\cdot 10^9\cdot\frac{(10^{-6})^2}{r}\Rightarrow r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-12}}{1{,}5\cdot 10^{-2}}=0{,}6\,m$$

2012-Septiembre
A. Pregunta 3.- *(Cierta similitud con 2001-Septiembre-B.Problema 2)*

a) Realizamos un diagrama con las cargas, donde se ve que ambas cargas están situadas en el eje X.



Utilizando el principio de superposición el potencial creado por ambas cargas es la suma de los potenciales creado por cada una de ellas, por lo que, si tomamos un punto X genérico de coordenada x (por ser genérico no asumimos situado entre ambas cargas, si asumimos situado entre ambas cargas la resolución es más sencilla).
La distancia entre x y q_1 será |-1-x| : puede que q_1 esté situado a la izquierda o a la derecha de X.
La distancia entre x y q_2 será |x-3| : puede que q_2 esté situado a la izquierda o a la derecha de X
$V=V_1+V_2=Kq_1/r_1 + Kq_2/r_2 =K(2\cdot10^{-3}/|-1-x| + (-4\cdot10^{-3})/|x-3|)$
Si igualamos a cero: $2\cdot10^{-3}/|-1-x|=4\cdot10^{-3}/|x-3|$
$2\cdot|x-3|=4\cdot|-1-x|$ → Dividimos por 2 → $|x-3|=2|-1-x|$
Para asignar valores debemos contemplar las casuísticas de cada uno de los dos valores absolutos, teniendo en cuenta sus propiedades: $|a| =a$ si $a>0$, y $|a|=-a$ si $a<0$
-Caso 1: ($x-3>0$ y $-1-x>0$ → $x>3$ y $x<-1$): puntos X que cumplen ambas condiciones no existen
-Caso 2: ($x-3>0$ y $-1-x<0$ → $x>3$ y $x>-1$): punto X de ambas condiciones en intervalo $(-1, \infty)$
$x-3=2(1+x)$→ $-x=5$ → $x=-5$ m. No existe solución en ese intervalo
-Caso 3: ($x-3<0$ y $-1-x<0$ → $x<3$ y $x>-1$): punto X de ambas condiciones en intervalo (-1,3), entre ambas cargas
$-x+3=2(1+x)$→ $-3x=-1$ → $x=1/3$ m.
-Caso 4: ($x-3<0$ y $-1-x>0$ → $x<3$ y $x<-1$): punto X de ambas condiciones en intervalo $(-\infty, 3)$
$-x+3=2(-1-x)$→ $x=-5$ m
Las soluciones son puntos de eje x (línea que une las cargas) con coordenadas x=-5 m y x=1/3 m.
Podemos comprobar que el potencial eléctrico es nulo:
$V(x=-5)=K(2\cdot10^{-3}/|-1+5| + (-4\cdot10^{-3})/|-5-3|)=K(2\cdot10^{-3}/4 + (-4\cdot10^{-3})/8)=0$ V
$V(x=1/3)=K(2\cdot10^{-3}/|-1-1/3| + (-4\cdot10^{-3})/|1/3-3|)=K(2\cdot10^{-3}/(4/3) + (-4\cdot10^{-3})/(8/3))=0$V
Nota: salen dos puntos y apartado b indica "ese punto" singular. Enunciado apartado a dice punto de la línea que las une, no explícitamente entre ellas.
b) Según el apartado a) el potencial creado por ambas cargas es nulo. Utilizamos solamente el punto x=1/3 m. Que el potencial sea nulo no implica que el campo total sea nulo (tal y como está redactado el enunciado, asumimos que se pide solamente el campo total).
Utilizando el principio de superposición, el campo será la suma de ambos campos. Sin utilizar vectores ya que están las fuerzas en el eje X, sí tenemos en cuenta el signo para indicar el sentido.
$E=E_1+E_2$
E_1 será positivo ya que q_1 es positiva y el punto está a su derecha.
E_2 será positivo ya que q_2 es negativa y el punto está a su izquierda.
$E=K|q_1|/r_1^2+K|q_2|/r_2^2=9\cdot10^9\cdot(2\cdot10^{-3}/(4/3)^2 + (4\cdot10^{-3}/(8/3)^2)=1,5\cdot10^7$ V/m

2012-Junio

A. Pregunta 3.-

a) Siendo la velocidad hacia x positivas, la fuerza es de frenado estará dirigida hacia x negativas. Como $\vec{F}=q\vec{E}$, dado que la carga del electrón es negativa, el campo eléctrico está dirigido hacia x positivas, en el mismo sentido que la velocidad.
Podemos plantear la conservación de la energía mecánica: inicialmente antes de entrar solo tiene energía cinética y al frenarse completamente solamente tiene energía potencial del campo eléctrico.
Como es un campo eléctrico uniforme y E=-grad(V), en el eje x podemos plantear E=-ΔV/Δx
Por definición el potencial es la energía potencial eléctrica por unidad de carga, por lo que

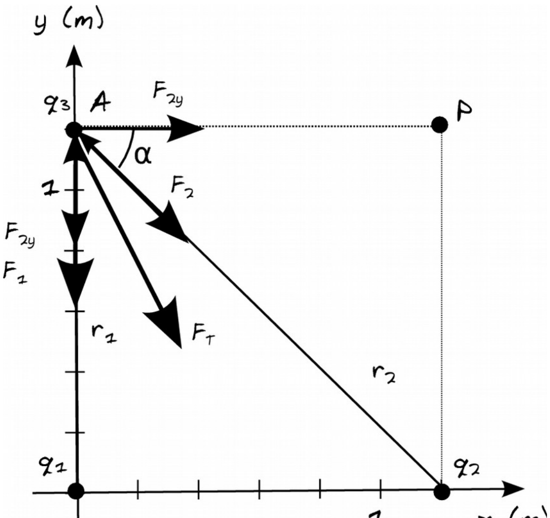
$$\frac{1}{2}mv^2=q\Delta V=-qE\Delta x \Rightarrow E=\frac{mv^2}{-2q\Delta x}=\frac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot(2\cdot10^{6})^2}{-2\cdot(-1{,}6\cdot10^{-19})\cdot0{,}9}=12{,}65\,V/m$$

Vectorialmente $\vec{E}=12{,}65\,\vec{i}\;V/m$

b) Por el teorema de las fuerzas vivas ya que sólo actúa la fuerza del campo eléctrico W=ΔEc, y al mismo tiempo por definición de Energía potencial W=-ΔEp; en este caso ΔEc=-ΔEp ya que ΔEc+ΔEp=0 al conservarse la energía mecánica.
$W=-\Delta Ep=-q\Delta V=-q\cdot(-E\Delta x)=-(-1{,}6\cdot10^{-19})\cdot(-12{,}65\cdot0{,}9)=-1{,}82\cdot10^{-18}$ J
El trabajo es negativo, y podemos realizar algunas validaciones cualitativas:
-La variación de Ec es negativa: Ec final=0, Ec inicial > 0, luego la variación es negativa.
-El trabajo es negativo ya que la variación de Ep es positiva (es mayor en punto final), y para cargas negativas, se tiende a potenciales mayores ya que implican menores energías potenciales, el campo está dirigido siempre hacia potenciales menores.
-Si planteásemos trabajo como integral del producto escalar de fuerza del campo y desplazamiento, tienen sentidos opuestos y aparecería un signo menos en su producto escalar. El trabajo se realiza "contra el campo", en sentido opuesto al que el campo llevaría la partícula, y por eso está aumentando la Ep de la partícula, que luego se podrá recuperar: regresará por donde ha venido y volverá a salir de la zona en la que penetró con la misma Ec (el campo ha conservado la energía), pero sentido opuesto.

2012-Modelo

A. Pregunta 5.-



a) Utilizando el principio de superposición

$$\vec{F}_{total}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

Lo podemos resolver de dos maneras equivalentes
A. Utilizando la definición vectorial de la fuerza eléctrica $\vec{F}=K\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector unitario que va de q_1 a q_2 es el vector j y la distancia entre ellas es L

$$\vec{F}_1=K\frac{q_1q_3}{L^2}\vec{j}=\frac{9\cdot10^{9}\cdot5\cdot10^{-9}\cdot(-5\cdot10^{-9})}{1{,}2^2}\vec{j}$$

$$\vec{F}_1=-1{,}56\cdot10^{-7}\vec{j}\,N$$

Calculamos el vector $\vec{u}_r$ que va de q_2 a q_3, calculando la distancia entre ellas utilizando Pitágoras es $\vec{u}_r=\frac{-L\vec{i}+L\vec{j}}{\sqrt{L^2+L^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$$\vec{F}_2=K\frac{q_2q_3}{2L^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^{9}\cdot5\cdot10^{-9}\cdot(-5\cdot10^{-9})}{2\cdot1{,}2^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)=+5{,}52\cdot10^{-8}\vec{i}-5{,}52\cdot10^{-8}\vec{j}\,N$$

Sumando ambas tenemos

$$\vec{F}_{total}=+5{,}52\cdot10^{-8}\vec{i}-2{,}11\cdot10^{-7}\vec{j}\,N$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = 45º = arctg (1), cos(α)=sen(α)= $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, no es necesario descomponer $\vec{F}_1$, y $|\vec{F}_{2x}|=|\vec{F}_{2y}|$ ya que el ángulo es de 45º.

$$|\vec{F}_{2x}|=|\vec{F}_{2y}|=K\frac{q_2 q_3}{2L^2}\cos 45^o=\frac{9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot(-5\cdot 10^{-9})}{2\cdot 1{,}2^2}(\frac{1}{\sqrt{2}})=5{,}52\cdot 10^{-8}$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

$$\vec{F}_{total}=+5{,}52\cdot 10^{-8}\vec{i}-2{,}11\cdot 10^{-7}\vec{j}\,N$$

b) Llamamos punto A al punto del apartado A, y volvemos a utilizar principio de superposición para las energías potenciales.

$$W_{A\to P}=-\Delta E_p=-(E_p(P)-E_p(A))$$

$$r_{q_1 P}=\sqrt{1{,}2^2+1{,}2^2}=1{,}2\sqrt{2}m=1{,}7\,m\,;\,r_{q_2 P}=1{,}2\,m$$

$$E_p(P)=E_p(P,q_1)+E_p(P,q_2)=K\frac{q_1 q_3}{r_{q_1 P}}+K\frac{q_2 q_3}{r_{q_2 P}}$$

$$E_p(P)=9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot(-5\cdot 10^{-9})\cdot(\frac{1}{1{,}7}+\frac{1}{1{,}2})=-3{,}2\cdot 10^{-7}J$$

$$r_{q_1 A}=1{,}2\,m\,;\,r_{q_2 A}=\sqrt{1{,}2^2+1{,}2^2}=1{,}2\sqrt{2}m=1{,}7\,m$$

$$E_p(A)=E_p(A,q_1)+E_p(A,q_2)=K\frac{q_1 q_3}{r_{q_1 A}}+K\frac{q_2 q_3}{r_{q_2 A}}$$

$$E_p(A)=9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot(-5\cdot 10^{-9})\cdot(\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}7})=-3{,}2\cdot 10^{-7}J$$

$$W_{A\to P}=0\,J$$

El trabajo es nulo ya que en ambos puntos tiene la misma energía potencial, y son fuerzas conservativas. Cualitativamente podemos pensar que durante parte del trayecto será el campo quien realice el trabajo, y durante otra parte habrá que realizar trabajo de manera externa al campo, siendo el resultado neto nulo.

2011-Septiembre-Coincidentes

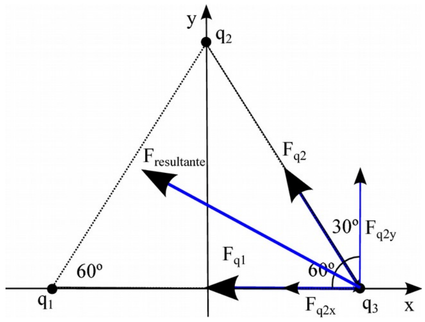
A. Cuestión 2.-

a) No se puede afirmar, ya se pueden poner al menos un ejemplo de situación en la que pueden hacer que el flujo sea nulo sin ser el campo eléctrico nulo.
La definición de flujo a través de una superficie cerrada es $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}$, y precisamente por la ley de Gauss está relacionado con las cargas existentes en el interior. Si el flujo en la superficie cerrada es nulo, la carga neta existente en el interior es nula, y puede ocurrir de dos maneras:
Ejemplo 1: La carga neta es nula porque no hay cargas en el interior, pero el campo eléctrico es uniforme: entre las placas de un condensador. Si la superficie cerrada es un cubo y el campo eléctrico uniforme es paralelo a cuatro de sus caras, la integral se puede descomponer en la suma de 6 integrales, una por cada cara del cubo, y cuatro de esas integrales serían nulas ya que el campo sería paralelo a la superficie. Para las otras dos caras, las integrales tendrían el mismo valor numérico pero distinto signo, por lo que el flujo total sería nulo. Enlaza con la definición cualitativa de que el flujo a través de una superficie es una medida del número neto de líneas de campo que la atraviesan, y como en este caso entran tantas como salen, s$_0$u flujo es nulo
Ejemplo 2: La carga neta es nula porque hay cargas en su interior, pero el valor de las cargas positivas es igual al valor de las negativas. El caso más sencillo serían dos cargas, una positiva y otra negativa, ambas del mismo módulo (sería similar al apartado b, si el valor numérico coincidiese). En ese caso, se puede visualizar, a través de las líneas de campo, que el campo resultante no es nulo en toda la superficie de la esfera.
b) Utilizando la ley de Gauss, la esfera encierra a su interior las dos cargas (realmente están en el borde de la esfera, pero las suponemos puntuales y que las contiene la esfera)

$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \Phi = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$ Como se nos da como dato $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (unidades K y $1/\varepsilon_0$ coinciden)

$\Phi = 4\pi \cdot 9\cdot 10^9 (2\cdot 10^{-6} - 8\cdot 10^{-6}) = -6{,}79\cdot 10^5 [N\, m^2 C^{-1}][V\, m]$ (Ojo: Wb es para magnético)

B. Cuestión 3.-



a) Dibujamos el diagrama de fuerzas.
Utilizamos el principio de superposición para calcular la fuerza resultante $\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{q_1} + \vec{F}_{q_2}$

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:
A. Utilizando la definición vectorial de fuerza eléctrico

