3 ÁLGEBRA

Página 69

REFLEXIONA Y RESUELVE

Puñado de almendras

Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos.

Ante un saco de almendras, el dueño les dijo:

— Coged las que queráis.

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- ***¿Cómo se llama el hijo de Antonio?***
- ***¿Y el de Juan?***
- ***¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?***

• 2.° caso: 15 × 3

$(x + y)\,(x - y) = 45$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \;\rightarrow\; x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \;\rightarrow\; y = 6 \end{array}$$

Esto significa que otro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

• 3.^{er} caso: 45 × 1

$(x + y)\,(x - y) = 45$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \;\rightarrow\; x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \;\rightarrow\; y = 22 \end{array}$$

Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo, 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados y José 6.
- Juan coge 23 puñados y Julio 22.
- Pablo se lleva 7 puñados y Luis 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Sin necesidad del álgebra

Un galgo persigue a una liebre.

La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre.

¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada $2 \cdot 2$ saltos de galgo y $3 \cdot 2$ de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada $2 \cdot 3$ saltos de galgo y $3 \cdot 3$ de liebre se acerca 3 u el galgo.

… …

Cada $2 \cdot 90$ saltos de galgo y $3 \cdot 90$ de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ saltos el galgo}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ saltos la liebre}$$

De esta forma el galgo recorre $180 \cdot 5\ u = 900\ u$; y la liebre $270 \cdot 3\ u = 810\ u$.

Como tenía 90 de ventaja: $810 + 90 = 900\ u$

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos y la liebre 270.

Página 71

1. Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

	1	–9	24	–20
2		2	–14	20
	1	–7	10	0
2		2	–10	
	1	–5	0	

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2\,(x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

	1	–3	–3	–5	2	8
1		1	–2	–5	–10	–8
	1	–2	–5	–10	–8	0
–1		–1	3	2	8	
	1	–3	–2	–8	0	
4		4	4	8		
	1	1	2	0		

$x^2 + x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$

no tiene solución

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

	1	6	9	0	–1	–6	–9
–1		–1	–5	–4	4	–3	9
	1	5	4	–4	3	–9	0
–3		–3	–6	6	–6	9	
	1	2	–2	2	–3	0	
–3		–3	3	–3	3		
	1	–1	1	–1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

$x^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -1 \;\rightarrow\;$ no tiene solución

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

2. a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 & x^2 + x + 1 \\
\cline{3-3}
 & -x^4 - x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 4 \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 & \\
 & -3x^3 - 3x^2 - 3x & \\
\cline{2-2}
 & 4x^2 + 4x + 4 & \\
 & -4x^2 - 4x - 4 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución). Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)\,(x^2 + 3x + 4)$$

3. **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

	6	7	6	0	–1
–1/2		–3	–2	–2	1
	6	4	4	–2	0
1/3		2	2	2	
	6	6	6	0	

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm\sqrt{1-4}}{2}$ no tiene solución

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) 6(x^2 + x + 1) = (2x + 1)\,(3x - 1)\,(x^2 + x + 1)$$

Página 73

1. **Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:**

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2 + x = x(x+1) \\ x + 1 = x + 1 \end{array}\right\} \text{mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)\,(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 + 8x + 7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 8x + 7 + x - 2 - 2x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{-x^2 + 8x + 5}{x^2 + x}$$

2. Efectúa: $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

Página 74

3. Efectúa estas operaciones:

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$ **b)** $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}=\frac{(x^2-2x+3)\,(2x+3)}{(x-2)\,(x+5)}=$$

$$=\frac{2x^3+3x^2-4x^2-6x+6x+9}{x^2+5x-2x-10}=\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

b) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}=\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{x+5}{2x+3}=\frac{(x^2-2x+3)\,(x+5)}{(x-2)\,(2x+3)}=$$

$$=\frac{x^3-2x^2+3x+5x^2-10x+15}{2x^2+3x-4x-6}=\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$$

4. Calcula:

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$ **b)** $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{x+2}{x}:\frac{(x-1)x}{3(2x+1)}=\frac{x+2}{x}\cdot\frac{3(2x+1)}{(x-1)x}=$$

$$=\frac{3(2x+1)\,(x+2)}{x^2(x-1)}=\frac{3(2x^2+4x+x+2)}{x^3-x^2}=$$

$$=\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$$

b) $$\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4}=\frac{(x^4-x^2)\,(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4}=\frac{x^8-x^4}{x^6+x^4}=\frac{x^4(x^4-1)}{x^4(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)\,(x^2-1)}{x^2+1}=x^2-1$$

Página 75

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 12 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 8x^2 - 9 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2 \\ -3 \;\rightarrow\; \text{(no vale)} \end{cases}$ 2 y –2

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \;\rightarrow\; x = \pm 3 \\ -1 \;\rightarrow\; \text{(no vale)} \end{cases}$ 3 y –3

2. Resuelve:

a) $\boldsymbol{x^4 + 10x^2 + 9 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - x^2 - 2 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \;\rightarrow\; \text{(no vale)} \\ -9 \;\rightarrow\; \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \;\rightarrow\; \text{No vale} \\ x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 76

