2 ECUACIONES Y SISTEMAS

El estudio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas será el hilo conductor de la unidad, los alumnos van a repasar lo aprendido en cursos anteriores sobre polinomios, y trabajarán con ecuaciones conocidas y otras que empezarán a manejar por primera vez.

Al inicio de esta unidad se presentan los números racionales así como los irracionales y se trabaja su representación, para llegar en el siguiente epígrafe a construir el conjunto de los números reales. A continuación, se analizan los diferentes tipos de intervalos y se introduce la definición de entorno, concepto que será utilizado más adelante en este curso al estudiar límites o derivadas.

Al inicio de esta unidad se presentan los polinomios y sus operaciones y propiedades así como las fracciones algebraicas, para llegar en el siguiente epígrafe a distinguir igualdades, identidades y ecuaciones. A continuación, comienza su recorrido por las ecuaciones con una incógnita: polinómicas, racionales e irracionales, exponenciales y logarítmicas.

Tras el estudio de las ecuaciones se trabajan las inecuaciones, tanto con una como con dos incógnitas, para pasar después de analizar la resolución de sistemas de ecuaciones, lineales donde se estudia el método de Gauss y no lineales. Finalmente, se estudian los sistemas de inecuaciones lineales y no lineales.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las ecuaciones, las inecuaciones y los sistemas, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL).** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, la identificación de diferentes tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas, y sobre todo la resolución de cada uno de ellos, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Manejar los polinomios, sus operaciones y propiedades.
- Reconocer y trabajar correctamente con fracciones algebraicas.
- Identificar igualdades, identidades y ecuaciones.
- Resolver ecuaciones con una incógnita e inecuaciones.
- Resolver sistemas de ecuaciones, utilizando el método de Gauss cuando sea conveniente, y sistemas de inecuaciones.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD			
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Competencias clave**
Polinomios Concepto de polinomio Operaciones con polinomios Teorema del resto Descomposición factorial **Fracciones algebraicas** Concepto de fracción algebraica Simplificación Operaciones con fracciones algebraicas	1. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.	1.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico. 1.2. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas. 1.3. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado. 1.4. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.	CMCT CD CL CAA CSC
Igualdades, identidades y ecuaciones **Ecuaciones con una incógnita** Ecuaciones polinómicas Ecuaciones racionales Ecuaciones irracionales Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	2. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando ecuaciones e interpretando críticamente los resultados.	2.1. Resuelve ecuaciones con una incógnita: polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas. 2.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones, e interpreta los resultados en el contexto del problema. 2.3. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.	CMCT CD CL CAA
Inecuaciones Inecuaciones con una incógnita Inecuaciones con dos incógnitas	3. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando inecuaciones e interpretando críticamente los resultados.	3.1. Resuelve inecuaciones con una y con dos incógnitas. 3.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de inecuaciones, e interpreta los resultados en el contexto del problema. 3.3. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.	CMCT CD CL CAA
Sistemas de ecuaciones Sistemas de ecuaciones lineales Sistemas de ecuaciones no lineales	4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando sistemas de ecuaciones e interpretando críticamente los resultados.	4.1. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. 4.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida cotidiana, estudia y clasifica sistemas e ecuaciones lineales, los resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que se posible, y lo aplica para resolver problemas. 4.3. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones, e interpreta los resultados en el contexto del problema. 4.4. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.	CMCT CD CL CAA
Sistemas de inecuaciones Sistemas de inecuaciones lineales Sistemas de inecuaciones no lineales	5. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando sistemas de inecuaciones e interpretando críticamente los resultados.	5.1. Resuelve sistemas de inecuaciones lineales y no lineales. 5.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de sistemas de inecuaciones, e interpreta los resultados en el contexto del problema. 5.3. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.	CMCT CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

Prueba de evaluación

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Polinomios
- Concepto de polinomio
- Operaciones con polinomios
- Teorema del resto
- Descomposición factorial

2. Fracciones algebraicas
- Concepto de fracción algebraica
- Simplificación
- Operaciones con fracciones algebraicas

3. Igualdades, identidades y ecuaciones

4. Ecuaciones con una incógnita
- Ecuaciones polinómicas
- Ecuaciones racionales
- Ecuaciones irracionales
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

5. Inecuaciones
- Inecuaciones con una incógnita
- Inecuaciones con dos incógnitas

6. Sistemas de ecuaciones
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones no lineales

7. Sistemas de inecuaciones
- Sistemas de inecuaciones lineales
- Sistemas de inecuaciones no lineales

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

Vídeo. Operaciones con fracciones algebraicas

Vídeo. Ecuaciones exponenciales

Vídeo. Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

GeoGebra. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Actividades interactivas. Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 35)

1. Representa sobre la recta los siguientes intervalos.

a) **$[-3, 5]$** ***b)*** **$(7, 12)$** ***c)*** **$[-5, 0)$** ***d)*** **$(-1, 1]$**

a)

b)

c)

d)

2. Escribe, en forma de intervalo, el conjunto de valores que verifican $x < 4$.

$(-\infty, 4)$

3. Escribe, en forma de intervalo, el conjunto de números $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$.

$(-\infty, 4]$

4. Halla el valor de $\log\left(\dfrac{100}{5^2}\right)$.

$\log 100 - \log 5^2 = 2 - 2 \cdot \log 5 = 2 - 2 \cdot 0{,}70 = 0{,}60$

5. Calcula $\log_2 1\,024$.

$\log_2 1\,024 = \log_2 2^{10} = 10$

6. Sabiendo que $\ln x$ es el logaritmo en base e de x, calcula x si $\ln x = 0$.

$x = 1$ porque $e^0 = 1$.

7. ¿A qué intervalo pertenece x si $|x - 8| < 12$?

$x - 8 < 12 \Rightarrow x < 20$

$-12 < x - 8 \Rightarrow x > -4$

$(-4, 20)$

8. ¿Cuál es la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, 1)$?

La ecuación general o implícita es de la forma $Ax + By + C = 0$.

$\vec{v} = (4, -2)$ $\vec{n} = (2, 4)$ $P(1, 3)$

$2x + 4y + C = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1) + 4 \cdot (3) + C = 0 \Rightarrow C = -14$

$2x + 4y - 14 = 0 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$

9. ¿Qué podrías afirmar acerca de la posición relativa de los siguientes pares de rectas?

a) $\begin{cases} r_1: 2x - 4y + 10 = 0 \\ s_1: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} r_2: 2x - 4y + 10 = 0 \\ s_2: 4x - 8y + 5 = 0 \end{cases}$

a) Las rectas son coincidentes ya que $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$, es decir: $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-4}{-2} = \dfrac{10}{5}$

b) Las rectas son paralelas ya que $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$, es decir: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-4}{-8} \neq \dfrac{10}{5}$

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Operaciones con fracciones algebraicas (página 42)

En el vídeo se muestra cómo resolver la operación con fracciones algebraicas del ejercicio resuelto paso a paso.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver este tipo de operaciones o para que los alumnos repasen las operaciones con fracciones algebraicas.

Ecuaciones exponenciales (página 49)

En el vídeo se muestra la resolución de la ecuación exponencial $2 \cdot 3^{2x-1} = 1 - 3^{x-1}$ aplicando un cambio de variable, indicado los pasos a seguir y deshaciendo el cambio al final.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver este tipo de ecuaciones o para que los alumnos repasen la resolución de estas ecuaciones más tarde.

Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (página 56)

En el vídeo se muestra la resolución del primer sistema de ecuaciones del ejercicio resuelto utilizando el método de Gauss para hallar las soluciones. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo del método paso a paso o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas (página 62)

En el archivo de GeoGebra puede verse la resolución gráfica del ejercicio resuelto 9 en el que se representan dos inecuaciones lineales con dos incógnitas. Moviendo los deslizadores y eligiendo los signos de orden pueden verse las soluciones de otros sistemas del mismo tipo, así el recurso puede utilizarse para comprobar las soluciones de otros ejercicios.

Actividades (páginas 37/57)

1 **Realiza las siguientes divisiones.**

a) $(4x^4 - 12x^3 + 7x - 5) : (3x^2 - 6x)$

b) $(7x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 5) : (x^3 + 2x)$

a) $c(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$, $r(x) = -9x - 5$

b) $c(x) = 7x^2 + 4x - 17$, $r(x) = -20x^2 + 34x + 5$

2 **Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$ ***c)*** $(6x^3 + 2x - 3) : (x - 5)$

b) $(7x^3 + 2x^2 - 5x + 10) : (x + 2)$

a) $c(x) = x^2 + 3$, $r(x) = 1$

b) $c(x) = 7x^2 - 12x + 19$, $r(x) = -28$

c) $c(x) = 6x^2 + 30x + 152$, $r(x) = 757$

3 **Dados $p(x) = x + \frac{1}{3}$, $q(x) = x^4 + 3x^2 - 3x + 1$, y $s(x) = 3x^2 - 5x - 2$, calcula:**

a) $p(x) + q(x) - s(x)$ ***d)*** $q(x) : s(x)$

b) $p(x) \cdot s(x)$ ***e)*** $s(x) : p(x)$

c) $q(x) \cdot s(x)$ ***f)*** $q(x) : p(x)$

a) $p(x) + q(x) - s(x) = x + \frac{1}{3} + x^4 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 5x + 2 = x^4 + 3x + \frac{10}{3}$

b) $p(x) \cdot s(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2x + x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{2}{3} = 3x^3 - 4x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $q(x) \cdot s(x) = 3x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 9x^4 - 15x^3 - 6x^2 - 9x^3 + 15x^2 + 6x + 3x^2 - 5x - 2 = 3x^6 - 5x^5 + 7x^4 - 24x^3 + 12x^2 + x - 2$

d)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + \quad + 3x^2 - 3x + 1 & 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 5x^3/3 + 2x^2/3 & x^2/3 + 5x/9 + 58/27 \\ \hline
5x^3/3 + 11x^2/3 - 3x & \\
-5x^3/3 + 25x^2/9 + 10x/9 & \\ \hline
58x^2/9 - 17x/9 + 1 & \\
-58x^2/9 + 290x/27 + 116/27 & \\ \hline
239x/27 + 143/27 &
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l|l}
3x^2 - 5x - 2 & x + 1/3 \\ \cline{2-2}
-3x^2 - x & 3x - 6 \\ \hline
-6x - 2 & \\
6x + 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 3x^2 - 3x + 1 & x + 1/3 \\ \cline{2-2}
-x^4 - (1/3)x^3 & x^3 - (1/3)x^2 + \\ \hline
-(1/3)x^3 + 3x^2 - 3x + 1 & +(28/9)x - (109/27) \\
(1/3)x^3 + (1/9)x^2 & \\ \hline
(28/9)x^2 - 3x + 1 & \\
-(28/9)x^2 - (28/27)x & \\ \hline
-(109/27)x + 1 & \\
(109/27)x + 109/81 & \\ \hline
190/81 &
\end{array}$$