$\vec{F} = K\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de q_1 a q_3 es $0{,}25\vec{i}$ y el vector unitario $\vec{i}$

$$\vec{F}_{q_1} = K\frac{q_1 q_3}{r^2_{q_1 q_3}}\vec{u}_r = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 5\, 10^{-9}\cdot(-5\, 10^{-9})}{0{,}25^2}\vec{i} = -3{,}6\cdot 10^{-6}\vec{i}\, N$$

El vector que va de q_2 a q_3 es $\frac{0{,}25}{2}\vec{i} - 0{,}25\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ y el vector unitario $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

$$\vec{F}_{q_2} = K\frac{q_2 q_3}{r^2_{q_2 q_3}}\vec{u}_r = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 5\, 10^{-9}\cdot(-5\, 10^{-9})}{0{,}25^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}) = -1{,}8\cdot 10^{-6}\vec{i} + 3{,}12\cdot 10^{-6}\vec{j}\, N$$

Sumando vectorialmente: $\vec{F}_{resultante} = -5{,}4\cdot 10^{-6}\vec{i} + 3{,}12\cdot 10^{-6}\vec{j}\, N$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α=60º en este caso, con cos(α)= ½ y , sen(α) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, no es necesario F_{q1}.

$$|\vec{F}_{q_2}| = K\frac{|q_2 q_3|}{r^2_{q_2 q_3}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot |5\, 10^{-9}\cdot(-5\, 10^{-9})|}{0{,}25^2} = 3{,}6\cdot 10^{-6}\, N$$

$$|\vec{F}_{q_{2x}}| = |\vec{F}_{q_2}|\cos 60º = 1{,}8\cdot 10^6\, N\, ; |\vec{F}_{q_{2y}}| = |\vec{F}_{q_2}| sen\, 60º = 3{,}12\cdot 10^6\, N\, ;$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

b) Llamamos A al punto que se encuentra a q_3 inicialmente, representado en el diagrama

$$W_{A\to\infty} = -\Delta E_p = -q\Delta V = -q(V_\infty - V_A) = q_3 V_{Atotal}$$

Aplicando superposición, y teniendo en cuenta que las cargas q_1 y q_2 son idénticas y su distancia al punto A es la misma

$$V_{A\,total} = V_{Aq1} + V_{Aq2} = K\frac{q_1}{r_{q_1 q_3}} + K\frac{q_2}{r_{q_2 q_3}} = 2\cdot 9\cdot 10^9\frac{5\cdot 10^{-9}}{0{,}25} = 360\, V$$

Sustituyendo para obtener el trabajo en la expresión anterior

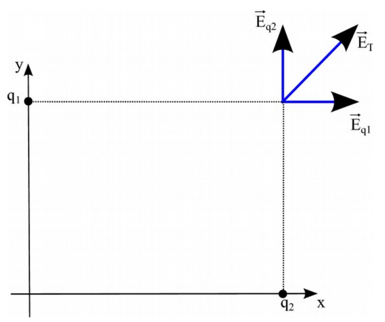
$$W_{A\to\infty} = -5\cdot 10^{-9}\cdot 360 = -1{,}8\cdot 10^{-6}\, J$$

El trabajo es negativo, luego debe ser realizado externamente al campo, no lo realiza el campo.
Cualitativamente podemos ver que estamos alejando una carga negativa de dos cargas positivas.

2011-Septiembre

B. Problema 2.-

a) Utilizando el principio de superposición, como se puede ver en el diagrama



$$\vec{E}_T = \vec{E}_{q1} + \vec{E}_{q2} = K\frac{q_1}{r_1^2}\vec{i} + K\frac{q_2}{r_2^2}\vec{j}$$

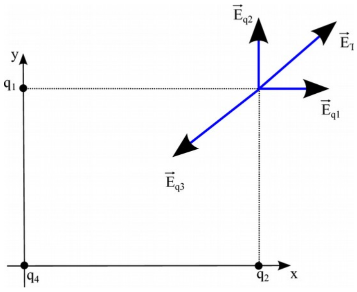
$$\vec{E}_T = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 7{,}11\cdot 10^{-9}}{4^2}\vec{i} + \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3{,}0\cdot 10^{-9}}{3^2}\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j}\, N/C$$

b)

$$V_T = V_{q1} + V_{q2} = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2}$$

$$V_T = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 7{,}11\cdot 10^{-9}}{4} + \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3{,}0\cdot 10^{-9}}{3} = 16 + 9 = 25\, V$$

c) La distancia entre el origen y el punto (4,3) es de $\sqrt{4^2+3^2}=5\,m$



$$V_T=V_{q1}+V_{q2}+V_{q3}=K\frac{q_1}{r_1}+K\frac{q_2}{r_2}+K\frac{q_3}{r_3}=0$$

$$0=25+\frac{9\cdot10^9\cdot q_3}{5}\Rightarrow q_3=\frac{-25\cdot5}{9\cdot10^9}=-13{,}9\cdot10^{-9}C$$

d) Cualitativamente se ve que tiene que ser una carga negativa para compensar el campo generado por las otras dos cargas calculado en apartado a. Se puede hacer por trigonometría o utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de q_4 a (4,3) es $4\vec{i}+3\vec{j}$ y la distancia entre ellas es $\sqrt{4^2+3^2}=5\,m$

$$\vec{E}_{q4}=K\frac{q_4}{r_{q4}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^9\cdot q_4}{25}\frac{(4\vec{i}+3\vec{j})}{5}$$

Para que el campo sea nulo, la suma vectorial del campo generado por las dos primeras cargas q_1 y q_2 calculado en apartado a y el de esta nueva carga q_4 debe ser nulo, por lo que

$$\vec{E}_{q4}=-\vec{E}_T;\frac{9\cdot10^9\cdot q_4}{25}\frac{(4\vec{i}+3\vec{j})}{5}=-4\vec{i}-3\vec{j}\Rightarrow q_3=\frac{-125}{9\cdot10^9}=-13{,}9\cdot10^{-9}C$$

El resultado de apartado c y d coinciden, aunque el hecho de que el potencial eléctrico (magnitud escalar) en un punto sea nulo no implica necesariamente que el campo (magnitud vectorial) sea también nulo.

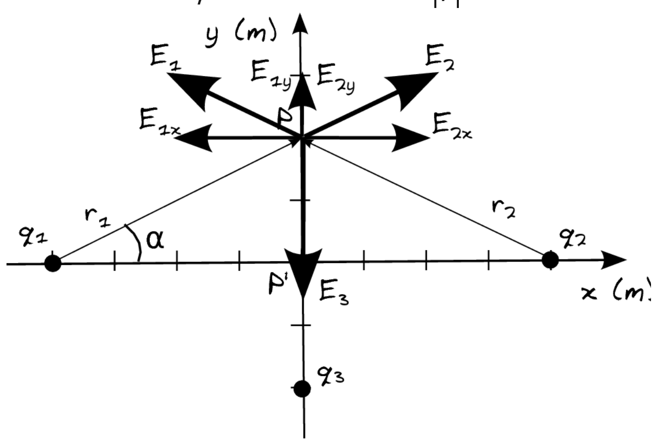
2011-Junio-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) Llamamos q_1 a la carga en (2,0), q_2 a la carga en (-2,0), q_3 a la carga en (0,-1), y P al punto (0,1).
Utilizando el principio de superposición $\vec{E}_{total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$

Por simetría podemos ver que la componente x del campo generado por q_1 y por q_2 se cancela, y que su componente y tendrá el mismo módulo para ambas.
Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$



El vector que va de q_1 a P es $-2\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellas es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\,m$

$$\vec{E}_1=K\frac{q_1}{r_{q_1P}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-9}}{5}\frac{(-2\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{E}_1=-1{,}6\vec{i}+0{,}8\vec{j}\,N/C$$

El vector que va de q_2 a P es $+2\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellas es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\,m$

$$\vec{E}_2=K\frac{q_2}{r_{q_2P}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-9}}{5}\frac{(2\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{E}_2=1{,}6\vec{i}+0{,}8\vec{j}\,N/C$$

El vector que va de q_3 a P es $2\vec{j}$ y la distancia entre ellas es 2 m (vector unitario es vector j)

$$\vec{E}_3=K\frac{q_3}{r_{q_3P}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot10^9\cdot(-2\cdot10^{-9})}{2^2}\vec{j}=-4{,}5\vec{j}\,N/C$$

$$\vec{E}_{total}(P)=(2\cdot0{,}8-4{,}5)\vec{j}=-2{,}9\vec{j}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (½) = 26,6º, cos(α)= $\frac{1}{\sqrt{5}}$, sen(α) = $\frac{2}{\sqrt{5}}$, no es necesario descomponer $\vec{E}_3$, no calculamos la componentes x que se cancelan, y por simetría

$$|\vec{E}_{1y}|=|\vec{E}_{2y}|$$

$$|E_{1y}|=|E_{2y}|=K\frac{q_2}{5}sen 26{,}6^o=\frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=0{,}8\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

Para el potencial eléctrico aplicamos también superposición.

$V_1=K\frac{q_1}{r_{q_1P}}=\frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}}{\sqrt{5}}=4\,V$ Por simetría $V_2 = V_1$

$$V_3=K\frac{q_3}{r_{q_3P}}=\frac{9\cdot 10^9\cdot(-2\cdot 10^{-9})}{2}=-9\,V$$

$$V_{total}(P)=2\cdot 4-9=-1\,V$$

b) Calculamos el potencial eléctrico en el origen, de manera similar a apartado a, pero sin detallar tanto los pasos

$$V_{total}(origen)=\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}}{2}+\frac{9\cdot 10^9\cdot(-2\cdot 10^{-9})}{1}=2\cdot 4{,}5-18=-9\,V$$

Una carga positiva es movida por el campo hacia potenciales menores: como está en reposo sólo se moverá si hay un pozo de potencial: si entre ambos puntos hubiera un potencial constante o una barrera de potencial, no se movería clásicamente.
El potencial de las cargas q_1 y q_2 pasa de 4 V en P a 4,5 V en el origen: crece ya que la distancia a las cargas disminuye y tiene signo positivo.
El potencial de la carga q_3 pasa de -9 V en P a -18 V en el origen: decrece ya que la distancia a las cargas disminuye pero tiene signo negativo.
Calculamos el potencial en un punto intermedio P' (0, 0,5)

$$V_{total}(P')=\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}}{\sqrt{2^2+0{,}5^2}}+\frac{9\cdot 10^9\cdot(-2\cdot 10^{-9})}{1{,}5}=2\cdot 4{,}37-12=-3{,}6\,V$$

El potencial en un punto intermedio es mayor (número negativo de menor valor absoluto), luego hay una barrera de potencial y la carga no llega al origen de coordenadas. Si hubiera habido un pozo de potencial en lugar de una barrera, al ser fuerzas conservativas se conservaría la energía, y como partía del reposo, hubiera llegado al origen con energía cinética nula.

2011-Junio

B. Problema 2.-

a) No se dice explícitamente pero consideramos que el conductor está en equilibrio, por lo que la carga eléctrica se distribuye en su superficie. Para calcular el campo eléctrico utilizamos el teorema de Gauss, tomando como superficie una esfera centrada en el centro del conductor esférico y de radio igual a la distancia a los puntos de los que queremos conocer el valor del campo.
Utilizando la simetría esférica y la fórmula de superficie de la esfera gaussiana podemos plantear el teorema de Gauss en este caso

$$\Phi_c=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r^2=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Para puntos interiores a la esfera, al estar la carga distribuida en su superficie de la esfera, la carga interior a la superficie gaussiana es nula y también lo será el campo.
Para puntos exteriores a la esfera, la carga interior a la superficie gaussiana será q y tendremos que

$|\vec{E}|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=K\frac{q}{r^2}$, que es equivalente a si toda la carga q fuese puntual situada en el origen de coordenadas en el que está centrado la esfera.

Por lo tanto $\vec{E}(r=5\,cm)=0\,N/C$

$$\vec{E}(r=15\,cm)=K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0{,}15^2}\vec{u}_r=2000\,\vec{u}_r\,N/C$$

El campo es un vector, por lo que indicamos, además de módulo, dirección y sentido: será radial y hacia el exterior.

b) El punto indicado es la superficie de la esfera $V=\frac{Kq}{r}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0,1}=450\,V$

Nota: En ese punto hay una discontinuidad para el campo, que es cero en el interior y tiene valor en el exterior, pero campo nulo no quiere decir potencial nulo. De hecho como el campo es nulo en el interior de la esfera, en toda ella el potencial es constante e igual al potencial en la superficie.

c) El punto indicado es en el exterior de la esfera $V=\frac{Kq}{r}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0,15}=300\,V$

d) Llamamos A al punto que se encuentra a 10 cm de la esfera

$$W_{\infty\rightarrow A}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V_A-V_\infty)=-qV_A=-2\cdot 10^{-9}\cdot 450=-9\cdot 10^{-7}\,J$$

El trabajo es negativo, luego debe ser realizado externamente al campo, no lo realiza el campo. Cualitativamente podemos ver que la esfera está cargada positivamente y queremos acercar una carga positiva.

2011-Modelo

A. Problema 2.-

Solución 100% idéntica a 2010-Modelo-A-Problema 2.

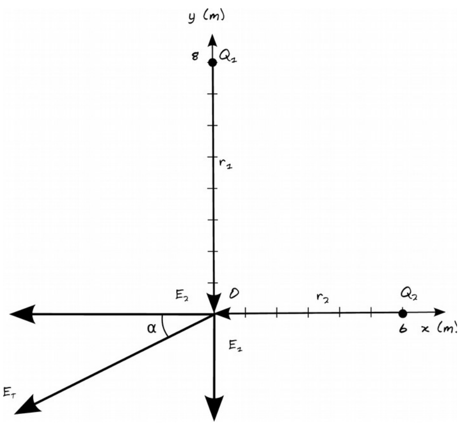
2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 2.-

a) Llamamos Q_1 a la carga situada en (0,8), Q_2 a la situada en (6,0) y O al origen de coordenadas. Realizamos un diagrama, donde cualitativamente podemos razonar que como ambas cargas son positivas, el campo tendrá ambas componentes negativas. Como ambas cargas tienen el mismo valor, será algo mayor la componente asociada a la carga más cercana, E_2., que está en eje x.

Utilizando el principio de superposición $\vec{E}(O)=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

Resolvemos utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.



El vector que va de Q_1 a O es $-8\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 8 m.