3. Resuelve:

a) $\boldsymbol{-\sqrt{2x-3} + 1 = x}$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4}$ **c)** $\boldsymbol{2 + \sqrt{x} = x}$

d) $\boldsymbol{2 - \sqrt{x} = x}$ **e)** $\boldsymbol{\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0$; $x = \dfrac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \;\rightarrow\; \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2; \quad x = x^2 + 4 - 4x; \quad 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x}; \quad 4 + x^2 - 4x = x; \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \begin{cases} 4 \to \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8 - 2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8 - 2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

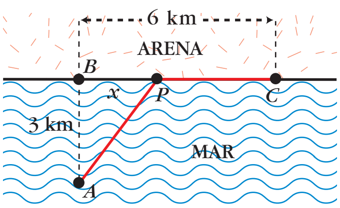
$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0{,}08 \to \text{no vale} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

4. **Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P, y hemos caminado a 5 km/h de P a C. Hemos tardado, en total, 99 minutos (99/60 horas).**

¿Cuál es la distancia, x, de B a P?



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AP}^2 = x^2 + 9 \\ \\ \overline{PC} = 6 - x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = t \\ \\ \dfrac{6 - x}{5} = \left(\dfrac{99}{60} - t\right) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \\ \\ t = -\dfrac{6 - x}{5} + \dfrac{99}{60} \end{array}\right\} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} = \frac{99}{60}$$

$15\sqrt{x^2+9} + 12(6-x) = 99$

$15\sqrt{x^2+9} + 72 - 12x = 99$

$15\sqrt{x^2+9} = 12x + 27$

$225(x^2+9) = 144x^2 + 729 + 648x$

$225x^2 + 2\,025 = 144x^2 + 729 + 648x$

$81x^2 - 648x + 1\,296 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$x = \frac{8}{2} = 4$

Así, la distancia de B a P es de 4 km.

Página 77

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

a) $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30$

$x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489$; $x_2 = -1{,}822$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12$; $x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3$; $x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2$; $0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2$; $x_2 = \frac{-2}{3}$

6. Resuelve:

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

b) $10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -4$

c) $35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35(x^2 + 4x + 3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ \ x_2 = \dfrac{-8}{13}$

Página 79

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2} = \dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$ **d)** $7^{x+2} = 5\,764\,801$

a) $2^{3x} = 2^{-3x-2};\ \ 3x = -3x - 2;\ \ 6x = -2;\ \ x = \dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2} = 3^{-2};\ \ 4 - x^2 = -2;\ \ x^2 = 6;\ \ x = \pm\sqrt{6}$

$x_1 = \sqrt{6};\ \ x_2 = -\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186;\ \ 2^{2x-2-x-2} = 186;\ \ 2^{x-4} = 186$

$log\ 2^{x-4} = log\ 186;\ \ (x-4)\ log\ 2 = log\ 186$

$x = 4 + \dfrac{log\ 186}{log\ 2} = 11{,}54$

d) $7^{x+2} = 7^8;\ \ x = 6$

8. **Resuelve:**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $2\,log\ x - log(x+6) = 3log\ 2$

d) $4\,log_2(x^2+1) = log_2\ 625$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30$

$3^x(10) = 30;\ \ 3^x = 3;\ \ x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{31}{5}$

$5^x \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31}{5};\ \ x = 0$

c) $log\ \dfrac{x^2}{x+6} = log\ 8$

$x^2 = 8x + 48;\ \ x^2 - 8x - 48 = 0;\ \ x = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4\ \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

d) $log_2(x^2+1)^4 = log_2\ 5^4;\ \ x^2 + 1 = 5;\ \ x^2 = 4;\ \ x = \pm 2$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2$

Página 81

1. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{array}\right\}$

$x^2 - 9 = 2x - 1;\ \ x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ \ y_1 = 7$

$x_2 = -2;\ \ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

$y = 5 - x$

$x(5 - x) = 6;\ \ 5x - x^2 = 6;\ \ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ \ y_1 = 3$

$x_2 = 3;\ \ y_2 = 2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2;\ \ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ \ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ \ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ \ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \ \rightarrow\ x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ \ y = 8$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ \ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ \ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \ \rightarrow\ y = -4 \\ -4 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}$

$x_1 = -4;\ \ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ \ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2+y}{x-2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

Página 82

1. Reconoce como escalonados y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x-8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{rl} y &= 4 \\ x - z &= 11 \\ y - z &= 7 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

2. **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\left\{\begin{array}{rl} y &= -5 \\ 2z &= 8 \\ 3x &= 3 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rl} x + 2y - z &= -3 \\ 3x + y &= -5 \\ 5y &= -10 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rl} x - 5y + 3z &= 8 \\ 3y - z &= 5 \\ 4z &= 4 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rl} 4x + y - z &= 7 \\ 2y &= 8 \\ 3x &= 9 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{rl} y &= -5 \\ 2z &= 8 \\ 3x &= 3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{rl} x + 2y - z &= -3 \\ 3x + y &= -5 \\ 5y &= -10 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{rl} x - 5y + 3z &= 8 \\ 3y - z &= 5 \\ 4z &= 4 \end{array}\right\}\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 8 + 10 - 3 = 15 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{rl} 4x + y - z &= 7 \\ 2y &= 8 \\ 3x &= 9 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$