4 **Factoriza los siguientes polinomios.**

a) $t(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

c) $q(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

d) $s(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$

a) $t(x) = 2x^2 + x - 1 = 2(x - 1/2)(x + 1)$

b) $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$

c) $q(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45 = (x - 3)^2 \cdot (x + 5)$

d) $s(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 9(x - 1)(x + 1/3)(x - 1/3)$

5 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$ ***c)*** $\dfrac{2(2x^3 - 5x^2 + x + 2)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \dfrac{(x - 3)(x + 1)(x - 5)}{(x - 3)(x + 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 5}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \dfrac{x(x + 2)(x - 2)}{x(x + 2)^2} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

c) $\dfrac{2(2x^3 - 5x^2 + x + 2)}{2x^3 + x^2 - 8x - 4} = \dfrac{2(x - 1) \cdot 2(x - 2)(x + 1/2)}{2(x - 2)(x + 1/2)(x + 2)} = \dfrac{2(x - 1)}{x + 2}$

6 **Dadas las fracciones algebraicas $a(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$ y $b(x) = \dfrac{5}{x^2+x-6}$, calcula $a(x)+b(x)$, $a(x)-b(x)$, $a(x)\cdot b(x)$ y $a(x):b(x)$.**

- $a(x)+b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} + \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
$= \dfrac{(2x-1)(x-2)+5(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+1)} = \dfrac{2x^2+7}{x^3+2x^2-5x-6}$
- $a(x)-b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} - \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
$= \dfrac{(2x-1)(x-2)-5(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+1)} = \dfrac{2x^2-10x-3}{x^3+2x^2-5x-6}$
- $a(x)\cdot b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} \cdot \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
$= \dfrac{(2x-1)\cdot 5}{(x+3)^2\cdot(x-2)(x+1)} = \dfrac{10x-5}{x^4+5x^3+x^2-21x-18}$
- $a(x):b(x) = \dfrac{2x-1}{(x+3)(x+1)} : \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} =$
$= \dfrac{(2x-1)(x+3)(x-2)}{5\,(x+3)(x+1)} = \dfrac{2x^2-5x+2}{5x+5}$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\mathbf{x^4+7x^2+13=0}$ ***c)*** $\mathbf{x^3-4x=0}$

b) $\mathbf{x^3-9x^2+15x+25=0}$ ***d)*** $\mathbf{x^3+4x=0}$

a) $7^2-4\cdot 1\cdot 13<0$, la ecuación no tiene solución.

b) Se descompone el polinomio y se obtiene:
$(x+1)(x-5)^2=0$
Por lo que las soluciones son $x=-1$ y $x=5$.

c) Factorizando: $x(x+2)(x-2)=0$, por lo que las soluciones son $x=0$, $x=2$ y $x=-2$.

d) Factorizando: $x(x^2+4)=0$, por lo que la solución es $x=0$.

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\mathbf{x^3-3x^2-9x-5=0}$

b) $\mathbf{x^3-9x=0}$

c) $\mathbf{x^4+4x^2=0}$

d) $\mathbf{x^3-3x^2-2x+6=0}$

a) Se descompone el polinomio: $(x+1)^2(x-5)=0$, por lo que las soluciones son $x=-1$ y $x=5$.

b) Factorizando: $x(x+3)(x-3)=0$, por lo que las soluciones son $x=0$, $x=-3$ y $x=3$.

c) Factorizando: $x^2(x^2+4)=0$, por lo que la solución es $x=0$.

d) Se descompone el polinomio: $(x-3)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$, por lo que las soluciones son $x=3$, $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

9 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\mathbf{x^4-5x^2+4=0}$

b) $\mathbf{9x^4-6x^2+1=0}$

c) $\mathbf{x^4+5x^2+20=0}$

a) $x^2=\dfrac{5\pm 3}{2} \Rightarrow x^2=4$ o $x^2=1$, por lo que las soluciones son:
$x=-2$, $x=2$, $x=-1$, $x=1$

b) $x^2=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$, por lo que las soluciones son: $x=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $x=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

c) $5^2-4\cdot 1\cdot 20<0$, por lo que no tiene solución.

10 **Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.**

a) $\mathbf{x-5=-\dfrac{6}{x}}$ ***c)*** $\mathbf{\dfrac{6x+1}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}}$

b) $\mathbf{\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}}$ ***d)*** $\mathbf{\dfrac{4x}{x^2-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{25}{x^2-1}}$

a) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$x^2-5x+6=0$, y sus soluciones son $x=2$ y $x=3$.

b) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$2x(x-1)=4 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0$ y se obtiene para x dos valores, 2 y -1.
$x=-1$ anula el denominador de la ecuación racional, por lo que la solución es $x=2$.

c) Se reduce a común denominador, se ordenan los términos:
$2x^2-5x-3=0$ y se obtiene para x dos valores, 3 y $-1/2$.
Ambas soluciones son válidas.

d) Se reduce a común denominador y se obtiene:
$4x-4x+4=25$ que es una igualdad imposible. Por tanto, la ecuación no tiene solución.

11 **Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.**

a) $\mathbf{3+\sqrt{2x+3}=2x}$ ***d)*** $\mathbf{x-1=\sqrt{x^2-25}}$

b) $\mathbf{\sqrt[3]{9x-8}=\sqrt{2x}}$ ***e)*** $\mathbf{\sqrt{2x-3}+1=x}$

c) $\mathbf{\sqrt{x+6}+\sqrt{x}=6}$ ***f)*** $\mathbf{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3}$

a) $\sqrt{2x+3}=2x-3$
Elevando al cuadrado y reagrupando términos, se obtiene $2x^2-7x+3=0$, cuyas soluciones son $x=3$ y $x=1/2$. Solo es válida la solución $x=3$.

b) Se reduce a común índice y se obtiene:
$$(9x-8)^2=8x^3 \Rightarrow 8x^3-81x^2+144x-64=0$$
Se factoriza la ecuación y se obtienen las soluciones $x=8$ y $x=\dfrac{17\pm\sqrt{33}}{16}$. Para la ecuación irracional inicial solo son válidas las soluciones $x=8$ y $x=\dfrac{17+\sqrt{33}}{16}$

c) Separamos los radicales, y elevando al cuadrado y reagrupando términos se obtiene:
$$12\sqrt{x}=30 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{25}{4}$$

d) Elevando al cuadrado se obtiene:
$$x^2-2x+1=x^2-25 \Rightarrow x=13$$

e) $\sqrt{2x-3}=x-1$
Elevando al cuadrado y reagrupando términos, se obtiene $x^2-4x+4=0$, cuya solución es $x=2$.

f) Separamos los radicales, y elevando al cuadrado y reagrupando términos se obtiene: $x-5=3\sqrt{x-1}$.
Volvemos a elevar al cuadrado y se obtiene la ecuación $x^2-19x+34=0$, cuyas soluciones son $x=17$ y $x=2$. Solo verifica la ecuación irracional inicial $x=2$.

Resuelve estas ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

12 $\mathbf{3^x+3^{-x}=2}$

Hacemos $3^x=a$, y nos queda:
$$a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0$$

13 $\mathbf{10^x+10^{x-1}+3\cdot 10^{x-2}=11\,300}$

Hacemos $10^x=a$, y nos queda:
$$a+\frac{a}{10}+\frac{3a}{100}=11\,300 \Rightarrow (100+10+3)\frac{a}{100}=11\,300$$
$$\Rightarrow a=10^4 \Rightarrow 10^x=10^4 \Rightarrow x=4$$

14 $1 = 2(1 - e^{-x})$

$\dfrac{1}{2} = 1 - e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2$

15 $\ln (x + 1) - \ln x = 1$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$\dfrac{x+1}{x} = e \Rightarrow x + 1 - ex = 0 \Rightarrow x(1 - e) = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e - 1}$

16 $\log (x + 3) - \log (x + 1) = 1 - \log 5$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 1$$

17 $\log 2^{\log x} + \log x^{\log 2} = \log x^x$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x \cdot \log 2 + \log 2 \cdot \log x = x \cdot \log x$$

Si $\log x = 0$ entonces $x = 1$.

$\log 2 + \log 2 = x \Rightarrow x = 2 \log 2 = \log 4$

18 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $3x + 1 \leq 7$ ***c)*** $-x^2 - x + 6 \geq 0$

b) $x^2 + 9 < 0$ ***d)*** $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 > 0$

a) $3x \leq 6 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow$ El intervalo solución es $(-\infty, 2]$.

b) $x^2 \leq -9$ es imposible.

c) La gráfica de la parábola $y = -x^2 - x + 6$ corta el eje de abscisas en $x = -3$ y $x = 2$, y es convexa, por lo que el intervalo solución es $[-3, 2]$.

d) Factorizamos el polinomio y elaboramos una tabla de signos:

$$(x + 1)^3 (x - 1) > 0$$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

19 **Resuelve las siguientes inecuaciones.**

a) $\dfrac{x^2 - 16}{x + 5} > 0$ ***c)*** $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 9} \leq 0$

b) $\dfrac{x + 5}{x^2 - 9} \leq 0$ ***d)*** $\dfrac{x + 5}{16 - x^2} \geq 0$

a) Factorizamos el numerador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

$-\infty \quad -5 \quad -4 \quad 4 \quad +\infty$

$x + 4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 5$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

El conjunto solución es $(-5, -4) \cup (4, +\infty)$.

b) Factorizamos el denominador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

$-\infty \quad -5 \quad -3 \quad 3 \quad +\infty$

$x + 5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x + 3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

El conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup (-3, 3)$.

c) Factorizamos el numerador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

$-\infty \quad -3 \quad 2 \quad 9 \quad +\infty$

$x + 3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 9$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

El conjunto solución es $(-\infty, -3] \cup [2, 9)$.

d) Factorizamos el denominador de la fracción y elaboramos una tabla de signos:

$-\infty \quad -5 \quad -4 \quad 4 \quad +\infty$

$x + 5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$4 + x$	$-$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$

El conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup (-4, 4)$.