El vector que va de Q_2 a O es $-6\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 6 m.

$$\vec{E}(O)=K\frac{Q_1}{8^2}(-\vec{j})+K\frac{Q_2}{6^2}(-6\vec{i})$$

$$\vec{E}(O)=\frac{-9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{64}\vec{j}-\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{36}\vec{i}$$

$$\vec{E}(O)=-500\,\vec{i}-281{,}25\,\vec{j}\;N/C$$

A nivel informativo, su módulo es $\sqrt{500^2+281{,}25^2}=573{,}67\,N/C$ y el ángulo que forma con el eje x es $arctg(-281{,}25/500)=-29{,}36\,^o$

b) $W_{P\rightarrow O}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V_O-V_P)$

Utilizamos el principio de superposición para los potenciales. Como es el punto medio que une ambas cargas, podemos calcular la distancia entre ambas, que es $\sqrt{8^2+6^2}=10$ m, luego la mitad es 5 m. También podríamos calcular como $\sqrt{(3-0)^2+(4-8)^2}=\sqrt{(3-6)^2+(4-0)^2}=5$

$$V_{total}(O)=K\frac{Q_1}{8}+K\frac{Q_2}{6}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{8}+\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{6}=2250+3000=5250\,V$$

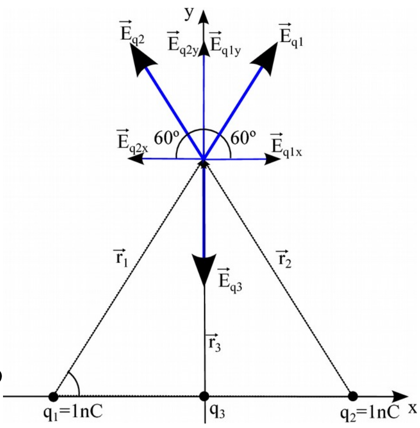
$$V_{total}(P)=K\frac{Q_1}{5}+K\frac{Q_2}{5}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{5}+\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{5}=3600+3600=7200\,V$$

$$W_{P\rightarrow O}=-q(V_O-V_P)=-3\cdot 10^{-6}\cdot(5250-7200)=5{,}85\cdot 10^{-3}\,J$$

Trabajo positivo, realizado por el campo: estamos desplazando una carga positiva hacia potenciales menores, la estamos alejando de cargas positivas.

2010-Junio-Coincidentes

A. Problema 2.-



Realizamos un diagrama en el que representamos posiciones, vectores r que van de carga a punto donde vamos a calcular el campo, y vectores campo. Tomamos el origen de coordenadas en el punto medio entre los dos vértices que tiene cargas, y el eje x en la línea que las une. Llamamos q_1 a la carga situada en x negativas y q_2 a la carga situada en x positivas, y q_3 a la carga a colocar en el origen. Tomamos el lado del triángulo como la unidad (usar valor “a” no modifica el resultado)

a) Cualitativamente se puede ver como en el tercer vértice el campo eléctrico generado por las dos primeras cargas estará dirigido hacia y positivas, y será necesario que la carga a colocar en el origen sea negativa.

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de q_1 al tercer vértice es $0{,}5\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 1 m.

El vector que va de q_2 al tercer vértice es $-0{,}5\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 1 m.

El vector unitario que va de q_3 al tercer vértice es $\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.

$$\vec{E}_T=K\frac{q_1}{1^2}(0{,}5\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})+K\frac{q_2}{1^2}(-0{,}5\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})+K\frac{q_3}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}(\vec{j})=0$$

Las componentes x se cancelan ya que $q_1=q_2$. Para las componentes y

$$0=q_1\frac{\sqrt{3}}{2}+q_2\frac{\sqrt{3}}{2}+q_3\frac{4}{3}\Rightarrow q_3=-q_1\sqrt{3}\frac{3}{4}=-10^{-9}\cdot\sqrt{3}\frac{3}{4}=-1{,}3\cdot10^{-9}C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = 60, cos(α)= 0,5, sen(α)=√3/2 , no es necesario descomponer $\vec{E}_{q3}$, y por simetría se ve que $|\vec{E}_{q1}|=|\vec{E}_{q2}|$ y se cancelan.

$$|\vec{E}_{q1}|=|\vec{E}_{q2}|=K\frac{|q_2|}{1^2}sen60º=K|q_2|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{E}_T=0\Rightarrow|E_{3y}|=2|\vec{E}_{q1}|\Rightarrow 2K|q_2|\frac{\sqrt{3}}{2}=K\frac{|q_3|}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\Rightarrow|q_3|=|q_2|\sqrt{3}\frac{3}{4}=1{,}3\cdot10^{-9}C$$

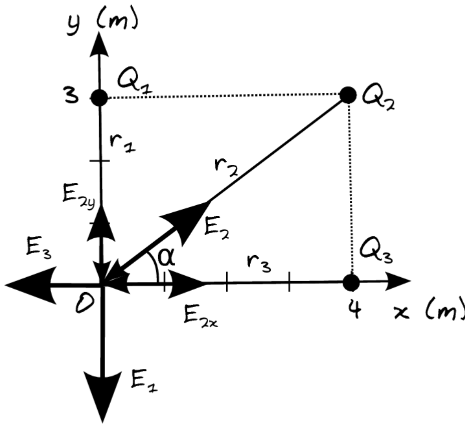
Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

b) $V_T=0=V_{q1}+V_{q2}+V_{q3}=Kq_1/r_1+Kq_2/r_2+Kq_3/r_3$; Como $q_1=q_2$ y $r_1=r_2$

$$\frac{2q_1}{1}=\frac{-q_3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow q_3=-\sqrt{3}q_1=-1{,}73\cdot10^{-9}C$$

2010-Junio-Fase General

B. Problema 2.-



a) Llamamos O al origen de coordenadas.
Utilizando el principio de superposición
$\vec{E}(O)=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$
Realizamos un diagrama donde representamos posiciones, vectores r que van de carga a punto donde vamos a calcular el campo, y vectores campo según el signo de cada carga.
Podemos resolver de dos maneras equivalentes:
A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico
$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
El vector que va de q_1 a O es $-3\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 3 m.
El vector que va de q_2 a O es $-4\vec{i}-3\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{4^2+3^2}=5$ m.
El vector que va de q_3 a O es $-4\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 4 m.

$$\vec{E}(O)=K\frac{q_1}{3^2}(-\vec{j})+K\frac{q_2}{5^2}\frac{(-4\vec{i}-3\vec{j})}{5}+K\frac{q_3}{4^2}(-\vec{i})$$

$$\vec{E}(O)=\frac{-9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-9}}{9}\vec{j}-\frac{9\cdot10^9\cdot(-5\cdot10^{-9})}{125}(4\vec{i}+3\vec{j})-\frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}}{4^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}(O)=-3\vec{j}+\frac{36}{25}\vec{i}+\frac{27}{25}\vec{j}-\frac{9}{4}\vec{i}=\frac{(144-225)}{100}\vec{i}+\frac{(27-75)}{25}\vec{j}=-0{,}81\vec{i}-1{,}92\vec{j}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (3/4) =36,9º, cos(α)= 4/5, sen(α)=3/5 , no es necesario descomponer $\vec{E}_1$ ni $\vec{E}_3$ que se calcularían de la misma manera.

$$|E_{2x}|=K\frac{Q_2}{5^2}\cos 36{,}9^o=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{25}\cdot\frac{4}{5}=1{,}44\,N/C$$

$$|E_{2y}|=K\frac{Q_2}{5^2}sen\,36{,}9^o=\frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{25}\cdot\frac{3}{5}=1{,}08\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

b) $V(O)=K\frac{q_1}{3}+K\frac{q_2}{5}+K\frac{q_3}{4}=\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-9}}{3}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-5\cdot10^{-9})}{5}+\frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}}{4}=9-9+9=9V$

c) $\vec{F}(O)=q\vec{E}(O)=10^{-9}\cdot(-0{,}81\vec{i}-1{,}92\vec{j})=-0{,}81\cdot10^{-9}\vec{i}-1{,}92\cdot10^{-9}\vec{j}\,N$

d) La energía potencial del sistema formado por las tres cargas es la energía asociada a la configuración de dichas cargas. El orden es arbitrario, utilizamos el subíndice:
Inicialmente tenemos q_1 "inmóvil" en (0,3) y traemos desde el infinito q_2 a (4,3), por lo que la colocamos a una distancia de 4 m.

$E_p(2_1)=K\frac{q_1q_2}{r_{1,2}}=\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-9}\cdot(-5\cdot10^{-9})}{4}=-3{,}38\cdot10^{-8}J$ (Negativo, el trabajo asociado sería positivo, realizado por el campo ya que trae una carga negativa hacia otra positiva)

A esta energía hay que añadir la asociada a, teniendo "inmóviles" q_1 y q_2 en las posiciones anteriores, traer desde el infinto q_3 a (4,0), por lo que tendrá energía potencial respecto a q_1 y q_2.

$$E_p(3_{1,2})=K\frac{q_1q_3}{r_{1,3}^2}+K\frac{q_2q_3}{r_{2,3}^2}=\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-9}\cdot4\cdot10^{-9}}{5^2}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-5\cdot10^{-9})\cdot4\cdot10^{-9}}{3^2}=-3{,}84\cdot10^{-8}J$$

$$E_{p\,total}=-3{,}38\cdot10^{-8}-3{,}85\cdot10^{-8}=-7{,}23\cdot10^{-8}J$$

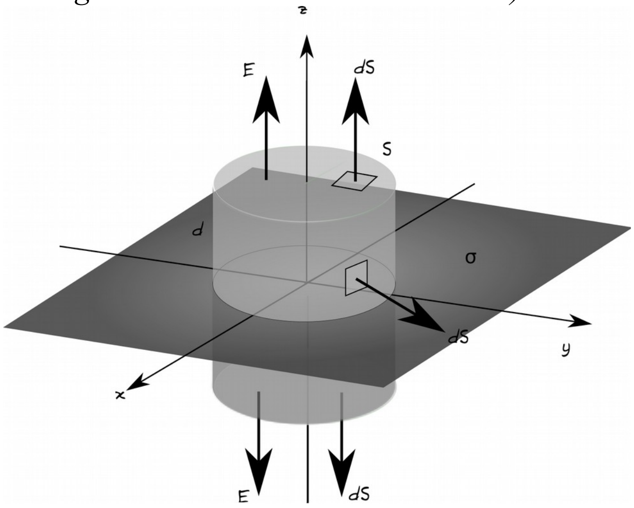
2010-Junio-Fase Específica

B. Cuestión 2.- *(Apartado b Gauss en lámina infinita cargada: 2009-Modelo-B-Problema1)*

a) El teorema de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio. Esto es cierto sea cual sea la forma de dicha superficie cerrada.

Matemáticamente en forma integral

$$\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$



b) Realizando un diagrama en el fijamos la lámina en el plano XY y asumimos carga positiva, podemos comprobar como, al ser la lámina plana e infinita, la contribución del campo en un punto concreto de la carga existente en cualquier diferencial de superficie, siempre genera un campo cuya componente paralela al plano XY siempre puede ser cancelada por la componente paralela al plano XY del campo generado por la carga existente en otro diferencial de superficie situado de manera simétrica respecto a la proyección del punto sobre el plano de carga. Por lo tanto podemos concluir que el campo será perpendicular al plano, en la dirección del eje z, y podemos elegir como superficie gaussiana una superficie cerrada que tenga dos caras planas a una distancia d del plano, conectadas por una superficie perpendicular al plano. Ejemplos podrían ser un prisma o un cilindro: la forma de las secciones planas de la superficie es indiferente.

Aplicando Gauss a esta superficie

$$\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left(\int_{CaraSuperior} \vec{E}\, d\vec{S} + \int_{CaraInferior} \vec{E}\, d\vec{S} + \int_{CarasLaterales} \vec{E}\, d\vec{S} \right) = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Como en las caras laterales el campo y el vector superficie son perpendiculares, su producto vectorial es cero, tomando una superficie de las caras superiores e inferiores muy pequeña por lo que vector campo será uniforme en toda ella, y teniendo en cuenta que por simetría serán iguales en módulo, podemos escribir

$$\Phi_c = 2|\vec{E}| \int_{CaraSuperior} dS = 2|\vec{E}| S = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$ Para calcular la carga encerrada, como $\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma S$

Sustituyendo $2|\vec{E}| S = \sigma \frac{S}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

En esta expresión es notable que el campo no depende de la distancia a la que estemos de la lámina: si estamos muy cerca las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son más intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen menor componente perpendicular a la lámina, mientras que si estamos muy lejos, las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son menos intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen mayor componente perpendicular a la lámina.

2010-Modelo

A. Problema 2.-

Solución 100% idéntica a 2007-Septiembre-B-Problema 2.

2009-Septiembre

Cuestión 4.-

a) Según el teorema de Gauss $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$.

Tomamos como superficie una esfera centrada en el centro de la superficie esférica y de radio r > R. Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso

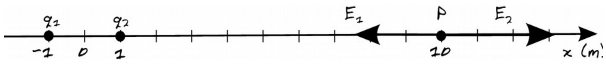
$$|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=K\frac{Q}{r^2}$$

La expresión es la misma que se obtendría para una carga puntual utilizando la ley de Coulomb.

b) $$\frac{|E(\vec{r}_1)|}{|E(\vec{r}_2)|}=\frac{K\frac{Q}{r_1^2}}{K\frac{Q}{r_2^2}}=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\left(\frac{3R}{2R}\right)^2=\frac{9}{4}=2{,}25$$

2009-Junio

A. Problema 2.-



a) Llamamos q_1 a la carga en (-1,0), q_2 a la carga en (1,0) y P al punto (10,0)

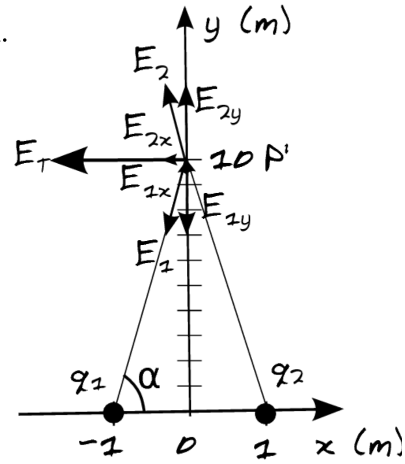
Utilizando el principio de superposición $\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

El vector que va de q_1 a P es $11\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 11 m.

El vector que va de q_2 a P es $9\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 9 m.

$$\vec{E}(P)=K\frac{q_1}{11^2}\vec{i}+K\frac{q_2}{9^2}\vec{i}=\frac{-9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}}{11^2}\vec{i}+\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}}{9^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}(P)=(-223{,}14+333{,}33)\vec{i}=110{,}19\vec{i}\ N/C$$



b) Llamamos P' al punto (10,0). Por simetría podemos ver que las componentes y del campo se cancelarán. Realizamos un diagrama (no a escala para poder distinguir mejor los componentes).