Página 83

3. **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x-y+z=6\\ x-y-z=0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=14\\ x-2y+z=-3\\ 2x-y-z=9 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x-y+z=6\\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a\\ 2.^a+1.^a\\ 3.^a+1.^a \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ 2x+2z=8\\ 2x=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x+z=4\\ x=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\\ z=4-x=3\\ y=2-x-z=2-1-3=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1\\ y=-2\\ z=3 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=14\\ x-2y+z=-3\\ 2x-y-z=9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a\\ 2.^a\\ 3.^a+2.^a \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=14\\ x-2y+z=-3\\ 3x-3y=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a\\ 2.^a\\ 3.^a+1.^a \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=14\\ x-2y+z=-3\\ 5x=20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{20}{5}=4\\ y=\dfrac{14-2x}{3}=2\\ z=-3-x+2y=-3-4+4=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4\\ y=2\\ z=-3 \end{array}$$

4. **Resuelve:**

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} 5x-4y+3z=9\\ 2x+y-2z=1\\ 4x+3y+4z=1 \end{array}\right.$$

$$\textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x-5y+4z=-1\\ 4x-5y+4z=3\\ 5x-3z=13 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} 5x-4y+3z=9\\ 2x+y-2z=1\\ 4x+3y+4z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a+4\cdot 2.^a\\ 2.^a\\ 3.^a-3\cdot 2.^a \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 13x-5z=13\\ 2x+y-2z=1\\ -2x+10z=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\cdot 1.^a+3.^a\\ 2.^a\\ 3.^a:2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 24x=24\\ 2x+y-2z=1\\ -x+5z=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=1\\ z=\dfrac{-1+x}{5}=0\\ y=1-2x+2z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1\\ y=-1\\ z=0 \end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x \quad\quad - 3z = 13 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a\end{array}}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x \quad\quad\quad\quad = 4 \\ 5x \quad\quad - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$

Página 84

5. Intenta resolver por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y \quad\quad = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \quad\quad + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \quad\quad + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y \quad\quad = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a\end{array}}$ $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \\ 2x - y \quad\quad = 0 \end{cases}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a\end{array}}$ $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a\end{array}}$ $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y \quad\quad = 1 \\ 0 \quad\quad\quad\quad = 0 \end{cases}$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

(2.ª) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1.ª) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ Para $x = -2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$

c) $\left\{\begin{array}{l} x \quad\;\; + \; z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{array}$ ▶ $\left\{\begin{array}{l} x \quad\;\; + \; z = 3 \\ 3x \quad\; + 3z = 10 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ ▶

$\left\{\begin{array}{l} x \quad\;\; + \; z = 3 \\ 0x \quad\; + 0z = 1 \\ x + y - \; z = 2 \end{array}\right.$ La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1.
Por tanto, el sistema no tiene solución.

d) $\left\{\begin{array}{l} x \quad\;\; + \; z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{array}$ ▶ $\left\{\begin{array}{l} x + \quad\;\; z = 3 \\ 3x + \quad 3z = 9 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ ▶

$\left\{\begin{array}{l} x + \quad\;\; z = 3 \\ 0x + \quad 0z = 0 \\ x + y - \; z = 1 \end{array}\right.$ La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\left\{\begin{array}{l} x + \quad z = 3 \;\rightarrow\; x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \;\rightarrow\; y = 1 - x + z = 1 - (3 - z) + z = -2 + 2z \end{array}\right.$$

Soluciones: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{array}\right.$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \;\rightarrow\; x = 3,\; y = -2$

Para $z = 4 \;\rightarrow\; x = -1,\; y = 6$

Página 85

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $\mathbf{3x - 2 \le 10}$ **b)** $\mathbf{x - 2 > 1}$

c) $\mathbf{2x + 5 \ge 6}$ **d)** $\mathbf{3x + 1 \le 15}$

a) $3x - 2 \le 10 \;\rightarrow\; 3x \le 12 \;\rightarrow\; x \le 4$

Soluciones: $\{x \,/\, x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \;\rightarrow\; x > 3$

Soluciones: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \;\rightarrow\; 2x \ge 1 \;\rightarrow\; x \ge \dfrac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \ge \dfrac{1}{2}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \;\rightarrow\; 3x \le 14 \;\rightarrow\; x \le \dfrac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right]$

2. **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} \mathbf{3x - 2 \le 10} \\ \mathbf{x - 2 > 1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x + 5 \ge 6} \\ \mathbf{3x + 1 \le 15} \end{cases}$

Obserevamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones*: $\{x \,/\, 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \le \dfrac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones*: $\left\{x \,/\, \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{14}{3}\right]$

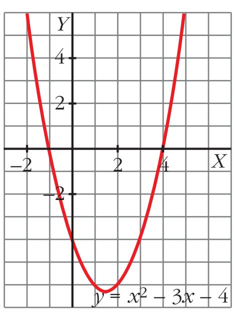
Página 86

3. **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 4 < 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 3x - 4 \ge 0}$

c) $\mathbf{x^2 + 7 < 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 - 4 \le 0}$