20 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ 2x - 5y - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - 4y - z = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ 5x + y + z = 12 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -4y - z = 4 \\ -14y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -4y - z = 4 \\ y = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y = -2, z = 4, x = 2$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - 4y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.} \\ 0 = 2 \qquad \text{No tiene solución.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ 2x - 5y - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - 4z = 3 \\ x - 4z = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x = 4z + 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. $x = 4z + 3, y = z + 1$

21 **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x^2 \cdot y^3 = 16 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 4^{x+1} = 2^y \\ \ln x + 1 = \ln y \end{cases}$

a) $x = \dfrac{4}{y}$, sustituimos en la segunda ecuación y se obtiene:

$$16y = 16 \Rightarrow y = 1, x = 4$$

b) La primera ecuación se puede escribir como:

$$2^{2x+2} = 2^y \Rightarrow 2x + 2 = y$$

de la segunda ecuación se deduce que $y = xe$, por lo que tenemos:

$2x + 2 = xe \Rightarrow 2 = x(e - 2) \Rightarrow x = \dfrac{2}{e - 2}, y = \dfrac{2e}{e - 2}$

Ejercicios y problemas (páginas 63/68)

Polinomios y operaciones con polinomios

1 **Dados $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$ y $q(x) = 7x^2 + 11x - 5$, halla:**

a) **$3p(x) - 2q(x)$**

b) **$\dfrac{p(x)}{q(x)}$**

a) $12x^3 - 20x^2 - 7x - 17$

b) $c(x) = \dfrac{4}{7}x - \dfrac{58}{49}$

$r(x) = \dfrac{1\,023}{49}x - \dfrac{731}{49}$

2 **Calcula.**

a) **$(3x - 4)^2$**

b) **$(x^2 - 3x + 1)^2$**

c) **$(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2$**

d) **$(2x - 3)^3$**

e) **$(x^2 - 5x)(x^2 + 5x)$**

f) **$(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x)$**

a) $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

b) $(x^2 - 3x + 1)^2 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) =$
$= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

c) $(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2 = -3x^6 - 6x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 4x^2$

d) $(2x - 3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

e) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x) = x^4 - 25x^2$

f) $(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x$

3 **Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones.**

a) **$(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 3) : (x^2 - x + 3)$**

b) **$(2x^6 - 5x^5 + x^4 + 5x^2 + 5x) : (x^4 - 1)$**

c) **$(12x^4 - 15x^3 - 32x^2 + 41x + 6) : (4x^2 - 5x)$**

a) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; $r(x) = x - 6$

b) $c(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $r(x) = 7x^2 + 1$

c) $c(x) = 3x^2 - 8$; $r(x) = x + 6$

4 **Dados dos polinomios, $P(x)$ de grado 5 y $Q(x)$ de grado 3:**

a) **¿Cuál será el grado de $P(x) \cdot Q(x)$?**

b) **¿Cuál será el grado de $P(x) : Q(x)$?**

c) **¿Cuál será, como máximo, el grado del resto de la división $P(x)$ entre $Q(x)$?**

a) El grado de $P(x) \cdot Q(x)$ será la suma de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, 8.

b) El grado de $P(x) : Q(x)$ será la resta de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, 2.

c) El grado del resto ha de ser como máximo un grado menos que el grado del divisor, en nuestro caso, 2.

5 **Determina el valor de a y b para que sea exacta la división $(3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x)$.**

Se realiza la división y se obtiene de resto $(a - 6)x + b$. Para que la división sea exacta, se debe cumplir que $a = 6$ y $b = 0$.

6 **Calcula el cociente y el resto de:**

a) **$(7x^3 - 5x^2 + 3x - 7) : (x + 2)$**

b) **$(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x) : (x - 2)$**

c) **$(x^4 - 16) : (x + 2)$**

a) $c(x) = 7x^2 - 19x + 41$; $r(x) = -89$

b) $c(x) = 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23$; $r(x) = 46$

c) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; $r(x) = 0$

Factorización de polinomios y teorema del resto

7 **Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$:**

a) **Calcula las raíces de $p(x)$ y de $q(x)$.**

b) **Descompón factorialmente los dos polinomios.**

c) **Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ ayudándote de sus descomposiciones factoriales.**

a) Las raíces de $p(x)$ son $x = 1$, doble y $x = 3$.

Las raíces de $q(x)$ son $x = 5$, $x = 3$ y $x = 1$.

b) $p(x) = (x - 3)(x - 1)^2$

$q(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 5)$

c) m.c.d. $= (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$

m.c.m. $= (x - 3)(x - 1)^2(x - 5) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$

8 **Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 6$ entre $(x - 2)$ y entre $(x + 3)$.**

a) $P(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2 - 6 = -22$

b) $P(-3) = (-3)^4 - 7 \cdot (-3)^3 + 12 \cdot (-3) - 6 = 228$

9 **Calcula el valor de m para que el polinomio:**

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m + 1)x - 2$$

sea divisible por el binomio $x + 2$.

Calculando $p(-2)$ e igualando a 0 se obtiene $m = -6$.

10 **Si la división del polinomio $p(x)$ entre $(x + 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar de $p(-2)$? ¿Y de $p(2)$?**

$p(-2) = 0$ y $p(2)$ no se puede conocer.

11 **Determina en cada caso el valor de k, para que las siguientes divisiones sean exactas:**

a) **$(x^6 - x^4 + 3x^3 - kx^2 + x - 5) : (x - 1)$**

b) **$(x^5 + 3x^3 + 2x^2 + kx - 5) : (x + 1)$**

c) **$(x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 8x^2 - x - k) : (x + 2)$**

a) Sustituyendo x por 1 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

b) Sustituyendo x por -1 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 7 = 0 \Rightarrow k = -7$

c) Sustituyendo x por -2 e igualando a cero, se obtiene:

$k + 126 = 0 \Rightarrow k = -126$

12 **Si dado el polinomio $q(x)$ se verifica que $q(-7) = 10$, ¿cuál será el resto de la división de $q(x) : (x + 7)$?**

Por el teorema del resto, será 10.

13 **Calcula el valor de m para que el resto de la división de $(x^4 - 7x^3 + mx^2 - 5x + 2)$ entre $(x - 2)$ sea 7.**

Sustituimos x por 2 e igualamos a 7.

Se obtiene $-48 + 4m = 7 \Rightarrow m = \dfrac{55}{4}$

14 **Sin efectuar divisiones, contesta razonadamente las siguientes preguntas.**

a) **¿Es divisible $(x^3 - 64)$ por $(x - 4)$? ¿Y por $(x + 4)$?**

b) **¿Es divisor $(x + 3)$ de $(x^4 - 81)$? ¿Y de $(x^4 + 81)$?**

c) **¿Es el polinomio $p(x) = 2x^3 - 2x - 6x^2 + 6$ múltiplo del binomio $q(x) = x - 4$?**

a) Por $(x - 4)$ sí, ya que $p(4) = 4^3 - 64 = 0$.
Por $(x + 4)$ no, ya que $p(-4) = (-4)^3 - 64 \neq 0$.

b) $(x + 3)$ es divisor de $x^4 - 81$, ya que $(-3)^4 - 81 = 0$.
En cambio no es divisor de $x^4 + 81$, ya que: $(-3)^4 + 81 \neq 0$.

c) Determinaremos si $p(x)$ es divisible por $q(x)$, calculando el valor: $p(4) = 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4^2 + 6 = 128 - 8 - 96 + 6 \neq 0$. No es divisible, luego $p(x)$ no es múltiplo de $q(x)$.

15 **Halla el polinomio de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones:**

a) **Que el coeficiente de segundo grado sea -2.**

b) **Que sea divisible por $x - 3$.**

c) **Que al dividirlo por $x + 2$, el resto de la división sea -10.**

Primera condición

$p(x) = -2x^2 + bx + c$

Segunda condición

$p(3) = 0 = 18 + 3b + c$

Tercera condición

$p(-2) = -10 = -8 - 2b + c$

Resolviendo el sistema se obtiene $b = 4$ y $c = 6$:
$p(x) = -2x^2 + 4x + 6$

16 **Dado el polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$, calcula a y b sabiendo que $p(x)$ es divisible por $(x - 5)$ y que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ es 9.**

Imponiendo $p(5) = 0$ y $p(2) = 9$ obtenemos $a = 7$ y $b = 15$.

17 **Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - ax + b$, determina el valor de a y b sabiendo que al dividirlo por $(x - 1)$ la división es exacta, y que al dividirlo por $(x + 2)$ el resto es 101.**

Al sustituir x por 1 e igualar a cero, se obtiene $2 - a + b = 0$. Si se sustituye x por -2 y se iguala a 101, se obtiene $48 + 40 + 16 + 2a + b = 101$.

Al resolver el sistema, se obtienen los valores pedidos:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1/3,\ b = -7/3$$

18 **Calcula a y b para que $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x$ sea divisible por $(x + 4)$ y al dividirlo por $(x + 1)$ el resto sea -6.**

Al sustituir x por -4 e igualar a cero, se obtiene:

$$512 - 64a + 16b + 16 = 0$$

A continuación se sustituye x por -1 y se iguala a 6, con lo que tenemos la ecuación $2 - a + b + 4 = -6$.

Se resuelve el sistema y se obtienen los valores pedidos:

$$\begin{cases} -64a + 16b = -528 \\ -a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = 7,\ b = -5$$

19 **Siendo $p(x) = x^5 + ax^4 + 2x^3 - x^2 + bx - 2$, calcula a y b para que sea múltiplo de $(x - 1)$ y $(x + 2)$.**

Se sustituye x por 1 y se iguala a cero, se obtiene entonces $1 + a + 2 - 1 + b - 2 = 0$. A continuación, se sustituye x por -2 y se vuelve igualar a cero, $-32 + 16a - 16 - 4 - 2b - 2 = 0$.