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de q_1 a P' es $\vec{i}+10\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+10^2}=\sqrt{101}$ m.

El vector que va de q_2 a P' es $-\vec{i}+10\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+10^2}=\sqrt{101}$ m.

$$\vec{E}(P')=\frac{-9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}}{101}\frac{(\vec{i}+10\vec{j})}{\sqrt{101}}+\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}}{101}\frac{(-\vec{i}+10\vec{j})}{\sqrt{101}}$$

$$\vec{E}(P')=-26{,}6\vec{i}-260\vec{j}-26{,}6\vec{i}+260\vec{j}=-53{,}2\vec{i}\ N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (10/1) =84,3º, cos(α)= $\frac{1}{\sqrt{101}}$, sen(α)= $\frac{10}{\sqrt{101}}$, y por simetría $|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}|$ y el campo total tendrá un módulo suma de ambos

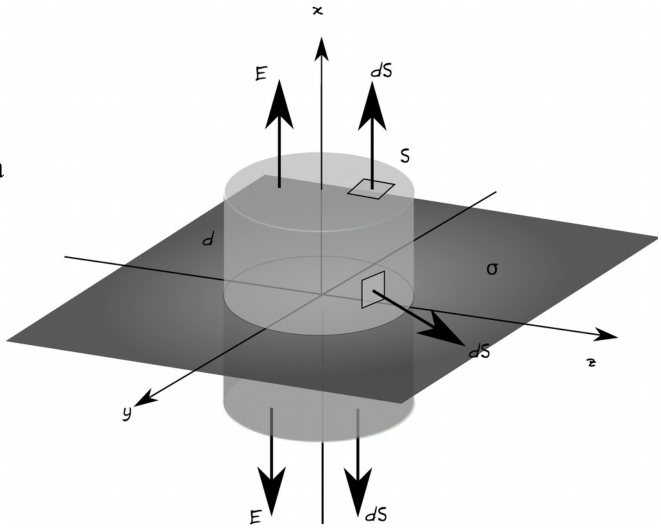
$$|E_{1x}(P')|=K\frac{q_1}{101}\cos 84{,}9^o=\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}}{101}\cdot\frac{1}{\sqrt{101}}=26{,}6\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado

$$\vec{E}(P')=-2\cdot 26{,}6\vec{i}=-53{,}2\vec{i}\ N/C$$

2009-Modelo

B. Problema 1.-



a) Realizando un diagrama en el fijamos la lámina en el plano YZ siendo la carga positiva, podemos comprobar como, al ser la lámina plana e infinita, la contribución del campo en un punto concreto de la carga existente en cualquier diferencial de superficie, siempre genera un campo cuya componente paralela al plano YZ siempre puede ser cancelada por la componente paralela al plano YZ del campo generado por la carga existente en otro diferencial de superficie situado de manera simétrica respecto a la proyección del punto sobre el plano de carga.
Por lo tanto podemos concluir que el campo será perpendicular al plano, en la dirección del eje x, y podemos elegir como superficie gaussiana una superficie cerrada que tenga dos caras planas a una distancia d del plano, conectadas por una superficie perpendicular al plano. Ejemplos podrían ser un prisma o un cilindro: la forma de las secciones planas de la superficie es indiferente. Aplicando Gauss a esta superficie

$$\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=(\int_{CaraSuperior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{CaraInferior}\vec{E}\,d\vec{S}+\int_{CarasLaterales}\vec{E}\,d\vec{S})=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

Como en las caras laterales el campo y el vector superficie son perpendiculares, su producto vectorial es cero, tomando una superficie de las caras superiores e inferiores muy pequeña por lo que vector campo será uniforme en toda ella, y teniendo en cuenta que por simetría serán iguales en módulo, podemos escribir

$$\Phi_c=2|\vec{E}|\int_{CaraSuperior}dS=2|\vec{E}|S=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$ Para calcular la carga encerrada, como $\sigma=\frac{Q}{S}\Rightarrow Q=\sigma S$

Sustituyendo $2|\vec{E}|S=\sigma\frac{S}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

En esta expresión es notable que el campo no depende de la distancia a la que estemos de la lámina: si estamos muy cerca las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son más intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen menor componente perpendicular a la lámina, mientras que si estamos muy lejos, las componentes perpendiculares de los puntos de la placa cercanos son menos intensas, pero las contribuciones de los puntos lejanos tienen mayor componente perpendicular a la lámina.
De acuerdo al diagrama, para los dos puntos indicados en el enunciado

$$\vec{E}(1,0,0)=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{10^{-6}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{12}}\vec{i}=5{,}65\cdot 10^4\vec{i}\ N/C$$

$$\vec{E}(-1,0,0)=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})=-5{,}65\cdot 10^4\vec{i}\ N/C$$

b) Llamamos P al punto (-2,0,0). Utilizando el principio de superposición, el campo en P será la suma de los campos debidos a ambas distribuciones de carga. Como la expresión del campo deducida en apartado a no depende de la distancia en la superficie, sabemos que el campo en P será el mismo que en (-1,0,0), ya calculado. No sabemos si la distribución es de carga positiva o negativa: ponemos sentido de campo generado como si fuera positiva, y luego revisamos

$$\vec{E}_{total}(P)=\vec{E}_{plano\,x=0}(P)+\vec{E}_{plano\,x=3}(P)\Rightarrow 10^4\vec{i}=-5{,}65\cdot 10^4\vec{i}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

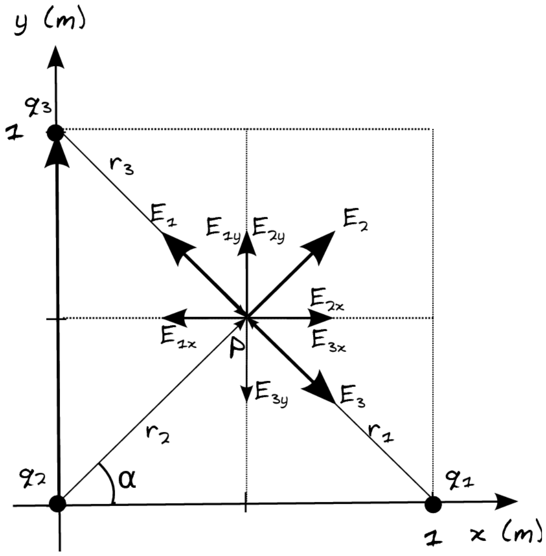
$$\sigma_2=-(10^4+5{,}65\cdot 10^4)\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}=-1{,}18\cdot 10^{-6}\ C/m^2$$

La segunda distribución superficial está cargada negativamente, ya que el campo final está dirigido en dirección opuesta al que genera solo la primera distribución, luego el sentido del campo debe ser haca adentro de la segunda lámina, y estará cargada negativamente.

2008-Septiembre

Cuestión 3.- *(Similar a 2001-Junio-B. Problema 2.)*

a) La elección de los tres vértices es arbitraria y la colocación sobre ejes es arbitraria, pero es necesario elegir una para dar el resultado como vector. Colocamos el cuadrado de forma que los tres vértices con cargas queden sobre los ejes x e y, uno de ellos en el origen. Llamamos q_1 a la carga en (1,0), q_2 a la carga en (0,0), q_3 a la carga en (0,1) y P al punto central (0,5, 0,5)



Utilizando el principio de superposición

$$\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

Representado en un diagrama las cargas, los vectores r que van de la carga al punto central donde queremos calcular el campo, y los vectores campo según el signo de las cargas, vemos que el campo generado por las cargas en vértices opuestos (q_1 y q_3), al tener mismo signo y estar a la misma distancia, se cancelan, por lo que podríamos calcular sólo el campo asociado a q_2.

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

La distancia de las tres cargas a P es la misma, $\sqrt{0,5^2+0,5^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$ m.

El vector que va de q_1 a P es $-0,5\vec{i}+0,5\vec{j}$

El vector que va de q_2 a P es y $0,5\vec{i}+0,5\vec{j}$

El vector que va de q_3 a P es y $0,5\vec{i}-0,5\vec{j}$. Sutituyendo (se puede ver como $r^2=0,5$)

$$\vec{E}(P)=K\frac{q_1}{0,5}\frac{(-0,5\vec{i}+0,5\vec{j})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+K\frac{q_2}{0,5}\frac{(0,5\vec{i}+0,5\vec{j})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+K\frac{q_3}{0,5}\frac{(0,5\vec{i}-0,5\vec{j})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$Como\ q_1=q_2=q_3$$

$$\vec{E}(P)=K\,q_1\sqrt{2}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}-\vec{j})=9\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-9}\sqrt{2}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\vec{E}(P)=90\sqrt{2}\,\vec{i}+90\sqrt{2}\,\vec{j}=127,28\,\vec{i}+127,28\,\vec{j}\ N/C$$

$$|\vec{E}(P)|=\sqrt{(90\sqrt{2})^2+(90\sqrt{2})^2}=180\ N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (1) =45º, cos(α)= sen(α)= $\frac{0,5}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, y

$|\vec{E}_{2x}|=|\vec{E}_{2y}|$ ya que el ángulo es de 45º.

$$|E_{2x}(P')|=K\frac{q_2}{0,5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{9\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-9}}{0,5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=127,28\ N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.

Nota: Otra posible elección de ejes hubiera sido plantear eje x ó y directamente en la diagonal del cuadrado en la que falta la carga, para que el campo resultante no tuviera componentes.

b) Utilizando superposición, y como las tres cargas son iguales y están a la misma distancia

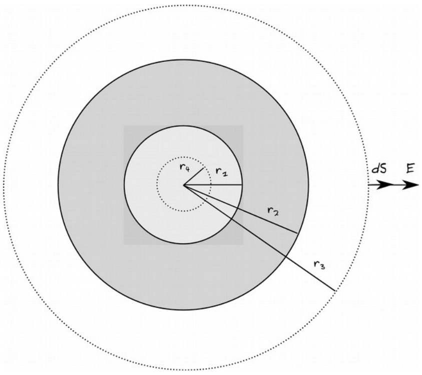
$$V(P)=3K\frac{q_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\cdot9\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-9}\sqrt{2}=381,84V$$

B. Problema 1.-

a) Según el teorema de Gauss $\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$.

Tomamos como superficie una esfera concéntrica con la esfera hueca cargada y de radio r_3=0,06 m que englobará a toda la esfera cargada, por lo que la carga contenida serán + 10 nC.

Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso



$$|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r_3^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}|=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}=\frac{10\cdot 10^{-9}}{4\pi 8,85\cdot 10^{-12}\cdot(0,06)^2}=2,5\cdot 10^4 N/C$$

b) Tomamos como superficie una esfera concéntrica con la esfera hueca cargada y de radio r_4=0,01 m que quedará dentro del hueco de la esfera, por lo que la carga contenida será nula. Por lo tanto, la intensidad de campo eléctrico en su interior será nula, $|\vec{E}(r=0,01\,m)|=0\,N/C$.

2008-Junio

A. Problema 1.-

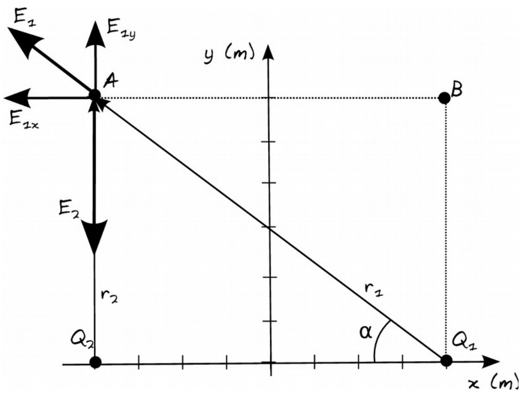
a) La distancia de Q_1 a A es $\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$ m.

La distancia de Q_2 a A es $\sqrt{(-2+2)^2+(3-0)^2}=3$ m.

Utilizamos el principio de superposición:

$$V(A)=V_1(A)+V_2(A)=K\frac{Q_1}{r_{1,A}}+K\frac{Q_2}{r_{2,A}}$$

$$V(A)=9\cdot 10^9\cdot\left(\frac{12,5\cdot 10^{-9}}{5}-\frac{2,7\cdot 10^{-9}}{3}\right)=14,4\,V$$



b) Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$\vec{E}_1(A)=K\frac{Q_1}{r_{1,A}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot 12,5\cdot 10^{-9}}{5^2}\frac{(-4\vec{i}+3\vec{j})}{5}$$

$$\vec{E}_1(A)=-3,6\vec{i}+2,7\vec{j}\,N/C$$

$$\vec{E}_2(A)=K\frac{Q_2}{r_{2,A}^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^9\cdot(-2,7\cdot 10^{-9})}{3^2}\vec{j}=-2,7\vec{j}\,N/C$$

$$\vec{E}_T(A)=\vec{E}_1(A)+\vec{E}_2(A)=-3,6\vec{i}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (3/4) =36,87º, cos(α)= 4/5=0,8, y sen(α)= 3/5=0,6, y no es necesario descomponer $\vec{E}_2$.

$$|\vec{E}_{1x}(A)|=K\frac{q_1}{5^2}\cos\alpha=\frac{9\cdot 10^9\cdot 12,5\cdot 10^{-9}}{25}\cdot\frac{4}{5}=3,6\,N/C$$

$$|\vec{E}_{1y}(A)|=K\frac{q_1}{5^2}sen\,\alpha=\frac{9\cdot 10^9\cdot 12,5\cdot 10^{-9}}{25}\cdot\frac{3}{5}=2,7\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.

c) $V(B)=V_1(B)+V_2(B)=K\frac{Q_1}{r_{1,B}}+K\frac{Q_2}{r_{2,B}}=9\cdot 10^9\cdot\left(\frac{12,5\cdot 10^{-9}}{3}-\frac{2,7\cdot 10^{-9}}{5}\right)=32,64\,V$

$$W_{A\to B}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V(B)-V(A))=-(-2\cdot 1,6\cdot 10^{-19})\cdot(32,64-14,4)=+5,84\cdot 10^{-18}\,J$$

El trabajo es positivo, luego es a favor del campo, ya que es una carga negativa y se desplaza hacia potenciales mayores.

d) $\vec{a}(A)=\frac{\vec{F}(A)}{m}=\frac{q\vec{E}(A)}{m}=\frac{-2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot(-3{,}6\,\vec{i})}{3{,}15\cdot 10^{-26}}=3{,}66\cdot 10^{7}\vec{i}\; m/s^2$

Cuestión 4.-

a) El teorema de Gauss indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio. Esto es cierto sea cual sea la forma de dicha superficie cerrada.