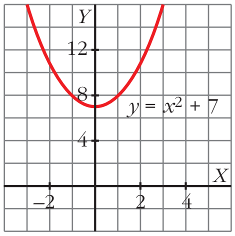
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \;\rightarrow\;$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución

d) $x^2 - 4 \le 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

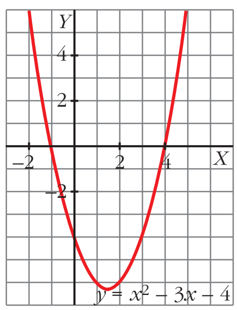
Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \ \rightarrow \ 2x > 12 \ \rightarrow \ x > 6 \ \rightarrow \ (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \ \rightarrow \ (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array} \right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo [–2, 2]. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

  $x - 4 > 1 \ \rightarrow \ x > 5 \ \rightarrow \ (5, +\infty)$
- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Página 87

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. **De las siguientes igualdades, ¿cuáles son identidades?**

a) $(x - 3)(x - 2)x = x^3 - 5x^2 + 6x$

b) $(x - 3)(x - 2)x = x^3$

c) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $\dfrac{x^3 - 3x - 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 - \dfrac{3}{x - 2}$

Comprueba, en ellas, que la igualdad es cierta para cualesquiera valores de las variables (haz la comprobación para varios números).

Son identidades a), c) y d).

2. **Resuelve, paso a paso, la ecuación**

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

y explica en cada paso por qué la ecuación que se obtiene es equivalente a la que había.

Cuando el paso consista en obtener una expresión idéntica a otra, señala cuál es la expresión transformada, cuál es la obtenida y qué operación permite pasar de la una a la otra.

$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$

$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$

En el primer miembro se ha efectuado la multiplicación:

$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$.

Ha convenido ponerlo en forma polinómica para poder simplificar en el segundo miembro.

$9x^2 = 36$

Esta ecuación es equivalente a la anterior porque se han simplificado algunos términos de ambos miembros.

$x^2 = 36 : 9 = 4$

Ecuación equivalente, por haber dividido los dos miembros por 9.

$x = \pm 2$

Página 92

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Factorización

1 **Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ **d)** $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

e) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$ **f)** $x^5 - 16x$

g) $4x^2 - 25$ **h)** $4x^2 + 4x + 1$

a) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) \to$ Raíces: $-1, 1, 2$

b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) \to$ Raíces: $1, -1, 2, -2$

c) $(x - 1)(x + 2)(4x - 10) \to$ Raíces: $1, -2, \frac{10}{4}$

d) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x^2 + x + 1) \to$ Raíces: $1, 2, 5$

e) $(x + 2)(x - 2)(2x - 1)(3x - 1) \to$ Raíces: $-2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

f) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \to$ Raíces: $0, 2, -2$

g) $(2x + 5)(2x - 5) \to$ Raíces: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

h) $(2x + 1)^2 \to$ Raíz: $-\frac{1}{2}$

2 **Halla, en cada uno de los siguientes casos, el máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ y el mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12;\ B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1;\ B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2;\ B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)(x + 4);\ B(x) = x(x - 3)(x + 3)$

máx.c.d. $= (x - 3)$

mín.c.m. $= x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)(x + 1)^2;\ B(x) = x(x - 1)(x + 1)$

máx.c.d. $= (x - 1)(x + 1)$

mín.c.m. $= x(x - 1)(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$; $B(x) = (x - 1)\,(x^2 + 1)$

máx.c.d. $= (x - 1)\,(x^2 + 1)$

mín.c.m. $= x^2(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:**

a) $\boldsymbol{x^3 - 7x - 6 = 0}$

b) $\boldsymbol{2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0}$

d) $\boldsymbol{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0}$

e) $\boldsymbol{x^5 - 16x = 0}$

f) $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 2x = 0}$

g) $\boldsymbol{x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0}$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
-1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 6 & \\ \hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -9 & 10 \\
1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline
 & 2 & -1 & -10 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & 10 & \\ \hline
 & 2 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = \dfrac{5}{2}$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline
 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & -6 & & \\ \hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$

d)

	3	–10	9	–2
1		3	–7	2
	3	–7	2	0
2		6	–2	
	3	–1	0	

$x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = \dfrac{1}{3}$

e) $x(x^4 - 16) = 0;\ \ x(x^2 - 4)\,(x^2 + 4) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = -2$

f) $x(x^2 - 3x + 2) = 0;\ \ x(x - 1)\,(x - 2) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 2$

g)

	1	–1	4	–4
1		1	0	4
	1	0	4	0

$x = 1$

Fracciones algebraicas

4 **Simplifica las fracciones:**

a) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$ **b)** $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$

a) $\dfrac{(3 - x)\,(3 + x)}{x\,(x - 3)} = \dfrac{-(3 + x)}{x}$

b)

	3	–2	–7	–2
2		6	8	2
	3	4	1	0
–1		–3	–1	
	3	1	0	

$\dfrac{(x - 2)\,(x + 1)\,(3x + 1)}{x\,(x - 2)\,(x + 2)} = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x}$

5 **Opera y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{3a + 3}{12a - 12} : \dfrac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}$ **b)** $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{x}{x - 2} - \dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ **d)** $\left(\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x + 2}\right)$

e) $\left(1 - \dfrac{x + 1}{x + 2} \cdot \dfrac{x + 3}{x + 2}\right) : \dfrac{1}{x + 2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)} = 0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)} : \dfrac{x+2+x}{x+2} = \dfrac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \dfrac{x+2}{2x+2} =$