Se resuelve el sistema, obteniendo los valores de a y b:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 16a - 2b = 54 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = -3$$

20 **Escribe tres polinomios de tercer grado que tengan por raíces:**

a) **2, -2 y 7**

b) **2 y -1**

c) **Únicamente 3**

a) $a(x - 2)(x + 2)(x - 7)$

b) $a(x - 2)^2 \cdot (x + 1)$ o $a(x - 2)(x + 1)^2$

c) $a(x - 3)^3$

21 **Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga ninguna raíz real.**

$(x^2 + a) \cdot (x^2 + b)$, donde $a > 0$ y $b > 0$

22 **Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.**

- **$p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$**
- **$q(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$**
- **$s(x) = (x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 3x + 2)$**

m.c.d. $= (x - 2)(x - 1)$
m.c.m. $= (x + 1)^2(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)^2$

23 **Descompón factorialmente los siguientes polinomios y halla sus raíces.**

a) **$x^4 - 9$**

b) **$x^3 - 4x^2 + x + 6$**

c) **$x^3 + 3x^2 - 9x + 5$**

d) **$3x^3 - 9x^2 - 3x + 9$**

a) $x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, sus raíces son $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$, sus raíces son $x = 2$, $x = 3$ y $x = -1$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x + 5)(x - 1)^2$, sus raíces son $x = -5$ y $x = 1$ (doble)

d) $3x^3 - 9x^2 - 3x + 9 = 3(x - 1)(x + 1)(x - 3)$ sus raíces son $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$

24 **Extrae factor común y utiliza las identidades notables para factorizar cada uno de los siguientes polinomios, y di cuáles son sus raíces.**

a) **$x^3 + 6x^2 + 9x$**

b) **$5x^4 - 20x$**

c) **$x^3 - 4x$**

d) **$2x^4 + 8x^2$**

e) **$6x^3 - 54x$**

f) **$\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x$**

a) $x^3 + 6x^2 + 9x = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x + 3)^2$, raíces: 0 y -3 (doble)

b) $5x^4 - 20x = 5x(x^3 - 4)$, sus raíces son: 0 y $\sqrt[3]{4}$

c) $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$, sus raíces son: 0, 2 y -2

d) $2x^4 + 8x^2 = 2x^2(x^2 + 4)$, sus raíces son: 0 (doble)

e) $6x^3 - 54x = 6x(x - 3)(x + 3)$, sus raíces son: 0, 3 y -3

f) $\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x = \dfrac{1}{4}(x + 2)^2 x$, sus raíces son: -2 (doble) y 0

25 **Factoriza.**

a) **$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24$**

b) **$4x^3 + 14x^2 + 6x$**

c) **$3x^3 - 6x^2 - 45x$**

a) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24 =$
$= (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 2x + 4)$

b) $4x^3 + 14x^2 + 6x = 2x(2x + 1)(x + 3)$

c) $3x^3 - 6x^2 - 45x = 3x(x + 3)(x - 5)$

26 **Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios.**

a) $x^4 - 7x^2 - 6x$

b) $x^5 + 3x^4 - x - 3$

c) $3x^4 - 5x^3 - 28x^2$

a) 0, −1, −2, 3

b) 1, −1, −3

c) 0 (doble), 4, −7/3

27 **Si un polinomio, $P(x)$, tiene como raíces $x = -2$ y $x = 4$, ¿puede ser el grado de $P(x)$ mayor que dos?**

Sí, si alguna de las raíces no es simple.

28 **Calcula un polinomio que tiene por cuadrado $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.**

Descomponiendo el polinomio obtenemos:

$$p(x) = (x+3)^2(x-1)^2$$

Aplicando la raíz cuadrada encontramos el polinomio buscado:

$$(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$$

29 **Averigua el m.c.m. y el m.c.d. de los siguientes polinomios.**

a) $A(x) = 2x^4 + x^3 - x^2$ y $B(x) = x^3 - x$

b) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^5 + 2x^3 + x$ y $C(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

c) $A(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ y $B(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

a) m.c.m. $(A(x), B(x)) = (x+1)(x-1)(2x-1)x^2$;
m.c.d. $(A(x), B(x)) = (x+1)x$

b) m.c.m. $(A(x), B(x), C(x)) = x(x-2)(x^2+1)^2$;
m.c.d. $(A(x), B(x), C(x)) = (x^2+1)^2$

c) m.c.m. $(A(x), B(x)) = (x^2+x+1)(x+1)(x-1)^2(2x+1)$;
m.c.d. $(A(x), B(x)) = (x-1)$

Fracciones algebraicas

30 **Dada la fracción $\dfrac{x-2}{x^2+1}$ determina una equivalente que tenga en el numerador un polinomio de grado 3.**

Basta con multiplicar numerador y denominador por el mismo polinomio de grado 2.

31 **Determina, en cada caso, $q(x)$ de modo que estas fracciones sean equivalentes.**

a) $\dfrac{2x-5}{4x} = \dfrac{q(x)}{12x}$

b) $\dfrac{3x+1}{x^2} = \dfrac{3x^2+x}{q(x)}$

c) $\dfrac{x+3}{2x} = \dfrac{x^2-9}{q(x)}$

d) $\dfrac{x^2-4x}{x^4} = \dfrac{x-4}{q(x)}$

a) $6x - 15$

b) x^3

c) $2x^2 - 6x$

d) x^3

32 **Extrae factor común y simplifica cada una de las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{3x^2+3xy}{2xy+2y^2}$

b) $\dfrac{2x^2-8}{2x^2-8x+8}$

c) $\dfrac{x^3-xy^2}{2x^2-2xy}$

a) $\dfrac{3x}{2y}$

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{x+y}{2}$

33 **Calcula la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones.**

a) $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2-3x}$

b) $\dfrac{7x(x+2)}{x^3-4x}$

c) $\dfrac{6x^2-30x+36}{3x^2-9x+6}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2+3x}$

b) $\dfrac{7}{x-2}$

c) $\dfrac{2(x-3)}{x-1}$

34 **Averigua si existe un polinomio $p(x)$ que verifique la siguiente igualdad:**

$$\frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \frac{p(x)}{x+1}$$

$p(x) = x + 5$

35 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

c) $\dfrac{2x^5+x^3+2x^2-10x+5}{2x^4+3x^3-4x^2-4x+3}$

d) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2-x-3}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2+4x+16}{x+4}$

c) $\dfrac{2x^4+2x^3+3x^2+5x-5}{2x^3+5x^2+x-3}$

d) $\dfrac{1}{x-1}$

36 **Efectúa, simplificando al máximo, las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{7x}{x+1} - \dfrac{2x}{3x(x+1)} - \dfrac{7}{x+1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x+3}$

c) $\dfrac{x^4-16}{3x-15} : \dfrac{4x^2+16}{x^2-9}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2$

e) $\dfrac{3x}{x-2}\left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x}\right)$

f) $\dfrac{x-2}{2x} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{3x+3}{3x}$

g) $\dfrac{x^2-5}{x} - \dfrac{x+1}{x^2}$

h) $\dfrac{10}{3x^2+6x} - \dfrac{1}{4x^2+8x}$

i) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{5x+1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{2x-5}{x-1} + \dfrac{4x}{x^2+2x-3}$

k) $2-\dfrac{5}{x^2+2x+1}-\dfrac{7x}{x+1}$

l) $\left(1-\dfrac{x+5}{x+2}\cdot\dfrac{x-3}{x+2}\right):\dfrac{4}{x+2}$

m) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$

n) $\dfrac{2x}{x-1/x}-\dfrac{2}{x^2+1}$

ñ) $\dfrac{6}{\dfrac{1}{1+(1/x)}-1}$

o) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2+5x+6}:\dfrac{x-4}{x+2}$

p) $\dfrac{x^2-49}{2x}\cdot\dfrac{3x^3}{x^2+2x-35}$

a) $\dfrac{21x-23}{3(x+1)}$

b) $(x-3)(x-1)$

c) $\dfrac{x^4-13x^2+36}{12x-60}$

d) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$

e) $\dfrac{-3x^2-6x+15}{(x-1)(x-2)}$

f) $\dfrac{5x-2}{2x}$

g) $\dfrac{x^3-6x-1}{x^2}$

h) $\dfrac{37}{12x^2+24x}$

i) $\dfrac{-5x^2-x-4}{x^2-1}$

j) $\dfrac{3x^2+3x-14}{x^2+2x-3}$

k) $\dfrac{-5x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$

l) $\dfrac{2x+19}{4x+8}$

m) 8

n) $\dfrac{2x^4+2}{x^4-1}$

ñ) $-6(x+1)$

o) $\dfrac{x-4}{x+3}$

p) $\dfrac{3x^3-21x^2}{2x-10}$

37 **Calcula *a* y *b* para que se cumpla que:**

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

$3x+2=a(x+2)+b(x-1)$

Si $x=1 \Rightarrow 5=a\cdot 3 \Rightarrow a=5/3$

Si $x=2 \Rightarrow -4=b\cdot(-3) \Rightarrow b=4/3$

38 **Calcula *a, b* y *c,* sabiendo que:**

$$\frac{-2x^2-16x+2}{(x-1)\,(x+2)\,(x-5)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-5}$$

$a=\dfrac{4}{3}, b=\dfrac{26}{21}$ y $c=-\dfrac{32}{7}$

39 **Determina *A*, *B* y *C* para que se cumpla que:**

$$\frac{3x^2+5}{4x^3+16x^2+21x+9}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{(2x+3)^2}$$

$A=8, B=-\dfrac{29}{2}$ y $C=-\dfrac{47}{2}$

Ecuaciones polinómicas

40 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-5x+4=0$ **d)** $x^2-16=0$

b) $x^2-3x-4=0$ **e)** $2x^2+10x+8=0$

c) $x^2-6x-16=0$ **f)** $x^2-x-6=0$

a) $x_1=1, x_2=4$ *d)* $x_1=4, x_2=-4$

b) $x_1=4, x_2=-1$ *e)* $x_1=-4, x_2=-1$

c) $x_1=8, x_2=-2$ *f)* $x_1=3, x_2=-2$

41 **¿Qué valor debe tener *c* en la ecuación $x^2-5x+c=0$ para que esta no tenga soluciones reales?**

Imponiendo que el discriminante sea negativo $\Delta<0$:

$\Delta=25-4c<0 \Rightarrow -4c<-25 \Rightarrow 4c>25 \Rightarrow c>25/4$. En el intervalo $(25/4, +\infty)$ la ecuación no tendrá solución real.