Matemáticamente en forma integral $\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$

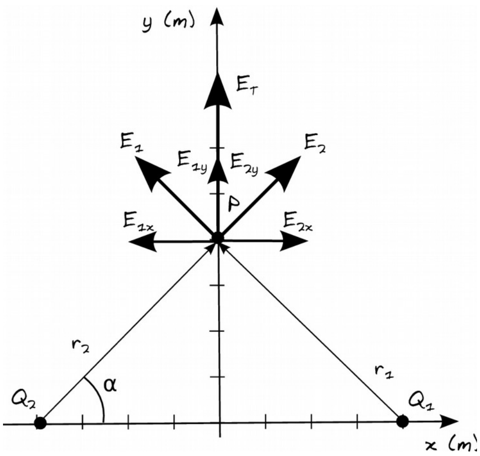
b) Tomamos como superficie una esfera centrada en la carga. Utilizando la simetría esférica que nos indica que el campo siempre será radial y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, y la fórmula de superficie de la esfera, podemos plantear el teorema de Gauss en este caso

$$|\vec{E}|\oint_S d\vec{S}=|\vec{E}|\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow|\vec{E}|=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=K\frac{Q}{r^2}$$

La expresión es la ley de Coulomb.

2007-Septiembre

B. Problema 2.-



a) Llamamos P al punto (0,1). Utilizando el principio de superposición $\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

Realizamos un diagrama (muy similar a 2007-Junio-B-Problema 2) en el que podemos ver como las cargas deben ser positivas e iguales para que se cancelen las componentes x y sólo quede componente y.

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de Q_1 a P es $\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{2}m$

El vector que va de Q_2 a P es $\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{2}m$

$$\vec{E}(P)=2\cdot 10^5\vec{j}=K\frac{Q_1}{2}\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}+K\frac{Q_2}{2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}=K\frac{(-Q_1+Q_2)}{2\sqrt{2}}\vec{i}+K\frac{(2Q_2)}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

Igualando componentes

$$Componentes\,x:0=-Q_1+Q_2\Rightarrow Q_1=Q_2$$

$$Componentes\,y:2\cdot 10^5=K\frac{Q_2}{\sqrt{2}}\Rightarrow Q_2=\frac{2\cdot 10^5\sqrt{2}}{9\cdot 10^9}=3{,}14\cdot 10^{-5}C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (1) =45º, cos(α)= sen(α)= $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por ser el ángulo de 45º tendremos que $|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{1y}|$ y que $|\vec{E}_{2x}|=|\vec{E}_{2y}|$

Utilizando las componentes según el diagrama, llegamos a las mismas ecuaciones y solución.

$$|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}|\Rightarrow Q_1=Q_2 \quad ; \quad |\vec{E}_T|=2|\vec{E}_{1y}|$$

b) Llamamos P' al punto (2,0), y volvemos a utilizar el principio de superposición para potenciales

La distancia entre Q_1 y P' es de 1 m.

La distancia entre Q_2 y P' es de 3 m.

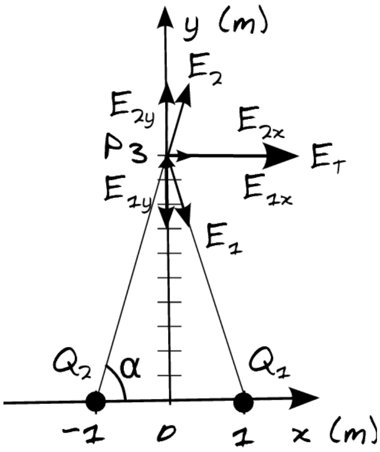
$V_{total}(P')=0=K\frac{Q_1}{1}+K\frac{Q_2}{3}\Rightarrow Q_1=\frac{-Q_2}{3}\Rightarrow\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{-1}{3}$ Las cargas deben tener signo opuesto.

2007-Junio

B. Problema 2.-

a) Llamamos Q_1 a la carga negativa en (1,0), Q_2 a la carga positiva en (-1,0), y P al punto (0,3)
Utilizando el principio de superposición $\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2$.
Realizamos un diagrama en el que representamos los vectores campo según el signo de las cargas y vemos como por simetría se cancelan componentes y y sólo tendremos componente x positiva.
Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$



y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de Q_1 a P es y $-\vec{i}+3\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ m.
El vector que va de Q_2 a P es $\vec{i}+3\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ m.

$$\vec{E}(P)=K\frac{Q_1}{10}\frac{(-\vec{i}+3\vec{j})}{\sqrt{10}}+K\frac{Q_2}{10}\frac{(\vec{i}+3\vec{j})}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{E}(P)=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{10\sqrt{10}}(2\vec{i})=\frac{18\cdot10^2}{\sqrt{10}}\vec{i}=5{,}69\cdot10^2\vec{i}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (3) =71,56º, cos(α)= $\frac{1}{\sqrt{10}}$, sen(α)= $\frac{3}{\sqrt{10}}$. Por simetría tendremos que $|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}|$ y que $|\vec{E}_{1y}|=|\vec{E}_{2y}|$

$$|\vec{E}_{1x}(P)|=K\frac{Q_1}{10}\cos\alpha=\frac{9\cdot10^9\cdot(-10^{-6})}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=2{,}85\cdot10^2\,N/C$$

$$|\vec{E}_{1y}(P)|=K\frac{Q_1}{10}sen\alpha=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=8{,}54\cdot10^2\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.
b) Llamamos P' a un punto (0,y) genérico del eje y.
La distancia de cualquiera de las dos cargas a ese punto P' es $\sqrt{1^2+y^2}$ m, y como las cargas tienen mismo módulo pero signo opuesto, el potencial total es nulo.

$$V(P')=K\frac{Q_1}{\sqrt{1+y^2}}+K\frac{Q_2}{\sqrt{1+y^2}}=0\,V$$

c) Llamamos P'' al punto (3,0)
El vector que va de Q_1 a P es y $2\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 2 m.
El vector que va de Q_2 a P'' es $4\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 4 m.

$$\vec{E}(P'')=K\frac{Q_1}{2^2}\vec{i}+K\frac{Q_2}{4^2}\vec{i}=9\cdot10^9\cdot10^{-6}(\frac{1}{16}-\frac{1}{9})\vec{i}=-4{,}38\cdot10^2\vec{i}\,N/C$$

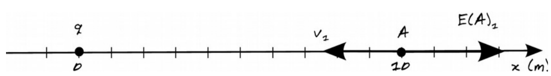
d) $V(P'')=K\frac{Q_1}{2}+K\frac{Q_2}{4}=9\cdot10^9\cdot10^{-6}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=-2{,}25\cdot10^3\,V$

2007-Modelo

B. Problema 1.-

a) Como ambas cargas son positivas, el campo en A estará dirigido hacia x positivas. El vector que va de la carga al punto A es $10\vec{i}$ y la distancia entre ellos es 10 m.

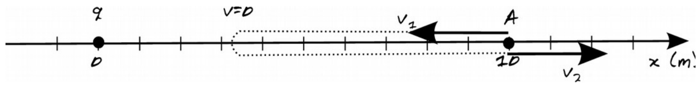
$$\vec{E}(A)=K\frac{q}{10^2}\vec{i}=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{10^2}\vec{i}=180\vec{i}\,N/C$$



b) $V(A)=K\frac{q}{10}=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{10}=1800\,V$

$$E_p(A)=K\frac{q\,q_p}{10}=V\,q_p=1800\cdot1{,}6\cdot10^{-19}=2{,}88\cdot10^{-16}\,J$$

c) $E_c=\frac{1}{2}m v^2=0{,}5\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1000^2=8{,}35\cdot 10^{-22}\ J$



d) Es importante entender la situación física cualitativamente: una carga positiva (el protón) en movimiento se dirige hacia otra carga positiva inmóvil en el origen de coordenada, por lo que habrá una fuerza repulsiva que la frenará y la detendrá antes de llegar, y luego la volverá a acelerar en sentido opuesto al que llegaba. Como sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva, y como en A, sea cual sea su sentido de movimiento tiene la misma cantidad de energía potencial, en el regreso también tendrá la misma cantidad de energía cinética, pero teniendo la velocidad sentido opuesto.

$$\Delta\vec{p}(A)=\Delta m\vec{v}(A)=m(\vec{v}(A)_{final}-\vec{v}(A)_{inicial})=1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot(1000\,\vec{i}-(-1000\,\vec{i}))=3{,}34\cdot 10^{-24}\,kg\,m/s$$

Nota: aunque no se pide, es un ejercicio interesante calcular a qué distancia x del origen está el punto P en el que se detiene: será el punto en el que la energía cinética es nula, toda ha pasado a energía potencial.

$$E_p(P)=E_c(A)+E_p(A)\Rightarrow K\frac{q q_p}{x}=8{,}35\cdot 10^{-22}+2{,}88\cdot 10^{-16}$$

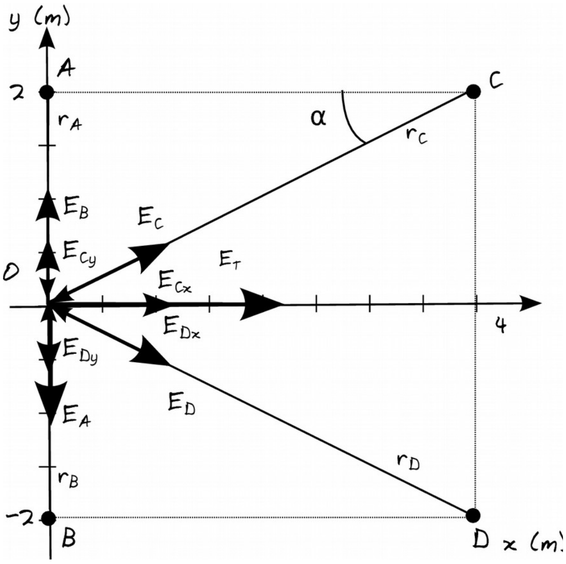
$$x=\frac{9\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{8{,}35\cdot 10^{-22}+2{,}88\cdot 10^{-16}}=9{,}999971\,m$$

Se puede ver como prácticamente no se llega a acercar nada al origen.

2006-Septiembre

B. Problema 2.-

a) Llamamos O al origen de coordenadas. Utilizando el principio de superposición $\vec{E}(O)=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$. Realizamos un diagrama, donde por simetría vemos que se cancelarán componentes y y sólo tendremos componente x.



Podemos ignorar el campo generado en el origen de coordenadas por las cargas en A y B.

Vemos que las cargas situadas en C y D deben ser iguales y negativas para que el campo esté en el eje x dirigido hacia x positivas.

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de A a O es $-2\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 2 m.

El vector que va de B a O es $2\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 2 m.

El vector que va de C a O es $-4\vec{i}-2\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ m.

El vector que va de D a O es $-4\vec{i}+2\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ m.

$$\vec{E}(O)=K\frac{q_A}{2^2}(-\vec{j})+K\frac{q_B}{2^2}(\vec{j})+K\frac{q_C}{20}\frac{(-4\vec{i}-2\vec{j})}{\sqrt{20}}+K\frac{q_D}{20}\frac{(-4\vec{i}+2\vec{j})}{\sqrt{20}}$$

Como $q_A=q_B$ y $q_C=q_D=Q$

$$\vec{E}(O)=4\cdot 10^3\vec{i}=K\frac{Q}{20\sqrt{20}}(-8)\vec{i}\Rightarrow Q=\frac{4\cdot 10^3\cdot 20\sqrt{20}}{9\cdot 10^9\cdot(-8)}=-4{,}97\cdot 10^{-6}\,C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (2/4) =26,57º, cos(α)= $\frac{2}{\sqrt{20}}$, sen(α)= $\frac{4}{\sqrt{20}}$. Por simetría tendremos que $|\vec{E}_A|=|\vec{E}_B|$ y que $|\vec{E}_{Cy}|=|\vec{E}_{Dy}|$ y $|\vec{E}_{Cx}|=|\vec{E}_{Dx}|$, por lo que tomando signos del diagrama podemos plantear y resolver, llegando al mismo resultado tras tener en cuenta el razonamiento cualitativo de que Q es negativa.

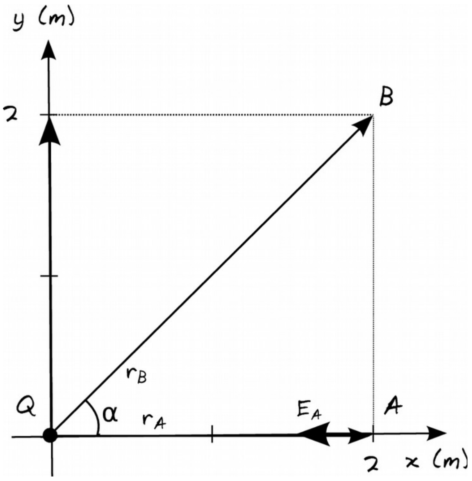
$$|\vec{E}(O)|=2|\vec{E}_{Cx}(O)|\Rightarrow 4\cdot 10^3=2K\frac{|Q|}{10}\cos\alpha=2\cdot 9\cdot 10^9\frac{|Q|}{20}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}}\Rightarrow|Q|=\frac{4\cdot 10^3\cdot 20\sqrt{20}}{9\cdot 10^9\cdot 8}=4{,}97\cdot 10^{-6}C$$

b) Utilizando el principio de superposición y la simetría (contribución de q_A igual a la de q_B, y de q_C igual a q_D al tener mismos valores entre ellas y estar a la misma distancia.

$$V(O)=2K\frac{q_A}{2}+2K\frac{Q}{\sqrt{20}}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot(\frac{3\cdot 10^{-6}}{2}+\frac{-4{,}97\cdot 10^{-6}}{\sqrt{20}})=6996\,V$$

2006-Junio

Cuestión 3.-



a)

$$V(A)=K\frac{Q}{x}=-120$$

$$\vec{E}(A)=K\frac{Q}{x^2}\vec{i}=-80\,\vec{i}$$

$$K\frac{Q}{x^2}=-80\Rightarrow Q\,es\,negativa$$

$$Despejando\,de\,la\,primera\,ecuación\,KQ=-120x$$

$$y\,sustituyendo\,en\,la\,segunda$$

$$\frac{-120x}{x^2}=-80\Rightarrow x=\frac{120}{80}=\frac{3}{2}=1{,}5\,m$$

$$Q=\frac{-120x}{K}=\frac{-120\cdot 1{,}5}{9\cdot 10^9}=-2\cdot 10^{-8}C$$

b)

$$W_{B\to A}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V(A)-V(B))$$

$$V(B)=K\frac{Q}{r}=\frac{9\cdot 10^9\cdot(-2\cdot 10^{-8})}{\sqrt{2^2+2^2}}=-63{,}64\,V$$

$$W_{B\to A}=-(-1{,}6\cdot 10^{-19})\cdot(-120-(-63{,}64))=1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot(-56{,}36)=-9\cdot 10^{-18}J$$

El trabajo es negativo, se hace contra el campo: estamos llevando a un potencial menor (número negativo de valor absoluto mayor) una carga negativa. Cualitativamente estamos acercando una carga negativa a otra negativa.