$= \dfrac{3x+2}{x(2x+2)} = \dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2} \cdot (x+2) = \dfrac{1}{x+2}$

6 **Demuestra las siguientes identidades:**

a) $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-2}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}\right) = 2x-5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right) \cdot \left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right) \cdot \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)} : \dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)} = 1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right) : \left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right) =$

$= \dfrac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)} : \dfrac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)} =$

$= \dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)} : \dfrac{1}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = 2x-5$

Ecuaciones de primer y segundo grado

7 **Entre estas ecuaciones de primer grado, hay dos que no tienen solución, dos que tienen infinitas soluciones y dos que tienen solución única. Identifica cada caso y resuelve las que sean posible:**

a) $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

b) $x + \dfrac{3-x}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}x$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

d) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

e) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

f) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $2x + 2 = 4x - 2x - 3;\ \ 5 = 0$

No tiene solución.

b) $3x + 3 - x - 3 = 2x;\ \ 0 = 0$

Infinitas soluciones.

c) $\dfrac{x^2+1+2x}{16} - \dfrac{8+8x}{16} = \dfrac{x^2+1-2x}{16} - \dfrac{8+4x}{16}$

$2x - 8 - 8x = -2x - 8 - 4x;\ \ 0 = 0$

Infinitas soluciones.

d) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x^2 + 1 - 2x) = 1{,}25x - (0{,}25x^2 + 4 + 2x)$

$0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25x^2 - 0{,}25 + 0{,}5x = 1{,}25x - 0{,}25x^2 - 4 - 2x$

$1{,}45x = -4{,}35$

$x = -3$

e) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x;\ \ 9 = 0$

No tiene solución.

f) $4x + 2 - 7(x^2 - x - 2) = 7x - 14 - 7(x^2 + 4 - 4x)$

$4x + 2 - 7x^2 + 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$58 = 24x$

$x = \dfrac{29}{12}$

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \dfrac{x^2+2}{2}$

b) $0{,}5(x-1)^2 - 0{,}25(x+1)^2 = 4 - x$

c) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1) = (x+1)^2 - 9$

d) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^2 - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{x-1}{4}$

e) $\dfrac{x(x-3)}{2} + \dfrac{x(x+2)}{4} = \dfrac{(3x-2)^2}{8} + 1$

f) $0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0$

☛ ***Expresa los decimales periódicos en forma de fracción y obtendrás soluciones enteras.***

a) $2x^2 - 2 + 6(x^2 + 4 - 4x) = 3x^2 + 6$

$2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$

$5x^2 - 24x + 16 = 0$

$x = \dfrac{24 \pm 16}{10} = \begin{cases} 4 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ \ x_2 = \dfrac{4}{5}$

b) $0,5(x^2 + 1 - 2x) - 0,25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0,5x^2 + 0,5 - x - 0,25x^2 - 0,25 - 0,5x = 4 - x$

$0,25x^2 - 0,5x - 3,75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\ \ x_2 = 5$

c) $0,25x^2 - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$

$0 = 0,75x^2 + 2x - 7$

$x = \dfrac{-2 \pm 5}{1,5} = \begin{cases} 2 \\ -70/15 = -14/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -\dfrac{14}{3}$

d) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2;\ \ 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \dfrac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ \ x_2 = \dfrac{11}{3}$

e) $4x(x-3) + 2x(x+2) = 9x^2 + 4 - 12x + 8$

$4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x = 9x^2 + 4 - 12x + 8$

$0 = 3x^2 - 4x + 12 \ \rightarrow$ No tiene solución.

f) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$x_1 = 4,\; x_2 = -1$

Página 93

9 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general y comprueba las soluciones:**

☛ ***Recuerda:*** ***$ax^2 + c = 0$ se resuelve despejando x. $ax^2 + bx = 0$ se resuelve sacando factor común e igualando a cero cada factor.***

a) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

b) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

c) $\frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$

d) $(x - a)^2 + x(x + b) = 8b^2 - x(2a - b) + a^2$

a) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$0 = 2x^2 - 8;\; x^2 = 4$

$x_1 = -2;\; x_2 = 2$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0;\; x_2 = 13$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x;\; 2x(9x - 4) = 0$

$x_1 = 0;\; x_2 = \frac{4}{9}$

d) $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$

$2x^2 = 8b^2;\; x^2 = 4b^2;\; x = \pm 2b$

$x_1 = 2b;\; x_2 = -2b$

Ecuaciones bicuadradas

10 **Resuelve estas ecuaciones bicuadradas y comprueba las soluciones:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2;\ \ x_3 = 1;\ \ x_4 = -1$

b) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1$

c) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \to$ No tiene solución

d) $x^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 2\sqrt{2};\ \ x_4 = -2\sqrt{2}$

11 **Resuelve:**

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\dfrac{3x^4 - 1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

a) $(x^2 - 2)^2 = 1 \to x^4 - 4x^2 + 4 = 1$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{3};\ \ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$

b) $3x^4 - 1 + 2x^4 - 4 - x^2 = x^4 - 5$

$4x^4 - x^2 = 0$

$x^2\ (4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -\dfrac{1}{2}$

Ecuaciones con radicales

12 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$ **b)** $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$ **d)** $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x; \;\; 0 = 4x^2 + 7x + 3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{-7 \pm 1}{8} = \begin{cases} -1 \\ -3/4 \end{cases}$$