42 **Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.**

a) $x^4+3x^2-4=0$ **c)** $x^4+5x^2+4=0$

b) $x^4-5x^2+4=0$ **d)** $x^4-10x^2+9=0$

a) $x=\pm1$ *c)* No tiene soluciones reales.

b) $x=\pm1, x=\pm2$ *d)* $x=\pm1, x=\pm3$

43 **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

b) $x^3+x^2-16x+20=0$

c) $x^4-x^3-24x^2+4x+80=0$

d) $2x^3-24x+32=0$

e) $x^3+9x^2+15x+7=0$

f) $2x^3-5x^2-4x+3=0$

g) $6x^3+25x^2-24x+5=0$

a) $x=1, x=-2, x=-3$

b) $x=-5, x=2$

c) $x=2, x=-2, x=-4, x=5$

d) $x=2, x=-4$

e) $x=-7, x=-1$

f) $x=-1, x=3, x=1/2$

g) $x=-5, x=1/3, x=1/2$

Ecuaciones racionales

44 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-\dfrac{64}{x^2}=-12$

b) $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=0$

c) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{x-3}$

d) $\dfrac{3x-3}{x-1}+\dfrac{x^2+2}{x+1}=\dfrac{7x+1}{x^2-1}$

a) $x=\pm2$

b) $x=-3$

c) No tiene solución.

d) $x=-3, x=2$

Ecuaciones con valor absoluto

45 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $|x^2 + 7x - 8| = 10$

b) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 6$

c) $|x^2 + 2| = 4$

a) $x_1 = -9, x_2 = 2, x_3 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2}, x_4 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}$

b) $x_1 = \dfrac{13}{5}, x_2 = \dfrac{11}{7}$

c) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones irracionales

46 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x = 1 + \sqrt{x^2 + 25}$

b) $\sqrt{2x+5} + 3 = 3x$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x+1}{2}$

d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

a) No tiene solución.

b) $x = 2$. No es solución $x = 2/9$.

c) $x = 4$. No es solución $x = -1$.

d) $x = 25/4$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

47 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

d) $3^{2x} = 12$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

i) $3^{x+1} = 2 \cdot 5^{2x}$

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

No se puede expresar la ecuación en función de una única potencia, por lo que se toman logaritmos decimales:

$-2x \log 2 = x + 1 \Rightarrow x(-2\log 2 - 1) = 1$

$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{2\log 2 + 1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

Se expresa la ecuación en función de 3^x, y se obtiene una ecuación de segundo grado con una incógnita:

$3 \cdot 3^x + \dfrac{3^{2x}}{9} = 162 \Rightarrow 27 \cdot 3^x + 3^{2x} = 1\,458$

$\Rightarrow 3^{2x} + 27 \cdot 3^x - 1\,458 = 0$

De esta ecuación se deduce que $3^x = 27$, por lo que $x = 3$.

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

Expresando los dos miembros bajo una única raíz:

$\sqrt[8]{2^{4x} \cdot 4^{2x} \cdot 8^x} = \sqrt[4]{2^{2x+7}} \Rightarrow \sqrt[8]{2^{11x}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

Igualando los exponentes:

$$\frac{11x}{8} = \frac{2x+7}{4} \Rightarrow x = 2$$

d) $3^{2x} = 12$

Tomando logaritmos:

$$2x \log 3 = \log 12 \Rightarrow x = \frac{\log 12}{2\log 3}$$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

$\dfrac{3^x}{3} + 3^x + 3 \cdot 3^x = 117$

$\Rightarrow 3^x\left(\dfrac{1}{3} + 1 + 3\right) = 117 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Se despeja e^{-x} y se aplican logaritmos:

$$0{,}4 + 0{,}4e^{-x} = 1 \Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

Sea $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = t$. Sustituyendo se tiene:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

con lo que las soluciones para t son 3 y $\dfrac{1}{2}$.

Si $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = 3$, tomando logaritmos:

$2x \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 3 \Rightarrow -2x \ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x = -\dfrac{\ln 3}{2 \cdot \ln 2}$

Si $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = \dfrac{1}{2}$, tenemos:

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2^{2x+3} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

Llamando $2^x = y$, tenemos:

$8y^2 + 4y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 16y^2 + 8y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}$

e $y = \dfrac{1}{4}$

Solo es válida la solución positiva, por lo que $x = -2$.

i) $3^{x-1} = 2 \cdot 5^{2x}$

Tomando logaritmos neperianos, tenemos:

$(x+1)\ln 3 = \ln 2 + 2x \ln 5 \Rightarrow x \ln 3 - 2x \ln 5 =$

$= \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow x(\ln 3 - 2\ln 5) = \ln 2 - \ln 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - 2\ln 5}$

48 **Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

b) $\ln(x+2)\log e = 1$

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

f) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1\,000$

g) $2x \cdot \ln x - 3x = 0$

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$8^4 = 4^{2x}$$

Ahora se expresan las potencias con la misma base:

$$2^{12} = 2^{4x} \Rightarrow x = 3$$

b) $\ln(x+2)\cdot\log e = 1$

En primer lugar, se deben expresar los logaritmos en la misma base.

Si llamamos $y = \log e$, podemos escribir: $10^y = e$

Tomando logaritmos neperianos en esta última igualdad se tiene que:

$$y\cdot\ln 10 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln 10} = \log e$$

Se sustituye y se obtiene:

$\ln(x+2)\cdot\dfrac{1}{\ln 10} = 1$, es decir:

$\ln(x+2) = \ln 10$, de lo que se deduce que $x = 8$.

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$\ln x \log e + \log e \ln x = 1$

$2\log e \ln x = 1$

Como $\log e = \dfrac{1}{\ln 10}$, sustituimos y se obtiene:

$$\ln x = \frac{\ln 10}{2} \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

Aplicamos logaritmos y se obtiene:

$(1+\log x)\log x = 1 + \log x \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

Aplicamos la definición de logaritmo y se obtiene:

$$(x+1)^2 = 25 \Rightarrow x = 4$$

f) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1\,000$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \log 1\,000 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} = 1\,000$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} = 10^6 \Rightarrow x+1 = 10^6 x \Rightarrow x = \frac{1}{(10^6-1)}$$

g) $2x\ln x - 3x = 0 \Rightarrow x(2\ln x - 3) = 0$

Observa que x no puede ser cero, porque $\ln 0$ no existe. Por tanto:

$$2\ln x = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2} = \sqrt{e^3}$$

Inecuaciones

49 Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $2 + x - x^2 > 0$

b) $\dfrac{(x+7)(x-5)}{x-2} \le 0$

c) $\dfrac{x^3+x}{x+1} < 0$

d) $x^3 + 1 \ge 0$

e) $-x^3 + 3x^2 + x - 3 < 0$

f) $x^2 - 6x + 8 > 0$

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \le 0$

a) $(-1, 2)$

b) $(-\infty, -7] \cup (2, 5]$

c) $(-1, 0)$

d) $[-1, +\infty)$

e) $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

f) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

g) $(-\infty, -1] \cup [1, 3]$

50 Resuelve estas inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{1-x}{x+2} \ge 0$

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x+5} \le 0$

c) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-9} < 0$

a) $(-2, 1]$

b) $(-\infty, -5) \cup [-2, 3]$

c) $(-3, -2) \cup (1/3, 3)$

51 Resuelve las siguientes inecuaciones.

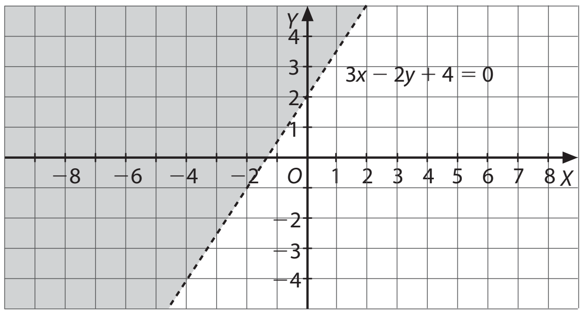
a) $3x - 2y + 4 < 0$

b) $4x + y - 2 \ge 0$

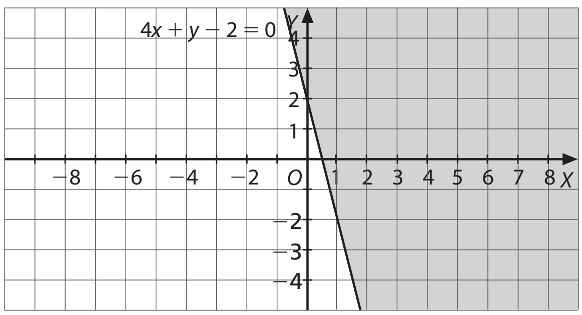
c) $7x \le 3y + 1$

d) $2x + 3y \ge 5$

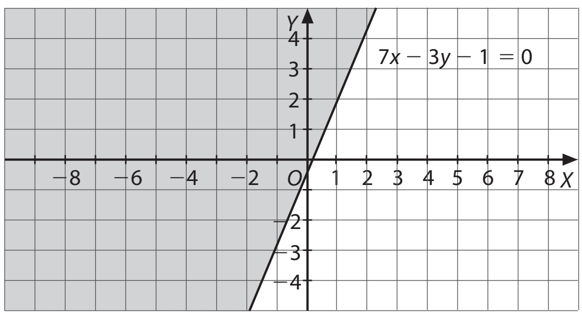
a)