Cuestión 5.-

a)

$$p=m v\Rightarrow v=\frac{p}{m}=\frac{10^{-21}}{1{,}67\cdot 10^{-27}}=5{,}99\cdot 10^5 m/s$$

$$Utilizamos\,la\,conservación\,de\,energía\,,toda\,la\,E_p\,pasa\,a\,E_c$$

$$qV=\frac{1}{2}m v^2\Rightarrow V=\frac{m v^2}{2q}=\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot(5{,}99\cdot 10^5)^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}=1872{,}5\,V$$

Nota: por separar apartado a conceptualmente de campo eléctrico de apartado b conceptualmente de física moderna, simplemente mencionar que esta velocidad no es relativista (es mucho menor que la velocidad de la luz), para recordar que de manera global hay que tenerlo presente.

2005-Septiembre

Cuestión 5.-

a) Utilizamos la conservación de energía, toda la E_p pasa a E_c; al acelerar el protón mediante una diferencia de potencial, este gana energía cinética.

$$E_p=qV=1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10=1{,}6\cdot 10^{-18}J\cdot\frac{1\,eV}{1{,}6\cdot 10^{-19}J}=10\,eV$$

$$qV=\frac{1}{2}m v^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2qV}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}{1{,}67\cdot 10^{-27}}}=4{,}38\cdot 10^4 m/s$$

Nota: por separar apartado a conceptualmente de campo eléctrico de apartado b conceptualmente de física moderna, no entramos en este apartado a valorar si esa velocidad es relativista o no, aunque de manera global hay que tenerlo presente, y se menciona en solución apartado b.

2005-Junio

Cuestión 5.-

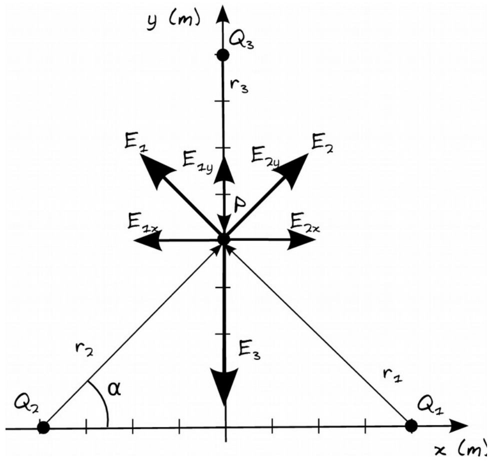
a) Utilizamos la conservación de energía, toda la E_p pasa a E_c; al acelerar el electrón mediante una diferencia de potencial, este gana energía cinética.

$$qV=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2qV}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 50}{9{,}1\cdot 10^{-31}}}=4{,}19\cdot 10^6\, m/s$$

$$\frac{c}{v}=\frac{3\cdot 10^8}{4{,}19\cdot 10^6}=71{,}6 \Rightarrow \frac{v}{c}\approx 0{,}014=1{,}4\,\%$$

Nota: por separar apartado a conceptualmente de campo eléctrico de apartado b conceptualmente de física moderna, no entramos en este apartado a valorar si esa velocidad es relativista o no, aunque de manera global hay que tenerlo presente, y se menciona en solución apartado b.

A. Problema 2.-



a) Llamamos P al punto (0,1). Si la fuerza es nula, lo es para cualquier carga, implicando que el campo también es nulo, y utilizando el principio de superposición $\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$. Por simetría vemos que se cancelarán componentes x del campo generado por Q_1 y Q_2 ya que son iguales y están a la misma distancia, y sólo tendremos componente y.

Cualitativamente en el diagrama se puede ver que la carga Q_3 tiene que ser positiva para el campo generado por ella esté dirigido hacia y negativas y cancele el campo generado por Q_1 y Q_2.

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de Q_1 a P es $-\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m.

El vector que va de Q_2 a P es $\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m.

El vector que va de Q_3 a P es $-\vec{j}$ y la distancia entre ellos es 1 m.

$$\vec{E}(P)=0=K\frac{Q_1}{2}\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}+K\frac{Q_2}{2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}+K\frac{Q_3}{1}(-\vec{j})$$

Igualando componentes

$$Componentes\ x: 0=-K\frac{Q_1}{2\sqrt{2}}+K\frac{Q_2}{2\sqrt{2}}(se\ cumple\ ya\ que\ Q_1=Q_2)$$

$$Componentes\ y: 0=K\frac{Q_1}{2\sqrt{2}}+K\frac{Q_2}{2\sqrt{2}}-KQ_3 \Rightarrow Q_3=\frac{Q_1}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot 10^{-6}C=1{,}41\,\mu C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (1) =45º, cos(α)= sen(α)= $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por ser el ángulo de 45º tendremos que $|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{1y}|$ y que $|\vec{E}_{2x}|=|\vec{E}_{2y}|$

Utilizando las componentes según el diagrama, llegamos a las mismas ecuaciones y solución.

$|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}| \Rightarrow Q_1=Q_2$; $|\vec{E}_T|=2|\vec{E}_{1y}|$

b) Utilizando superposición

$$V(P)=K\frac{Q_1}{\sqrt{2}}+K\frac{Q_2}{\sqrt{2}}+K\frac{Q_3}{1}=9\cdot 10^9\left(\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}+\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cdot 10^{-6}\right)=\frac{54}{\sqrt{2}}\cdot 10^3=3{,}82\cdot 10^4\,V$$

Nota: es importante tener presente que aunque el campo sea nulo, el potencial no tiene por qué serlo.

2005-Modelo

Cuestión 3.-

a) Utilizando el principio de superposición

$$\vec{E}(P)=\vec{E}_A(P)+\vec{E}_B(P)$$

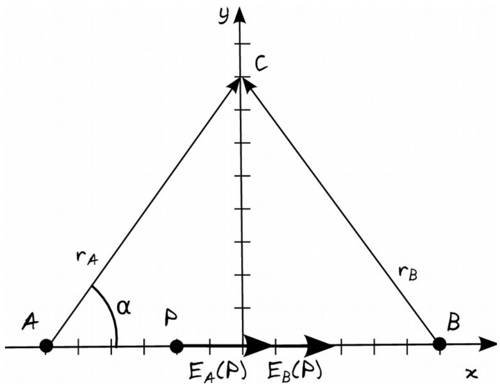
Realizando un diagrama donde representamos los campos según las cargas, vemos que estará dirigido hacia x positivas.

El vector que va de A a P es $0{,}04\vec{i}$

El vector que va de B a P es $-0{,}08\vec{i}$

$$\vec{E}(P)=\frac{9\cdot10^9\cdot6\cdot10^{-6}}{0{,}04^2}\vec{i}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-6\cdot10^{-6})}{0{,}08^2}(-\vec{i})$$

$$\vec{E}(P)=54\cdot10^3\left(\frac{1}{0{,}0016}+\frac{1}{0{,}0064}\right)\vec{i}=4{,}22\cdot10^7\vec{i}\ N/C$$



b) Utilizamos el principio de superposición

La distancia de A a C y de B a C es $\sqrt{0{,}06^2+0{,}08^2}=0{,}1$ m

$$V(C)=\frac{9\cdot10^9\cdot6\cdot10^{-6}}{0{,}1}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-6\cdot10^{-6})}{0{,}1}=0\,V$$

Cualitativamente podemos ver que es nulo porque ambas cargas están a la misma distancia y tienen mismo módulo pero signo opuesto. De hecho el potencial será cero en toda la mediatriz.

2004-Septiembre

B. Problema 2.-

a) Realizamos un diagrama representando los campos en función de la carga, y por simetría podemos ver que las componentes x se cancelarán y sólo tendremos componente y negativa.

Utilizando superposición

$$\vec{E}(A)=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

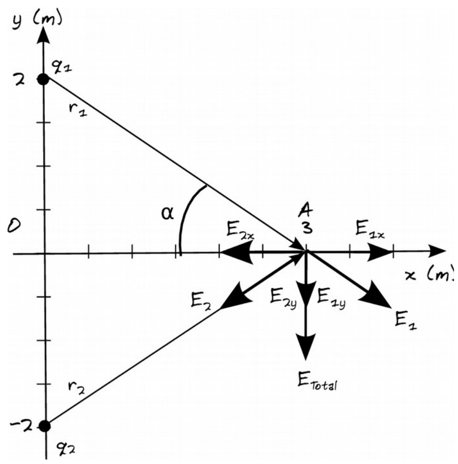
La distancia de q_1 a A y de q_2 a B es de $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ m

El vector que va de q_1 a A es $3\vec{i}-2\vec{j}$

El vector que va de q_2 a A es $3\vec{i}+2\vec{j}$

$$\vec{E}(A)=K\frac{q_1}{13}\frac{(3\vec{i}-2\vec{j})}{\sqrt{13}}+K\frac{q_2}{13}\frac{(3\vec{i}+2\vec{j})}{\sqrt{13}}$$

$$\vec{E}(A)=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{13\sqrt{13}}(-4\vec{j})=-1536\vec{j}\ N/C$$



B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (2/3) =33,69º, cos(α)= $\frac{3}{\sqrt{13}}$, sen(α)= $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Por ser las cargas iguales en módulo y estar ambas a la misma distancia del punto A tendremos que

$$|\vec{E}_{1x}|=|\vec{E}_{2x}|\ ,\quad |\vec{E}_{1y}|=|\vec{E}_{2y}|\ ,\quad |\vec{E}|=2|\vec{E}_{1x}|$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.

b) Utilizando superposición

$$V(A)=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{\sqrt{13}}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-2\cdot10^{-6})}{\sqrt{13}}=0\,V$$

Cualitativamente podemos ver que como ambas están a la misma distancia, tienen el mismo módulo pero signo puesto, el potencial es nulo

Llamamos O al origen de coordenadas

$W_{A\to O}=-\Delta E_p=-q\Delta V=-q(V(O)-V(A))$

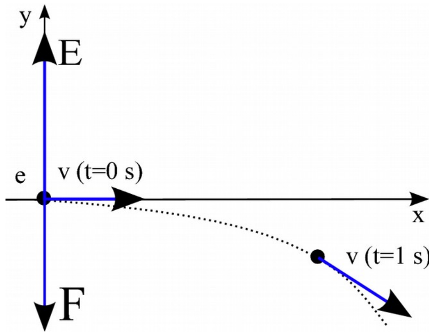
$V(0)=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{2}+\frac{9\cdot10^9\cdot(-2\cdot10^{-6})}{2}=0\,V$

$W_{A\to O}=-3\cdot10^{-6}(0-0)=0\,J$

El trabajo es nulo porque ambos puntos están al mismo potencial.

2004-Junio

A. Problema 2.-



a) Utilizando el sistema de coordenadas indicado

$\vec{E}=6\cdot10^{-6}\vec{j}$

Como $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}\Rightarrow\vec{F}=q\vec{E}=-1{,}6\cdot10^{-19}\cdot6\cdot10^{-6}\vec{j}=-9{,}6\cdot10^{-25}\vec{j}\,N$

En componentes cartesianas, $F_x = 0$ y $F_y=-9{,}6\cdot10^{-25}$ N

b) Hacemos un planteamiento dinámico y cinemático

En el eje de las x la aceleración es nula, describe un MRU y la velocidad es constante. $\vec{v}_x=3\cdot10^5\vec{i}\,m/s$

En el eje de las y la aceleración es constante $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{-9{,}6\cdot10^{-25}\vec{j}}{9{,}1\cdot10^{-31}}=-1{,}05\cdot10^6\vec{j}\,m/s^2$, describe un MRUA $\vec{v}_y=-1{,}05\cdot10^6\cdot t\,\vec{j}\,m/s$ $\quad\vec{v}=3\cdot10^5\vec{i}-1{,}05\cdot10^6\cdot t\,\vec{j}\,m/s$

$|\vec{v}(t=1\,s)|=\sqrt{(3\cdot10^5)^2+(1{,}05\cdot10^6)^2}=1{,}09\cdot10^6\,m/s$

c) $E_c=\frac{1}{2}m|\vec{v}(t=0\,s)|^2=0{,}5\cdot9{,}1\cdot10^{-31}(1{,}09\cdot10^6)^2=5{,}4\cdot10^{-19}\,J$

d) Como sólo actúa la fuerza electromagnética es conservativa, la energía mecánica se conserva: el aumento de energía cinética se produce por una disminución de energía potencial. También se puede utilizar el teorema de las fuerzas vivas: la variación de energía cinética es el trabajo total realizado, y solamente ha realizado trabajo la fuerza conservativa asociada al campo, trabajo que cambiado de signo es la variación de energía potencial.

$\Delta E_c=\frac{1}{2}m(|\vec{v}(t=1\,s)|^2-|\vec{v}(t=0\,s)|^2)=0{,}5\cdot9{,}1\cdot10^{-31}((1{,}09\cdot10^6)^2-(3\cdot10^5)^2)=5\cdot10^{-19}\,J$

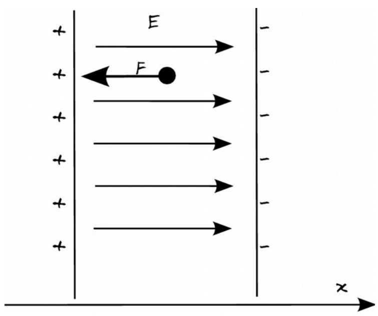
$\Delta E_p=-\Delta E_c=-5\cdot10^{-19}\,J$ El electrón que es una carga negativa ha ido a potenciales mayores, la variación de energía potencial es negativa (aunque la variación de potencial sea positiva)

2004-Modelo

Cuestión 3.-

a) Tomamos un sistema de referencia, de modo que el vector campo eléctrico está dirigido hacia x positivas

$\vec{F}=m\cdot\vec{a}=q\vec{E}\Rightarrow\vec{a}=q\frac{\vec{E}}{m}=\frac{(-1{,}6\cdot10^{-19})\cdot6\cdot10^4\vec{i}}{9{,}1\cdot10^{-31}}=-1{,}05\cdot10^{16}\vec{i}\,m/s^2$



Nota: si se pide aceleración, hay que dar como respuesta un vector, ya que es una magnitud vectorial. Se puede indicar el vector cualitativamente ("misma dirección y sentido opuesto que el campo por ser carga negativa"), aunque es más claro matemáticamente y de ahí la necesidad de diagrama y elegir sistema de referencia.

b) Se trata de un problema de cinemática, que resolvemos de manera escalar en el eje x. Como no nos interesa el tiempo que tarda en llegar y la aceleración es constante. Aunque resolvamos escalarmente, de nuevo la velocidad es una magnitud vectorial, de modo que damos como respuesta un vector.