$x_1 = -1; \;\; x_2 = -\frac{3}{4}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x; \;\; 0 = x^2 + x - 6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$x = -3$

c) $2 - 5x = 3x^2; \;\; 0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5; \;\; x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

13 **Resuelve:**

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ **b)** $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$ **c)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x; \;\; 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) $\frac{7x+1}{4} = \frac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x; \;\; 0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

c) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \to 6\sqrt{x+1} = 12 \to \sqrt{x+1} = 2$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \to \ x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

Ecuaciones con la *x* en el denominador

14 **Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:**

a) $\dfrac{x+2}{x} + 3x = \dfrac{5x+6}{2}$ **b)** $\dfrac{8}{x+6} + \dfrac{12-x}{x-6} = 1$

c) $\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{x-1}{2-x}$

Ten en cuenta que $2 - x = -(x - 2)$.

d) $\dfrac{x}{x-6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x+6}{6-x}$ **e)** $\dfrac{3x+1}{x^3} + \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{2x+3}{x^2}$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}\,x$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$x^2 - 4x + 4 = 0; \ \ x = 2$

b) $8(x-6) + (12-x)(x+6) = x^2 - 36$

$8x - 48 + 12x + 72 - x^2 - 6x = x^2 - 36$

$0 = 2x^2 - 14x - 60$

$0 = x^2 - 7x - 30$

$x = \dfrac{7 \pm 13}{2} = \begin{cases} 10 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = 10; \ \ x_2 = -3$

c) $(x-2)^2 = x^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 4 - 4x = x^2 + x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 + 2x - 3$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} 1 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$

$x = -3$

d) $6x - 3(x - 6) = x(x - 6) - 6(x + 6)$

$6x - 3x + 18 = x^2 - 6x - 6x - 36$

$0 = x^2 - 15x - 54$

$x = \dfrac{15 \pm 21}{2} = \begin{cases} 18 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\ \ x_2 = 18$

e) $3x + 1 + x^2(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x$

$3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$

$0 = x^2 - 1$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1$

f) $x^2 + 2 = 2x^2;\ \ 2 = x^2$

$x_1 = \sqrt{2};\ \ x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

15 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

☛ ***Expresa*** $\sqrt[3]{9}$ ***como potencia de base 3.***

b) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

☛ ***Multiplica el primer miembro.***

c) $5 \cdot 7^{-x} = 35$

☛ ***Divide los dos miembros por 5.***

d) $(0{,}5)^x = 16$

☛ ***0,5 es una potencia de base 2.***

e) $\sqrt{7^x} = \dfrac{1}{49}$

f) $2^{1/x} = 16$

g) $\dfrac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$

h) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{8}{125}$

i) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1$

☛ ***Recuerda que*** $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.

a) $3^x = 3^{2/3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $2^{2x+1} = 2^3 \Rightarrow x = 1$

c) $7^{-x} = 7 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$

e) $7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow x = -4$

f) $2^{1/x} = 2^4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

g) $3^{3x-2-x-3} = 3^4 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$

i) $10^x = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$

Página 94

16 **Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:**

a) $\frac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ **d)** $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = e^x \rightarrow ln\ \frac{1}{27} = ln\ e^x$

$x = ln\ \frac{1}{27} = ln\ 1 - ln\ 27 = 0 - ln\ 27 \rightarrow x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow ln\ e^{x-9} = ln\ \sqrt{73}$

$x - 9 = \frac{1}{2}\ ln\ 73 \rightarrow x = 9 + \frac{ln\ 73}{2} \rightarrow x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81;\ x\ log\ 6 = log\ 81$

$x = \frac{log\ 81}{log\ 6} \approx 2{,}453$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3;\ x\ log\ \frac{2}{3} = log\ 3$

$x = \frac{log\ 3}{log\ 2 - log\ 3} \approx -2{,}710$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \dfrac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

a) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \;\rightarrow\; z + \dfrac{2}{z} = 3;\;\; z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\;\; z = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1; \qquad 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0$

b) $2 \cdot 2^x + \dfrac{2^x}{2} = \dfrac{5}{2};\;\; 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\;\; 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \dfrac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \dfrac{(2^x)^3}{2} = \dfrac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128 + 8)\,(z)^3 = 17;\;\; (z)^3 = \dfrac{17}{136} = \dfrac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\;\; x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\;\; 3^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\;\; 7^x = \dfrac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\;\; x_2 = 1$

18 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log\frac{13}{12}$

b) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$

c) $2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$

d) $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$

a) $\log\frac{x^2+1}{x^2-1} = \log\frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\ \ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ \ x_2 = 5$

b) $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\ \ x^2 - 5x = 0$

$x = 5$ ($x = 0$ no vale)

c) $\ln(x-3)^2 = \ln\frac{x}{4}$

$x^2 + 9 - 6x = \frac{x}{4}$

$4x^2 + 36 - 24x = x;\ \ 4x^2 - 25x + 36 = 0$

$x = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} 4 \\ 9/4 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 4$

d) $\log\frac{x+3}{x-6} = 1$

$x + 3 = 10x - 60;\ \ 63 = 9x$

$x = 7$

19 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\log(x+9) = 2 + \log x$

b) $\log\sqrt{3x+5} + \log\sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0$

d) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

☛ ***Haz*** $\log x = y$.

e) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x+3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log\frac{x+9}{x} = 2$

$x + 9 = 100x;\ \ 9 = 99x;\ \ x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

$x = \frac{1}{11}$

b) $\dfrac{\log(x(3x+5))}{2} = 1;\ \ 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

c) $\log x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \dfrac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1;\ \ x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2;\ \ x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $x^2 - 7x + 110 = 100;\ \ x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = 5$

e) $\log \dfrac{x^2 + 3x + 36}{x + 3} = 1$

$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30;\ \ x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = 6$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

$\ln(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$

$\ln(8x^3) = 3 \ \rightarrow\ 8x^3 = e^3 \ \rightarrow\ x^3 = \dfrac{e^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{e^3}{8}} = \dfrac{e}{2} = \ \rightarrow\ x = \dfrac{e}{2}$

Sistemas de ecuaciones

20 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

☛ ***Suma las dos ecuaciones.***

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{3} = 15;\ \ y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \ \to\ x = 5 \\ y = -3 \ \to\ x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5,\ \ y_1 = 3;\ \ x_2 = -5,\ \ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{array}\right\}\ 4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0$

$5x^2 - 2x + 6 = 0$

No tiene solución.

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0;\ \ x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ -x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 = 0 \\ \hline 2y^2 - 10y + 8 = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\ \ y_1 = 4;\ \ x_2 = 3,\ \ y_2 = 1;\ \ x_3 = 2,\ \ y_3 = 4;\ \ x_4 = 2,\ \ y_4 = 1$

d) $x = \dfrac{4y}{3}$

$\dfrac{7y}{3} \cdot \dfrac{y}{3} = 7$

$y^2 = 9;\ \ y = \pm 3$

$x_1 = 4,\ \ y_1 = 3;\ \ x_2 = -4,\ \ y_2 = -3$

21 Resuelve:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{x + 1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24; \ \ y = 3; \ \ x = 4$

$x = 4; \ \ y = 3$

b) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; \ \ x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1 + 3y}{2} = \dfrac{2 + 6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \ \to \ x = 8 \\ -1 \ \to \ x = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1, \ \ y_1 = -1; \ \ x_2 = 8, \ \ y_2 = 5$

c) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \ \to \ y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \ \to \ y = 6 \end{cases}$

$x = 6; \ \ y = 6 \ \ (x = 27, \ \ y = 48$ no vale$)$

d) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x - 5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \ \to \ y = 1 \\ 2 \ \to \ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = 2, \ \ y_1 = -1; \ \ x_2 = 3, \ \ y_2 = 1$

22 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \mathbf{y - x = 1} \\ \mathbf{2^x + 2^y = 12} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{5^x \cdot 5^y = 1} \\ \mathbf{5^x : 5^y = 25} \end{cases}$

a) $y - x = 1$

$2^x + 2^y = 12$

$y = 1 + x \ \to \ 2^x + 2^{1 + x} = 12 \ \to \ 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \ \to$

$\to \ 3 \cdot 2^x = 12 \ \to \ 2^x = 4 \ \to \ x = 2 \ \to \ y = 1 + 2 = 3$

$x = 2; \quad y = 3$

b) $5^x \cdot 5^y = 1$

$5^x : 5^y = 25$

$$\left.\begin{array}{l} 5^{x+y} = 5^0 \to x + y = 0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \to x - y = 2 \end{array}\right\}$$

$2x = 2 \to x = 1$

$1 + y = 0 \to y = -1$

23 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10; \quad y = 100$

b) $\log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \qquad \log_2 x + 3 \log_2 y = 5$

$2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \qquad 6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9$

$\qquad 7 \log_2 x = 14$

$x = 4; \quad y = 2$

c) $2 \log x + \log y = 2 \qquad 4 \log x + 2 \log y = 4$

$\log x - 2 \log y = 6 \qquad \log x - 2 \log y = 6$

$\qquad 5 \log x = 10 \to \log x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ y = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\}$$

d) $\log \dfrac{x}{y} = 1; \quad \dfrac{x}{y} = 10; \quad x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11; \quad 99y^2 = 11; \quad y^2 = \dfrac{1}{9} \to y = \pm\dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{10}{3}; \quad y = \dfrac{1}{3}$

$\left(y = -\dfrac{1}{3} \text{ no vale}\right)$

e) $\left.\begin{array}{l} x = 25 + y \\ log\ \dfrac{y}{x} = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 0{,}1x \\ 0{,}9x = 25 \end{array}$

$x = \dfrac{250}{9};\ \ y = \dfrac{25}{9}$

f) $\left.\begin{array}{l} ln\ x - ln\ y = 2 \\ ln\ x + ln\ y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones, queda:
$2\ ln\ x = 6 \ \rightarrow\ ln\ x = 3 \ \rightarrow\ x = e^3$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$2\ ln\ y = 2 \ \rightarrow\ ln\ y = 1 \ \rightarrow\ y = e$

Solución: $x = e^3;\ \ y = e$

Método de Gauss

24 **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 2.^a \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$