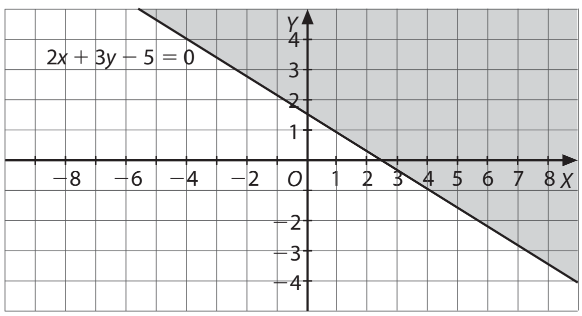
b)



c)



d)



Sistemas de ecuaciones

52 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando si son incompatibles o compatibles y, en este caso, si son determinados o indeterminados.**

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 = y \\ 2x = y - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 + x = y \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2x}{3} - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y+1}{2} = 1 \\ 4x - 7y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -(x+3) + \dfrac{x+y}{4} = -1 \\ \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{5y}{3} = x + \dfrac{12+5y}{3} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 7y = -22 \\ x + y = 5/2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (3/2)(x+y) = 2 + 4y \\ 3(x+2) - 5y = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2(x+2) = 24 - (3x+y) \\ 12 - 3(x+y) = 0 \end{cases}$

a) Compatible determinado: $x = 3, y = 7$

b) Incompatible

c) Compatible determinado: $x = 1, y = 4$

d) Compatible indeterminado: $x = y - 1$

e) Compatible indeterminado: $x = 12 - 3y$

f) Compatible determinado: $x = 3, y = 1$

g) Compatible indeterminado: $x = \dfrac{-8+y}{3}$

h) Compatible determinado: $x = -\dfrac{1}{2}, y = 3$

i) Incompatible

j) Compatible determinado: $x = 4, y = 0$

53 **Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + z = 5 \\ x + y - 3z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -2x + 3y - z = 4 \\ -2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 12 \\ x - y + 2z = -4 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+y) - 2z = -1 \\ 3x - 2y = 0 \\ -y + \dfrac{z}{2} = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y - 6z = 2 \\ -x + y = -1/4 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ 2(x-y) + 3(y-z) = 7 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5(x+1)}{6} \\ 2y - z = \dfrac{5x+y}{2} \\ x - 6 = z + 1 \end{cases}$

a) $x = 3, y = -1, z = 1$

b) $x = -8/9, y = 4/3, z = 16/9$

c) Compatible indeterminado: $x = -z, y = 4 + z$

d) $x = 1, y = 1, z = 1$

e) $x = 22/3, y = 11, z = 28$

f) $x = -39/32, y = -47/32, z = -25/32$

g) Incompatible

h) $x = 11/5, y = 7/15, z = -24/5$

54 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.**

a) $\begin{cases} xy + x^2 + y^2 = 7 \\ xy = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y = 3^x - 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy + x^2 + y^2 = 7 \\ xy = 2 \end{cases}$

despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, tenemos:

$$2 + x^2 + \frac{4}{x^2} = 7 \Rightarrow 2x^2 + x^4 + 4 = 7x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada obtenida, se obtiene:

$x = 1, y = 2$; $x = -1, y = -2$; $x = 2, y = 1$; $x = -2, y = -1$

b) $\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\dfrac{x+1}{y} = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{y} = 10 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 1/2$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2 + y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 4 + 4y + y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4y + 3 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4y + 3 = 1 \Rightarrow y = -1/2, x = \pm\sqrt{5}/2$

d) $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y = 3^x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ln 3 = \ln 3 - \ln y \\ y = 3^x - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \ln 3^x = \ln \dfrac{3}{y} \\ y = 3^x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = \dfrac{3}{y} \\ y = 3^x - 2 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{3}{y} - 2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene $y = 1$ e $y = -3$. Esta última solución no tiene sentido, puesto que no existen logaritmos de números negativos. La solución es: $x = 1, y = 1$.

Sistemas de inecuaciones

55 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.**

a) $\begin{cases} 3x - 1 < \dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6) \geq 8x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3} \geq x + 1 \\ 2(x-1) \geq 1 + \dfrac{x}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 1 < \dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6) \geq 8x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x < 1 \\ -5 \geq 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x < 1/13 \\ x \leq -5/9 \end{matrix}$

La solución del sistema es $x \leq -5/9$.

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3} \geq x + 1 \\ 2(x-1) \geq 1 + \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \geq 2x \\ 3x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{matrix}$

El sistema no tiene solución.

56 **Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones.**

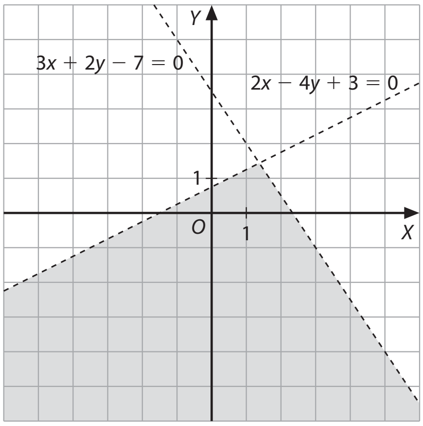
a) $\begin{cases} 3x + 2y - 7 < 0 \\ 2x - 4y + 3 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y - 7 \le 0 \\ y < 2 \end{cases}$

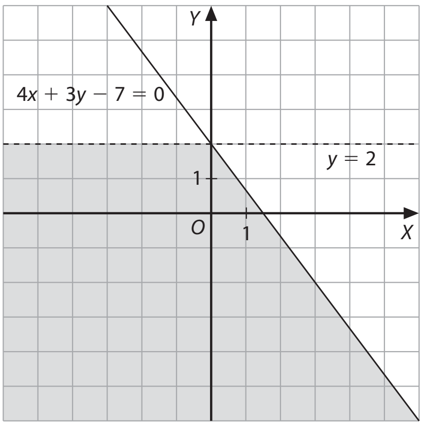
c) $\begin{cases} x > -1 \\ 3x - y < 0 \\ x + y > 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x < 5 \\ x + y - 2 > 0 \\ 3x - \dfrac{5(y+1)}{2} < 0 \end{cases}$

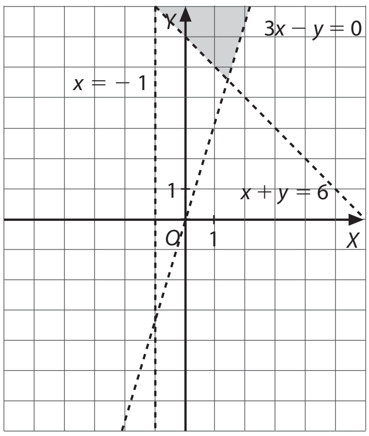
a)



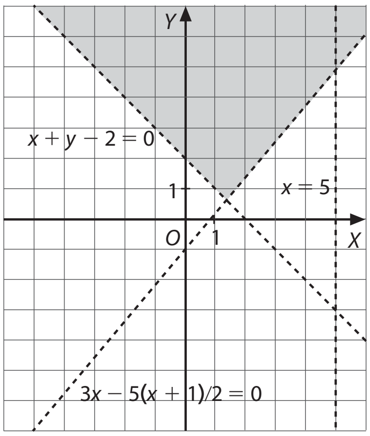
b)



c)



d)



57 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones no lineales.**

a) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ -2x^2 + 3x + 9 \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 12 \ge 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x} \le 0 \\ x^3 - 4x > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \le 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ -2x^2 + 3x + 9 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ [-3/2, 3] \end{matrix}$

La solución del sistema es $[-3/2, -1] \cup [2, 3]$.

b) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 12 \ge 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [2, 6] \\ (-3, -1) \end{matrix}$

No tiene solución.

c) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} - x \le 0 \\ x^3 - 4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ (-2, 0] \cup [2, +\infty) \end{matrix}$

La solución del sistema es $(-2, -1] \cup (2, +\infty)$.

d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 \le 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \{2\} \\ (0, +\infty) \end{matrix}$

La solución del sistema es $x = 2$.

58 **Resuelve gráficamente estos sistemas no lineales.**

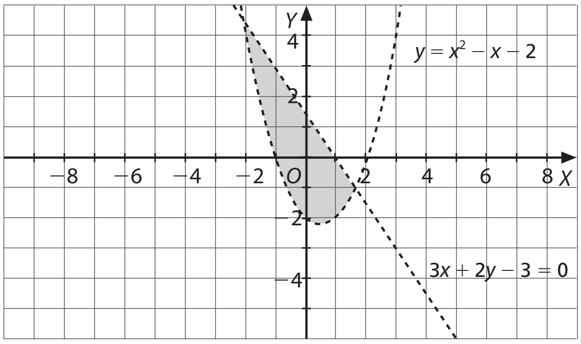
a) $\begin{cases} y > x^2 - x - 2 \\ 3x + 2y - 3 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 < x \\ x - y - 3 \ge 0 \end{cases}$

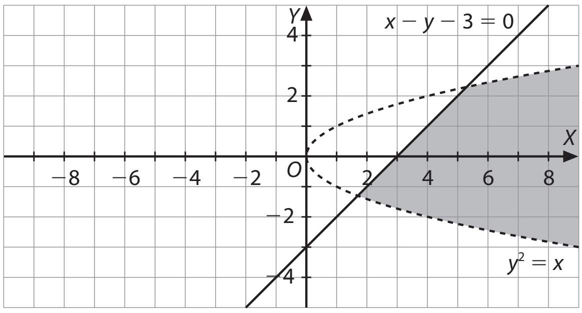
c) $\begin{cases} y < -x^2 + x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 < y \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > 1/x^2 \\ x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$

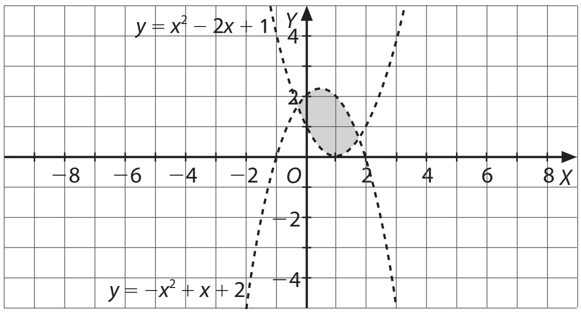
a)



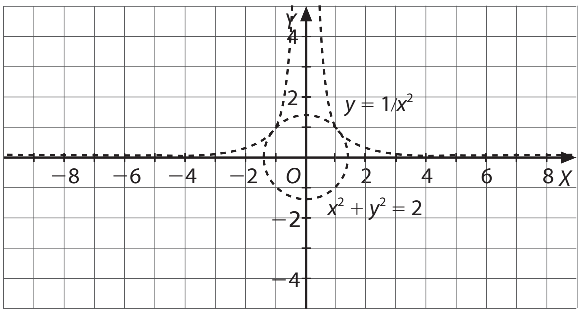
b)



c)



d)



Este sistema no tiene solución.