$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\Rightarrow v=\sqrt{2ax}=\sqrt{2\cdot1{,}05\cdot10^{16}\cdot0{,}025}=2{,}29\cdot10^7\,m/s\Rightarrow\vec{v}=-2{,}29\cdot10^7\vec{i}\,m/s$

Nota: Aunque este problema se incluya en este desglose dentro del bloque de campo eléctrico, siempre hay que tener en cuenta si aparece una velocidad relativista. Esta velocidad es próxima a la velocidad de la luz $\frac{v}{c}=\frac{2{,}29\cdot 10^{7}}{3\cdot 10^{8}}=0{,}076=7{,}6\%$

Comprobamos un posible aumento de masa relativista del electrón

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-0{,}076^2}}=9{,}13\cdot 10^{-31}\,kg$$

Podemos comentar que el último tramo entre las placas, debido al ligero aumento de masa relativista del electrón, la aceleración será algo menor, y llegará con una velocidad ligeramente inferior en módulo a la indicada.

2003-Septiembre

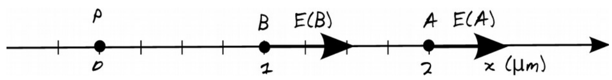
Cuestión 1.-

a) Las superficies equipotenciales de un campo de fuerzas conservativo son las superficies que unen todos los puntos del espacio que tienen el mismo valor de potencial.
b) Las superficies equipotenciales del campo eléctrico creado por una carga puntual son esferas concéntricas con la carga puntual que crea el campo, ya que el potencial creado por una carga puntual tiene la expresión $V=K\frac{Q}{r}$
c) Las líneas de fuerza de un campo conservativo son las líneas tangenciales a la fuerza generada por el campo en un conjunto de puntos del espacio, que al ser la aceleración proporcional a la fuerza muestran la trayectoria que seguiría una partícula que se dejase en reposo. Las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Matemáticamente para el campo eléctrico se puede relacionar campo y potencial mediante $\vec{E}=-grad(V)$
d) El campo de fuerzas magnéticas es no conservativo, ya que:
-El trabajo realizado por el campo para ir de un punto a otro depende de la trayectoria.
-El trabajo realizado por el campo en una trayectoria cerrada no es nulo, sino que depende de las corrientes encerradas en esa trayectoria según la ley de Ampére.
-No es posible definir una función energía potencial que dependa sólo de la posición.

2003-Junio

B. Problema 2.-

a) Llamamos A al punto (2,0)



$$\vec{E}(A)=K\frac{q_p}{r^2}\vec{u}_r=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{(2\cdot 10^{-6})^2}\vec{i}=360\,\vec{i}\,N/C$$

$$V(A)=K\frac{q_p}{r}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\cdot 10^{-6}}=7{,}2\cdot 10^{-4}\,V$$

b) Llamamos B al punto (1,0). Sólo existe la fuerza eléctrica que es conservativa, luego la energía mecánica se conserva, de modo que en B tendremos la misma energía mecánica que en A, punto en el que sólo tenía energía potencial.

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow E_p(A)=E_p(B)+E_c(B)\Rightarrow E_c(B)=E_p(A)-E_p(B)=q_e(V(A)-V(B))$$

$$V(B)=K\frac{q_p}{r}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 9\cdot 10^{9}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{10^{-6}}=1{,}44\cdot 10^{-3}\,V$$

$$E_c(B)=-1{,}6\cdot 10^{-19}(7{,}2\cdot 10^{-4}-1{,}44\cdot 10^{-3})=1{,}15\cdot 10^{-22}\,J$$

También podemos plantear que la variación de energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica, que es la única presente. Las fuerzas están dirigidas hacia x negativas, en la misma dirección que el vector velocidad, luego el trabajo será positivo. Como $W=-\Delta E_p$ quiere decir que la diferencia de energía potencial $\Delta E_p=E_p(B)-E_p(A)$ será negativa.
Si calculamos como resultado intermedio las energías potenciales en cada punto

$$E_p(A)=q\,V(A)=-1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 7{,}2\cdot 10^{-4}=-1{,}15\cdot 10^{-22}\,J$$

$$E_p(B)=q\,V(A)=-1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}44\cdot 10^{-3}=-2{,}30\cdot 10^{-22}\,J$$

Vemos que en B tiene menor energía potencial (número negativo de mayor valor absoluto), y que

$\Delta E_c = W = -\Delta E_p = 1{,}15 \cdot 10^{-22} J$

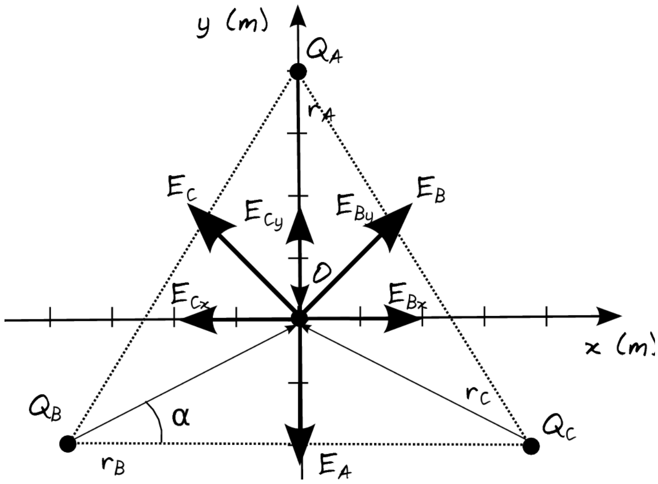
c) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-22}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}59 \cdot 10^4 m/s$

$Vectorialmente\ \vec{v} = -1{,}59 \cdot 10^4 \vec{i}\ m/s$

$\vec{p} = m\vec{v} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (-1{,}59 \cdot 10^4 \vec{i}) = 1{,}44 \cdot 10^{-26} \vec{i}\ kg\ m/s$

2002-Junio

B. Problema 2.-



a) Por la simetría vemos que las componentes x del campo generado por las cargas en B y C que son iguales se cancelarán y sólo tendremos una componente dirigida hacia y positivas, luego la carga en A tendrá que ser positiva.

Utilizando superposición y llamando O al origen de coordenadas $\vec{E}(O) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$

Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

El vector que va de A a O es $-\vec{j}$

El vector que va de B a O es $\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

El vector que va de B a O es $-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

La distancia entre A y O, B y O, y C y O es 2 cm: las tres son iguales ya que es un triángulo equilátero. Es inmediato calcularla entre A y O, y se puede comprobar entre B y O que es $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2\,cm$.

$$\vec{E}(O) = 0 = K\frac{Q_A}{2^2}(-\vec{j}) + K\frac{Q_B}{2^2}\frac{(\sqrt{3} + \vec{j})}{2} + K\frac{Q_C}{2^2}\frac{(-\sqrt{3} + \vec{j})}{2}$$

$$0 = Q_A(-\vec{j}) + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2}(+\vec{j}) + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2}(+\vec{j}) \Rightarrow Q_A = 2 \cdot 10^{-6} C$$

La carga tiene que ser idéntica a las otras dos.

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = $arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$ =30º, cos(α)= $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sen(α)= 1/2=0,5. Por ser las cargas iguales en módulo y estar ambas a la misma distancia del punto A tendremos que

$|\vec{E}_{Bx}| = |\vec{E}_{Cx}|$, $|\vec{E}_{By}| = |\vec{E}_{Cy}|$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, planteamos la misma ecuación y obtenemos el mismo resultado.

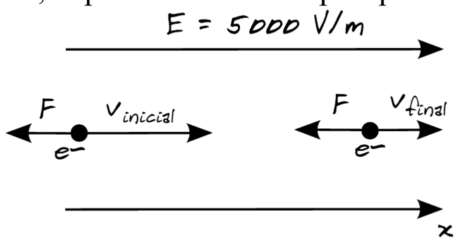
b) Utilizando superposición y teniendo en cuenta que las 3 cargas y distancias son iguales a 2 cm

$$V(P) = 3 \cdot K\frac{Q_A}{2 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2{,}7 \cdot 10^6 V$$

Nota: importante tener presente que aunque el campo sea nulo, el potencial no tiene por qué serlo.

2002-Modelo

A. Problema 2.-



a) Si la velocidad se reduce, el electrón se ha lanzado de manera que está siendo frenado: en la misma dirección del campo. La energía mecánica se conserva (suma de energía potencial eléctrica y cinética, despreciamos la interacción gravitatoria), ya que sólo hay fuerzas conservativas. Por lo tanto toda la pérdida de energía cinética será ganancia de energía potencial.

$\Delta E_p = -\Delta E_c$

Por definición de energía potencial y potencial
$\Delta E_p = q \Delta V$

Como el campo es uniforme $E = \frac{-\Delta V}{\Delta x}$

Tomamos x positivas en la dirección del campo, por lo que Δx > 0 impica que ΔV < 0 y estamos en potenciales mayores (una carga negativa es desplazada hacia potenciales mayores).

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_{final}^2 - v_{inicial}^2) = 0{,}5 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot ((0{,}5 \cdot 10^6)^2 - (2 \cdot 10^6)^2) = -1{,}7 \cdot 10^{-18} J$

Uniendo ambas expresiones

Por lo tanto $\Delta E_p = q E \Delta x = -\Delta E_c \Rightarrow \Delta x = \frac{-\Delta E_c}{q E} = \frac{-1{,}7 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5000} = -2{,}13 \cdot 10^{-3} m$

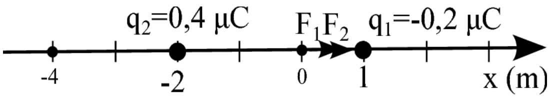
b) La variación de energía potencial es la variación de energía cinética pero con sentido opuesto:
$\Delta E_p = -\Delta E_c = 1{,}7 \cdot 10^{-18} J$

Cualitativamente el electrón está siendo frenado, gana energía potencial, luego está dirigido hacia potenciales mayores, y la diferencia de energía potencial debe ser positiva.

2001-Septiembre

B. Problema 2.-

a) Realizamos un diagrama con las dos cargas en el eje x, donde la posición de q_1 es x_1=1 m y la posición de q_2 es x_2=-2 m.



Utilizando el principio de superposición el potencial creado por ambas cargas es la suma de los potenciales creados por cada una de ellas, por lo que, si tomamos un punto X genérico de coordenada x, que no asumimos situado entre ambas cargas

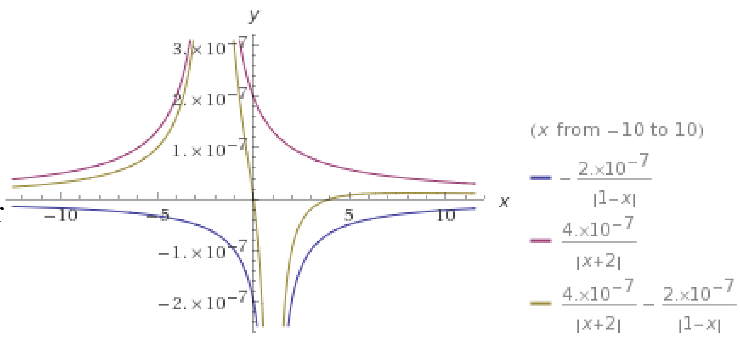
La distancia entre x y x_1 será $|x_1-x|$: puede que x_1 esté situado a la izquierda o a la derecha de X.

La distancia entre x y x_2 será $|x-x_2|$: puede que x_2 esté situado a la izquierda o a la derecha de X

$V=V_1+V_2=Kq_1/r_1 + Kq_2/r_2 =$
$K(-0{,}2 \cdot 10^{-6}/|1-x| + 0{,}4 \cdot 10^{-6}/|x-(-2)|)$

Si igualamos a cero:
$0{,}2 \cdot 10^{-6}/|1-x| = 0{,}4 \cdot 10^{-6}/|x+2|$
$0{,}2 \cdot |x+2| = 0{,}4 \cdot |1-x| \rightarrow$
Dividimos por 0,2 → $|x+2|=2|1-x|$

Para asignar valores debemos contemplar las casuísticas de cada uno de los dos valores absolutos, teniendo en cuenta sus propiedades: |a| =a si a>0 , y |a|=-a si a<0



Generado con WolframAlpha

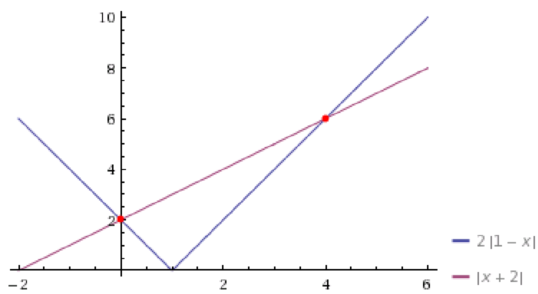
Se incluye representación gráfica de los potenciales individuales, de la suma, y de la ecuación con valores absolutos para aportar claridad.

Se ve que las soluciones son x=0 y x=4, y cualitativamente se puede razonar que son dos puntos, y que debe ser uno entre ambos (ya que el que genera uno es positivo y el otro es negativo), y otro a la derecha de la carga menor (ya que para distancias más próximas a la carga menor el valor será mayor e igualará al valor de potencial generado por la carga mayor)

Lo razonamos matemáticamente:

-Caso 1: (x+2>0 y 1-x>0 → x>-2 y x<1):
puntos X que cumplen ambas condiciones en intervalo (-2,1), que es entre ambas cargas.
x+2=2-2x → 3x=0 → x=0 m → El punto es el origen de coordenadas.

-Caso 2: (x+2>0 y 1-x<0 → x>-2 y x>1): punto X de ambas condiciones en intervalo (1, ∞), a la derecha de ambas cargas.