Problemas de aplicación

59 **Un padre tiene el doble de edad que su hijo, al que dentro de 15 años sacará 25 años. ¿Qué edades tienen los dos en la actualidad?**

Determinamos que x es la edad del hijo e y, la del padre. Como el padre tiene el doble de edad que su hijo, $y = 2x$. Y como dentro de 15 años le sacará 25 años, $(y + 15) = (x + 15) + 25$. El sistema que se plantea es el siguiente:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 15 = x + 15 + 25 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$x = 25$, $y = 50$

Por lo tanto, la edad del padre deberá ser 50 años y la del hijo, 25 años.

60 **Actualmente un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad del hijo será la cuarta parte de la suma de sus edades. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo actualmente?**

Si p es la edad del padre y x la del hijo, se debe plantear este sistema:

$$\begin{cases} p = 30 + x \\ x + 10 = \dfrac{x + p + 20}{4} \end{cases} \Rightarrow p = 35, x = 5$$

Por tanto, la edad del padre es 35 años y la del hijo, 5 años.

61 **La suma de las dos cifras de un número es 12. Si a este número le restamos 54, el resultado es igual al obtenido al cambiar de orden las cifras del número inicial. ¿De qué número se trata?**

Sea xy el número. Se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (10x + y) - 54 = 10y + 15 \end{cases} \Rightarrow x = 9, y = 3$$

Por tanto, el número es 93.

62 **Halla un número de dos cifras sabiendo que las decenas son el cuádruple de las unidades y que si invertimos sus cifras y sumamos el número resultante con el anterior, obtenemos 55.**

Si xy es el número inicial, se deben cumplir las dos ecuaciones de este sistema:

$$\begin{cases} x = 4y \\ 10(x + y) + x + y = 55 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 1$$

Por tanto, el número es 41.

63 **Determina qué número se diferencia de su cuadrado en 30 unidades.**

Si llamamos x al número:

$$x^2 - x = 30 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -5$$

Los números son $x_1 = 6$ y $x_2 = -5$.

64 **Un bodeguero vende 54 L de vino de dos tipos: uno de 2 €/L y el otro de 4 €/L. El precio total de la venta es 174 €. ¿Cuántos litros ha vendido de cada vino?**

Si llamamos x al vino de 2 €/L e y al de 4 €/L, obtenemos este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2x + 4y = 174 \end{cases} \Rightarrow x = 21, y = 33$$

Por tanto, el bodeguero ha vendido 21 L de vino de 2 €/L y 33 L del que cuesta 4 €/L.

65 **Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres números consecutivos. Averigua las medidas de dicho triángulo, en cm.**

Si llamamos x a la longitud del lado más pequeño, se obtiene esta ecuación: $(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + x^2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

Las longitudes de los lados del triángulo son 3, 4 y 5 cm.

66 **Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede construir un cuadrado de 65 cm² de superficie. Uno de los catetos de dicho triángulo mide 3 cm más que el otro. Averigua el área del triángulo.**

El cuadrado de la hipotenusa coincide con el valor de la superficie del cuadrado que se construye sobre ella, y uno de los catetos es 3 cm más largo que el otro. Se puede plantear esta ecuación: $65 = x^2 + (x + 3)^2$

La solución es $x = 4$, por lo que el otro cateto mide 7 cm.

El área del triángulo es, por tanto:

$$A = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

67 **Calcula el área de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 32 cm y cuyo lado desigual es de 12 cm.**

Cada uno de los dos lados iguales mide: $\frac{32-12}{2}=10$ cm

Así, la altura del triángulo es $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$ cm.

Por tanto, $A=\frac{12\cdot 8}{2}=48$ cm^2.

68 **Un grifo tarda 3 h en llenar un depósito, mientras que otro solo necesita 2 h. ¿Cuánto tiempo emplearán los dos grifos en llenarlo si están funcionando a la vez?**

Si x es el tiempo que tardan los dos grifos en llenarlo, a es el caudal del primer grifo y b, el del segundo, se obtienen estas ecuaciones:

$3a=V$

$2b=V$

$x(a+b)=V \Rightarrow x(a+3a/2)=3a \Rightarrow x=1{,}2$ h $=1$ h 12 min

Los dos grifos a la vez tardan 1 h y 12 min en llenar el depósito.

69 **Dos grifos llenan un recipiente en 10 s. Si uno de ellos lo llena en 14 s, ¿en cuánto tiempo lo llena el otro?**

Los dos grifos, a y b, llenan un determinado volumen en 10 s: $(a+b)\cdot 10=V$.

El grifo a lo llena en 14 s: $a\cdot 14=V$.

Despejando a y sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene:

$$\left(\frac{V}{14}+b\right)\cdot 10=V \Rightarrow b=\frac{V}{10}-\frac{V}{14} \Rightarrow b=\frac{V}{35}$$

Por tanto, el segundo grifo llena el recipiente de volumen V en 35 s.

70 **Tres amigos invierten 10 000 €, 40 000 € y 50 000 €, respectivamente, para abrir un negocio. Tras finalizar el primer ejercicio económico y al repartir los beneficios, el segundo de los amigos obtiene 2 400 € más que el primero. ¿Cuáles son los beneficios del negocio?**

Si x son los beneficios del primero (el que puso 10 000 €), entonces el del segundo (que invirtió 40 000 €) habrá tenido unos beneficios de $(x+2\,400)$. Observa la relación entre los dos:

$$\frac{x}{10\,000}=\frac{x+2\,400}{40\,000} \Rightarrow x=800$$

Para obtener los beneficios del tercero, y, se resuelve esta ecuación:

$$\frac{800}{10\,000}=\frac{y}{50\,000} \Rightarrow y=4\,000$$

Por tanto, los beneficios de los tres amigos son, respectivamente, 800 €, 3 200 € y 4 000 €.

71 **Los beneficios de una empresa se reparten entre tres socios: uno recibe la mitad, otro el 60 % de lo que queda y el tercero, 3 700 €. ¿A cuánto ascendían los beneficios? ¿Qué porcentaje de capital había puesto cada uno de ellos, si suponemos que los beneficios se reparten de forma proporcional al capital invertido?**

Si b son los beneficios, se debe plantear esta ecuación:

$$\frac{b}{2}+0{,}6\,\frac{b}{2}+3\,700=b \Rightarrow b=18\,500$$

Por tanto, los beneficios de la empresa son 18 500 €.

Y se reparte, respectivamente, 50 %, 30 % y 20 %.

72 **Una hipoteca aumenta dos veces durante un año: la primera un 0,75 %, y la segunda, un 1,25 %. Calcula el importe de la mensualidad inicial si ha sufrido en total un incremento de 10 €.**

$$\left.\begin{array}{l} y=x\cdot 1{,}0075\cdot 1{,}0075 \\ y=x=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x=498,\ y=508$$

Así, la mensualidad inicial era de 498 €.

73 **Un cierto capital se coloca a lo largo de un año al 1,25 % anual. Transcurrido el año, se coloca el capital final al 4 % anual durante otro año. Si al final del segundo año se ha obtenido un beneficio total de 2 650 %, ¿cuál fue el capital invertido?**

Si C es el capital invertido, se debe plantear:

$$C\cdot 1{,}0125\cdot 1{,}04-C=2\,650 \Rightarrow C=50\,000$$

Se han invertido 50 000 €.

74 **Una población de 10 000 habitantes sufre primero un descenso y después, gracias a la inmigración, llega a ser de 11 520 habitantes. Sabiendo que el porcentaje de aumento ha sido 5 veces mayor que el porcentaje de disminución, averigua qué porcentajes de disminución y aumento ha sufrido la población.**

Si x es el porcentaje de disminución, se plantea esta ecuación:

$$11\,520=10\,000\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{5x}{100}\right)$$

$$\Rightarrow 5x^2-400x+1\,520=0 \Rightarrow x=76 \text{ y } x=4$$

Por tanto, deducimos que la población sufre un 4 % de disminución y un 20 % de aumento, o 76 % de disminución y 380 % de aumento.

75 **Con una lámina cuadrada de cartón de 121 cm^2 de superficie, se desea construir una caja sin tapa que tenga una capacidad de 75 cm^3, cortando cuatro cuadrados idénticos en cada esquina. Determina las dimensiones de los cuadrados que debemos recortar de la lámina original.**

Si x es el lado del cuadrado que se recorta, el área de la base de la caja es:

$$(11-2x)^2$$

Al multiplicar la base, $(11-2x)^2$, por la altura, x, se obtiene la capacidad, la cual se iguala a 75:

$$x(11-2x)^2=75$$

Operando, se obtiene la ecuación:

$$4x^3-44x^2+121x-75=0$$

Con el teorema del resto y la regla de Ruffini se deduce que una solución es $x=3$ cm:

$$4x^3-44x^2+121x-75=(x-3)(4x^2-32x+25)=0$$

Solucionando la ecuación de 2.° grado $4x^2-32x+25=0$, se obtiene la otra solución, $x=0{,}878$ cm.

76 **En el mercado, Pedro se ha gastado 11,60 € por la compra de patatas, manzanas y naranjas que costaban, respectivamente, 1 €/kg, 1,20 €/kg y 1,50 €/kg. ¿Cuántos kilos ha comprado de cada alimento si entre todos han pesado 9 kg y, además, se ha llevado 1 kg más de naranjas que de manzanas?**

Llamamos x a los kilos de patatas; y, a los de manzanas, y z, a los de naranjas. Se plantea el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ x+1{,}20y+1{,}50z=11{,}60 \\ z=y+1 \end{array}\right. \Rightarrow x=2,\ y=3,\ z=4$$

Por tanto, Pedro compró 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

77 **Una familia tiene unos ingresos al mes de 3 250 € por los sueldos de la madre, el padre y el hijo. Si la madre gana el doble que el hijo, y el padre 2/3 de lo que recibe la madre, ¿cuánto gana cada uno de los miembros de la familia?**

Si x es el sueldo del padre; y, el de la madre, y z, el del hijo, podemos plantear este sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3\,200 \\ y = 2z \\ x = 2y/3 \end{cases} \Rightarrow x = 1\,000,\ y = 1\,500,\ z = 750$$

Por tanto, el padre gana 1 000 €, la madre, 1 500 € y el hijo, 750 €.

78 **Calcula tres números sabiendo que el tercero es igual a dos veces el primero más el segundo; que el segundo es la cuarta parte del doble del primero más el tercero, y que si se resta al tercero la suma del primero más el segundo, el resultado da 3.**

Llamamos x al primer número, y al segundo y z al tercero. Se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} z = 2x + y \\ y = 1/4\,(2x + z) \\ x = 2y/3 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 4,\ z = 10$$

Por tanto, los números son, respectivamente, 3, 4 y 10.

79 **Determina los valores de *a, b* y *c* para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos (1, 0), (−1, 10) y (3, 14).**

Si imponemos que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por esos puntos, habrá que sustituir cada punto en la ecuación y así obtener tres ecuaciones. Con ellas se forma este sistema:

$$\begin{cases} (1, 0) \rightarrow 0 = a + b + c \\ (-1, 10) \rightarrow 10 = a - b + c \Rightarrow a = 3,\ b = -5,\ c = 2 \\ (3, 14) \rightarrow 14 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 3x^2 - 5x + 2$.

1. Dados los polinomios $p(x) = 4x^5 - 6x^4 + x^3 - 3x + 1$ y $q(x) = 2x^3 - x + 1$, realiza $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y comprueba que se cumple que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$.

$$\begin{array}{l|l}
4x^5 - 6x^4 + x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & 2x^3 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^5 \qquad + 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + \frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
\quad -6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 & \\
\quad +6x^4 \qquad - 3x^2 + 3x & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x^3 - 5x^2 \qquad + 1 & \\
\qquad -3x^3 \qquad + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -5x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} &
\end{array}$$

$c(x) = 2x^2 - 3x + \dfrac{3}{2}$ $\qquad r(x) = -5x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

Se puede comprobar que se cumple la relación: $4x^5 - 6x^4 + x^3 - 3x + 1 = (2x^3 - x + 1) \cdot \left(2x^2 - 3x + \dfrac{3}{2}\right) + \left(-5x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}\right)$

2. Averigua cuánto deben valer a y b para que esta división $(4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + ax + b) : (4x^2 - 10x + 1)$ sea exacta.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 10x^3 + 5x^2 + ax + b & 4x^2 - 10x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 + 10x^3 - x^2 & x^2 + 1 \\ \cline{1-1}
\qquad 4x^2 + ax + b & \\
\qquad -4x^2 + 10x - 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad (10 + a)x + (b - 1) &
\end{array}$$

Para que la división sea exacta el resto debe ser 0. Por tanto: $a = -10$, $b = 1$

3. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\mathbf{x^5 - 4x^4 - 12x^3 + 34x^2 + 11x - 30 = 0}$

b) $\mathbf{\dfrac{x - 22}{x} + \dfrac{x + 4}{x - 1} = \dfrac{x - 6}{3 - x}}$

c) $\mathbf{\sqrt{x + 22} - 1 = \sqrt{19 - x}}$

d) $\mathbf{3 \cdot 4^x + 2^x + 15 = 215}$

e) $\mathbf{2 \cdot \log x - \log (2x) = 2}$

f) $\mathbf{|x + 5| = 3}$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & +1 & -4 & -12 & +34 & +11 & -30 \\
+1 & & +1 & -3 & -15 & +19 & +30 \\ \hline
 & +1 & -3 & -15 & +19 & +30 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & +1 & -4 & -11 & +30 \\
+2 & & +2 & -4 & -30 \\ \hline
 & +1 & -2 & -15 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & +1 & -3 & -15 & +19 & +30 \\
-1 & & -1 & +4 & +11 & -30 \\ \hline
 & +1 & -4 & -11 & +30 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & +1 & -2 & -15 \\
-3 & & -3 & +15 \\ \hline
 & +1 & -5 & 0
\end{array}$$

$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -3, x_5 = 5$

b) Operando: $(x - 22)(x - 1)(3 - x) + x(x + 4)(3 - x) = x(x - 6)(x - 1)$

$3x^3 - 32x^2 + 85x - 66 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -32 & +85 & -66 \\
2 & & 6 & -52 & +66 \\ \hline
 & 3 & -26 & 33 & 0
\end{array}$$

$3x^2 - 26x + 33 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}\left(13 - \sqrt{70}\right), x_2 = \dfrac{1}{3}\left(13 + \sqrt{70}\right), x_3 = 2$

c) $\left(\sqrt{x + 22} - 1\right)^2 = 19 - x$

$x + 22 + 1 - 2\sqrt{x + 22} = 19 - x$

$x + 2 = \sqrt{x + 22}$

$(x + 2)^2 = x + 22$

$x^2 + 4 + 4x = x + 22$

$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 3$ $\qquad$ La única solución válida es $x = 3$.

d) $3 \cdot 2^{2x} + 2^x - 200 = 0 \Rightarrow 2^x = t \Rightarrow 3t^2 + t - 200 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{25}{3}, t = 8 \Rightarrow x = 3$

e) $\log x^2 - \log(2x) = \log 10^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2x} = 10^2 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 100 \Rightarrow x = 200$

f) $x + 5 = 3 \Rightarrow x = -2 \qquad x + 5 = -3 \Rightarrow x = -8$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 + 5x + 9 \leq 3$

b) $\dfrac{x+3}{2x-4} \geq 1$

a) $x^2 + 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x+3)(x+2) \leq 0$

		-3		-2	
$(x+3)$	$-$		$+$		$+$
$(x+2)$	$-$		$-$		$+$
$(x+3)(x+2)$	$+$		$-$		$+$

$x \in [-3, -2]$

b) $\dfrac{x+3}{2x-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+3-2x+4}{2x-4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{-x+7}{2x-4} \geq 0$

		$+2$		$+7$	
$(-x+7)$	$+$		$+$		$-$
$(2x-4)$	$-$		$+$		$+$
$(-x+7)(2x-4)$	$-$		$+$		$-$

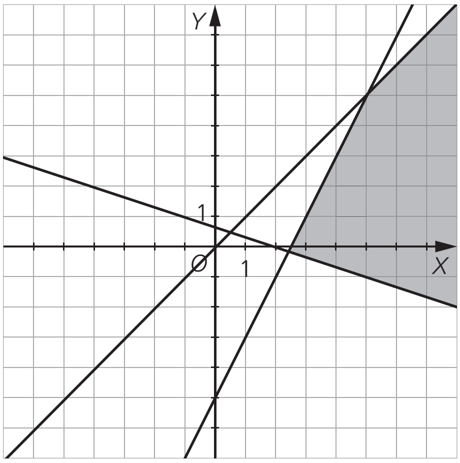
$x \in (2, 7]$

5. Halla y representa la región solución de estos sistemas de inecuaciones.

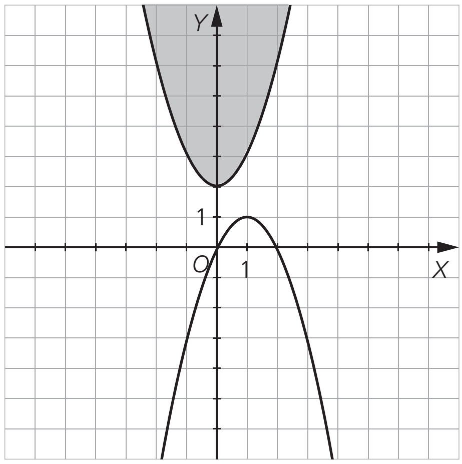
a) $\begin{cases} x + 3y \geq 2 \\ 2x - y \geq 5 \\ -x + y \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y - 2x \geq 0 \\ x^2 - y \leq -2 \end{cases}$

a)



b)



6. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 3x - 2y - z = 6 \\ 5x - 4y + z = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 5y - 4z = -3 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 5y - 4z = -3 \\ 6z = 12 \end{cases}$

$z = 2, y = 1, x = 1$ Es un sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ -y + 4z = 9 \\ -y + 4z = 21 \end{cases}$ Es un sistema incompatible. No tiene solución.

7. Al dividir un número de tres cifras entre la suma de todas ellas, se obtiene 38 de cociente y 3 de resto. Si la cifra de las centenas es igual a la mitad de la suma de las otras dos, y la cifra de las decenas es igual a la suma de las unidades y las centenas, ¿cuál es el número de tres cifras inicial?

El número es *XYZ*. Lo podemos expresar como $100 \cdot X + 10 \cdot Y + Z$. Planteamos tres ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 100 \cdot X + 10 \cdot Y + Z = (X + Y + Z) \cdot 38 + 3 \\ X = \dfrac{Y+Z}{2} \\ Y = Z + X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 62X - 28Y - 37Z = 3 \\ 2X - Y - Z = 0 \\ -X + Y - Z = 0 \end{cases} \qquad X = 2, Y = 3, Z = 1$$

8. En una reunión de 120 personas, todos son matemáticos o físicos. Los matemáticos hombres son la mitad del total de las mujeres, de las cuales 25 son físicos. Si hay más de 44 físicos hombres y más de 24 matemáticos mujeres, ¿cuántas personas de cada especialidad y género hay? Explica cómo has resuelto el problema.

Matemáticos hombres: Y_1 Matemáticos mujeres: X_1 Físicos hombres: Y_2 Físicos mujeres: X_2

$X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 = 120 \qquad Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \qquad X_2 = 25 \qquad Y_2 > 44 \qquad X_1 > 24$

Deducimos que: $Y_1 > \dfrac{24 + 25}{2} \Rightarrow Y_1 \geq 25$

Los únicos números que cumplen todas las condiciones son: $X_1 = 25$, $Y_1 = 25$, $X_2 = 25$, $Y_2 = 45$