Generado con WolframAlpha

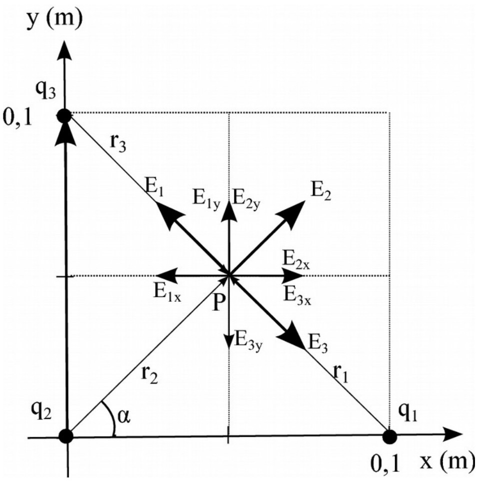
x+2=2(-1+x)=-2+2x → x=4 → El punto está a la derecha
-Caso 3: (x+2<0 y 1-x<0 → x<-2 y x>1): punto X de ambas condiciones no existe
-Caso 4: (x+2<0 y 1-x>0 → x<-2 y x<1): punto X de ambas condiciones en intervalo (∞, -2), a la izquierda de ambas cargas.
-x-2=2(1-x)=2-2x → x=4 m → Sin solución ya que x=4 no está en el intervalo que cumple ambas
Los dos puntos del eje X donde el potencial creado por ambas cargas es nulo son los que tienen coordenadas x=0 m y x=4 m.
b) El origen es uno de los puntos donde según el apartado a) el potencial creado por ambas cargas es nulo. Que el potencial sea nulo no implica que la fuerza total sea nula (tal y como está redactado el enunciado, asumimos que se pide solamente la fuerza total).
Utilizando el principio de superposición, la fuerza será la suma de ambas fuerzas. Sin utilizar vectores ya que están las fuerzas en el eje X, sí tenemos en cuenta el signo para indicar el sentido.
$F=F_1+F_2$
F_1 será positiva ya que q_1 es negativa y q positiva, la fuerza será atractiva hacia q_1, y q_1 está más a la derecha.
F_2 será positiva ya que q_2 es positiva y q positiva, la fuerza será repulsiva desde q_2, y q_2 está más a la izquierda.
$F=K|q_1q|/1^2+K|q_2q|/2^2=9\cdot10^9\cdot0{,}4\cdot10^{-6}\cdot(0{,}2\cdot10^{-6} + 0{,}4\cdot10^{-6}/4)=9\cdot10^9\cdot0{,}4\cdot10^{-6}\cdot3\cdot10^{-7}=1{,}08\cdot10^{-3}$ N

2001-Junio

B. Problema 2.-

a) La colocación sobre ejes es arbitraria, pero es necesario elegir una para dar el resultado como vector. Colocamos el cuadrado de forma que los tres vértices con cargas queden sobre los ejes x e y, uno de ellos en el origen.
Llamamos q_1 a la carga en (0,1;0), q_2 a la carga en (0;0), q_3 a la carga en (0;0,1) y P al punto central (0,05; 0,05)
Utilizando el principio de superposición

$$\vec{E}(P)=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$



Representado en un diagrama las cargas, los vectores r que van de la carga al punto central donde queremos calcular el campo, y los vectores campo según el signo de las cargas, vemos que el campo generado por las cargas en vértices opuestos (q_1 y q_3), al tener mismo signo y estar a la misma distancia, se cancelan, por lo que podríamos calcular sólo el campo asociado a q_2.
Podemos resolver de dos maneras equivalentes:

A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico $\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

La distancia de las tres cargas a P es la misma, $\sqrt{0{,}05^2+0{,}05^2}=0{,}0707$ m.
El vector que va de q_1 a P es $-0{,}05\vec{i}+0{,}05\vec{j}$
El vector que va de q_2 a P es y $0{,}05\vec{i}+0{,}05\vec{j}$
El vector que va de q_3 a P es y $0{,}05\vec{i}-0{,}05\vec{j}$

$$\vec{E}(P)=K\frac{q_1}{0{,}0707^2}\frac{(-0{,}05\vec{i}+0{,}05\vec{j})}{0{,}0707}+K\frac{q_2}{0{,}0707^2}\frac{(0{,}05\vec{i}+0{,}05\vec{j})}{0{,}0707}+K\frac{q_1}{0{,}0707^2}\frac{(0{,}05\vec{i}-0{,}05\vec{j})}{0{,}0707}$$

$$Como\, q_1=q_2=q_3=q$$

$$\vec{E}(P)=K\frac{q}{0{,}0707^3}\cdot0{,}05(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}-\vec{j})=9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}\frac{0{,}05}{0{,}0707^3}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\vec{E}(P)=2{,}5\cdot10^6\vec{i}+2{,}5\cdot10^6\vec{j}\,N/C$$

$$|\vec{E}(P)|=\sqrt{(2{,}5\cdot10^6)^2+(2{,}5\cdot10^6)^2}=3{,}5\cdot10^6\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = arctg (1) =45º, cos(α)= sen(α)= $\frac{0,05}{0,0707}=0,707$, y

$|\vec{E}_{2x}|=|\vec{E}_{2y}|$ ya que el ángulo es de 45º.

$$|E_{2x}(P)|=|E(P)|\cos\alpha=K\frac{q_2}{0,0707^2}\cdot 0,707=\frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}}{0,0707^2}\cdot 0,707=2,5\cdot 10^6\,N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.
Nota: Otra posible elección de ejes hubiera sido plantear eje x ó y directamente en la diagonal del cuadrado en la que falta la carga, para que el campo resultante no tuviera componentes.
b) Utilizando superposición, y como las tres cargas son iguales y están a la misma distancia de estos puntos medios, los potenciales en ambos puntos medios serán iguales entre ellos. Llamamos punto M a uno de ellos y lo calculamos:

$$V(M)=2K\frac{q}{0,05}+K\frac{q}{\sqrt{0,05^2+0,1^2}}=9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}\left(\frac{2}{0,05}+\frac{1}{0,112}\right)=8,8\cdot 10^5\,V$$

El trabajo realizado al desplazar la carga entre esos puntos es nulo, ya que ambos puntos tienen el mismo potencial, y por lo tanto la misma energía potencial. El trabajo a realizar depende de la variación de energía potencial, y como es nula, el trabajo también es nulo.

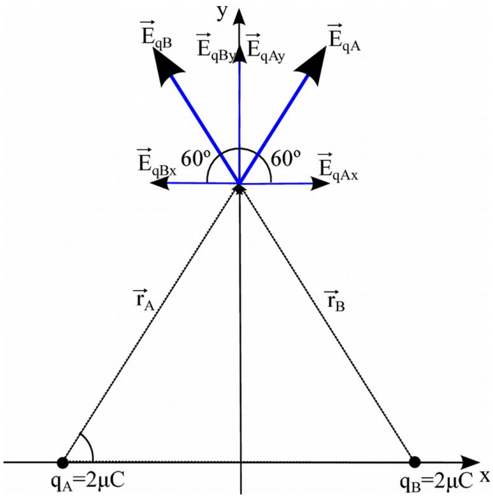
2000-Septiembre

A. Problema 2.-

Nota: el enunciado proporciona ε_0 ; utilizamos el valor de K que es más directo en las expresiones, sabiendo que

$$K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\cdot 10^9\,N\,C^{-2}\,m^2$$

a) Primero realizamos un diagrama y elegimos un sistema de referencia. Tomamos el eje x de modo que pase por los vértices A y B, estando el origen en su punto medio, teniendo A coordenada x negativa y B coordenada x positiva. El eje y pasa por el punto C.



Podemos resolver de dos maneras equivalentes:
A. Utilizando la definición vectorial de campo eléctrico

$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ y que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

La distancia de las dos cargas al tercer vértice es la misma, 2 m al ser un triángulo equilátero.
Como los ángulos del triángulo equilátero son de 60º, para su altura, que es la coordenada y del punto C, OC, podemos plantear según el diagrama

$$tg\,60^o=\frac{OC}{AB/2}\Rightarrow OC=\frac{AB\,tg\,60^o}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,m$$

El vector que va de A a C es $\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$
El vector que va de B a C es y $-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$

$$\vec{E}(P)=K\frac{q_A}{2^2}\frac{(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j})}{2}+K\frac{q_B}{2^2}\frac{(-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j})}{2}$$

$$Como\ q_A=q_B=q$$

$$\vec{E}(P)=K\frac{q}{2^3}(\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j})=\frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}}{2^3}(2\sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}(P)=7,8\cdot 10^3\vec{j}\,N/C$$

B. Por trigonometría, calculando módulos y descomponiendo componentes x e y de cada vector en función del ángulo α. En este caso α = 60º

$|\vec{E}_{qAx}|=|\vec{E}_{qBx}|;|\vec{E}_{qAy}|=|\vec{E}_{qBy}|$ Por la simetría, por lo que solamente hay componente y, su valor será dos veces la componente y asociada a una única carga, ya que ambas son iguales.

$$|E(C)|=2|E_{qAy}(C)|=2\cdot K\frac{q_A}{2^2}sen(60^o)=2\cdot\frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-6}}{4}\cdot 0{,}866=7{,}8\cdot 10^3 N/C$$

Tomando signos del diagrama y sumando vectorialmente, llegamos al mismo resultado.
b) Utilizando el principio de superposición el potencial total es la suma de los potenciales creado por las cargas en A y B. Como ambas cargas son iguales y están a la misma distancia de C, 2 m.

$$V(C)=2K\frac{q_A}{r_A}=2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{2}=1{,}8\cdot 10^4 V$$

c) La energía potencial de una carga de 5 μC en el punto C sería, reutilizando el resultado del apartado b, de $E_p=q\cdot V=5\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}8\cdot 10^{-4}=0{,}09$ J
Esa energía potencial es el trabajo aportado (realizado externo/contra el campo) para llevar una carga desde ∞ hasta ese punto "traerla del infinito, E aportada para crear esa configuración de cargas".
d) Si la caga situada en B se sustituye por una carga de -2 μC, se modifica el potencial en el punto C, no podemos utilizar el resultado del apartado b. El potencial ahora sería nulo (cualitativamente se ve que ambas distancias son iguales y las cargas iguales pero de signo contrario)

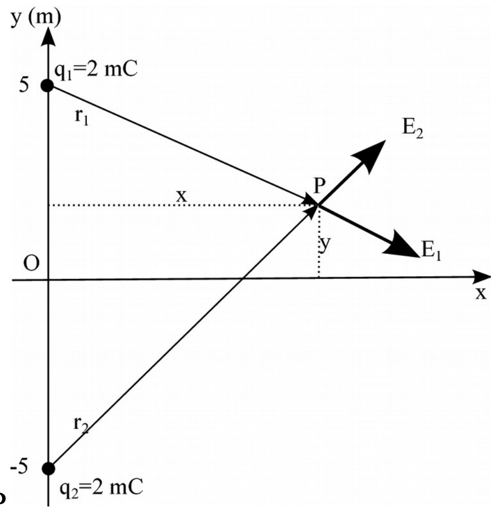
$$V(C)=K\frac{q_A}{r_A}+K\frac{q_B}{r_B}=\frac{9\cdot 10^9}{2}\cdot(2\cdot 10^{-6}-2\cdot 10^{-6})=0 V$$

Por lo tanto el trabajo para traer una carga desde el infinito al punto C sería nulo, ya que ambos puntos tienen el mismo potencial (nulo), y por lo tanto la misma energía potencial. El trabajo a realizar depende de la variación de energía potencial, y como es nula, el trabajo también es nulo.

2000-Junio

Cuestión 3.-

Enunciado no proporciona valor K y no es necesario.
a) Podemos realizar un diagrama representando ambas cargas en el plano.
Cualitativamente se puede ver en el diagrama como, siendo ambas cargas positivas, el campo eléctrico se anulará en el punto medio entre ellas, que es el origen. Se ve como tiene que ser un punto del eje x para que el módulo de ambos campos sea igual, y tiene que ser el origen para que ambos campos tengan misma dirección y sentidos opuestos y se anulen.



Matemáticamente, teniendo en cuenta que el campo eléctrico es un vector, llamando q_1 a la carga en (0,5) y q_2 a la carga en (0,-5) (según enunciado $q_1=q_2=q=2$ mC), podemos plantear que el campo nulo en un punto genérico P de coordenadas (x,y) implica

$$\vec{E}(P)=\vec{E}_1(P)+\vec{E}_2(P)=K\frac{q_1}{r_{1P}^2}\vec{u_{r1P}}+K\frac{q_2}{r_{2P}^2}\vec{u_{r2P}}=Kq(\frac{\vec{u_{r1P}}}{r_{1P}^2}+\frac{\vec{u_{r2P}}}{r_{2P}^2})$$

Para un punto genérico $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$

$$r_{1P}=x\vec{i}+(y-5)\vec{j}$$
$$r_{2P}=x\vec{i}+(y+5)\vec{j}$$

Como $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, para que el campo sea nulo

$$\vec{E}(P)=0\Rightarrow\frac{\vec{u_{r1P}}}{r_{1P}^2}+\frac{\vec{u_{r2P}}}{r_{2P}^2}=0\Rightarrow\frac{x\vec{i}+(y-5)\vec{j}}{r_{1P}^3}+\frac{x\vec{i}+(y+5)\vec{j}}{r_{2P}^3}=0$$

Igualamos ambos componentes a cero.

$$\frac{x}{r_{1P}^3}+\frac{x}{r_{2P}^3}=0\Rightarrow x\cdot(\frac{1}{(x^2+(y-5)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(x^2+(y+5)^2)^{3/2}})=0$$

Soluciones: $x=0$
$(x^2+(y-5)^2)=(x^2+(y+5)^2) \Rightarrow y=0$

Podemos comprobar que la solución x=0, y=0 también hace que la componente y sea cero.

$$\frac{y-5}{r_{1P}^3}+\frac{y+5}{r_{2P}^3}=0 \Rightarrow \frac{y-5}{(x^2+(y-5)^2)^{3/2}}=\frac{-y+5}{(x^2+(y+5)^2)^{3/2}}$$

b) El trabajo estará asociado a la diferencia de energía potencial entre ambos puntos.
Cualitativamente podemos ver que ambos puntos están a la misma distancia de ambas cargas y que tendrán la misma energía potencial, por lo que el trabajo será nulo.
Numéricamente calculamos la energía potencial en ambos puntos: llamamos A al punto (1,0) y B al punto (-1,0). Las distancias entre q_1 y A, q_1 y B, q_2 y A y q_2 y B son todas iguales, la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados 1 y 5, $d=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{27}\,m$. Como $q_1=q_2=q$, podemos plantear:

$E_{pA}=Kq/d + Kq/d=2Kq/d$ $E_{pB}=Kq/d + Kq/d=2Kq/d$

$W=-\Delta E_p=0$