25 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+z=18\\ x\qquad\ -z=6\\ x-2y+z=0\end{array}\right.\qquad\qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+\ \ z=2\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+\ y+z=18\\ x\qquad\ -z=\ 6\\ x-2y+z=\ 0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a\\3.^a+2\cdot1.^a\end{array}\ \longrightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+y+\ z=18\\ x\qquad -z=\ 6\\ 3x\qquad +3z=36\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a\\3.^a:3\end{array}\ \longrightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+y+z=18\\ x\qquad -z=\ 6\\ x\qquad +z=12\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}1.^a\\2.^a\\3.^a+2.^a\end{array}\ \longrightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+y+z=18\\ x\qquad -z=\ 6\\ 2x\qquad\quad =18\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=9\\ z=x-6=3\\ y=18-x-z=6\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=9\\ y=6\\ z=3\end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x+\ \ y+\ \ z=\ 2\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a-2\cdot1.^a\\3.^a-1.^a\end{array}\ \longrightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+\ \ y+\ \ z=\ 2\\ \qquad\ \ y+3z=\ 7\\ \quad -6y+5z=27\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a\\3.^a+6\cdot2.^a\end{array}\ \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+\ z=\ 2\\ \qquad y+3z=\ 7\\ \qquad\quad 23z=69\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{69}{23}=3\\ y=7-3z=7-9=-2\\ x=2-y-z=2+2-3=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=1\\ y=-2\\ z=3\end{array}$$

Página 95

26 **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=9\\ 2x-y+4z=4\\ 2x-y+6z=-1\end{array}\right.$$

$$\text{b)}\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+\ \ z=0\\ 3x+6y-2z=0\\ 4x+\ \ y-\ \ z=0\end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=\ 9\\ 2x-y+4z=\ 4\\ 2x-y+6z=-1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a+1.^a\\3.^a+1.^a\end{array}\ \longrightarrow\ \left.\begin{array}{l} x+y-2z=\ 9\\ 3x\qquad +2z=13\\ 3x\qquad +4z=\ 8\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}1.^a\\2.^a\\3.^a-2.^a\end{array}\ \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=\ 9\\ 3x\qquad +2z=13\\ \qquad\quad\ 2z=-5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{-5}{2}\\ x=\dfrac{13-2z}{3}=6\\ y=9-x+2z=9-6-5=-2\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=6\\ y=-2\\ z=\dfrac{-5}{2}\end{array}$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x \qquad\qquad = 0 \\ 6x - 2y \qquad = 0 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

27 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{r} x - y \qquad = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \qquad \text{b)} \left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{c)} \left\{\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right. \qquad \text{d)} \left\{\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right.$$

$$\text{e)} \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right. \qquad \text{f)} \left\{\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right.$$

☛ ***Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.***

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} x - y \qquad\quad = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 5 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x - y \qquad = 1 \\ -3x + y \qquad = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x - y \qquad = 1 \\ -2y \qquad = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \end{array} \ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x \qquad + 6z = 8 \\ 6x \qquad + 18z = 4 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a : 6 \end{array} \ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x \qquad + 3z = 4 \\ x \qquad + 3z = 4/6 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

$$\text{c)}\ \left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ -x \qquad - 5z = -5 \\ -x \qquad - 5z = -5 \end{array}\right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3 \\ \to x = 5 - 5z \end{array}$$

Solución: $x = 5 - 5z, \ y = 2z - 3, \ z = z$

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 5 \cdot 1.^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 2, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = \dfrac{3}{2}$

e) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $$\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array}\right\} \to -2(1 - 3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$$

Solución: $x = 1 - 3y, \ z = 3 - 7y$

Inecuaciones

28 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$ **b)** $\dfrac{x - 1}{2} > x - 1$ **c)** $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$ **e)** $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ **f)** $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x; \ \ 10x > -10; \ \ x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2; \ \ 1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x+5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$[-3, 5]$

29 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

☛ ***Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.***

a) $\left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\}$ $(-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{array}\right\}$ $(4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{array}\right\}$ $(17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{array}\right\}$ No tiene solución.

30 Resuelve:

a) $x^2 - 7x + 6 \le 0$ **b)** $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x+1)\,x^2\,(x-3) > 0$ **d)** $x(x^2 + 3) < 0$

a) $\frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$[1, 6]$

b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x > 3 \end{array}\right\} (3, +\infty) \\ \\ \left.\begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x < -1 \\ x < 3 \end{array}\right\} (-\infty, -1) \end{array}\right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 0)$

31 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $\dfrac{2}{x-3} > 0$ **b)** $\dfrac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$ **c)** $\dfrac{x^2}{x+4} < 0$ **d)** $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$

a) $x - 3 > 0 \;\rightarrow\; (3, +\infty)$

b) $3x + 5 \geq 0;\; x \geq -\dfrac{5}{3} \;\rightarrow\; \left[-\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$

c) $x + 4 < 0;\; x < -4 \;\rightarrow\; (-\infty, -4)$

d) $\left.\begin{array}{l} x-3>0 \\ x+2<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right\} \rightarrow \varnothing$

$\left.\begin{array}{l} x-3<0 \\ x+2>0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<3 \\ x>-2 \end{array}\right\} \rightarrow (-2, 3)$

PARA RESOLVER

32 **Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

x al 8% $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6% $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200;\;\; 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \;\rightarrow\; x = 13\,428{,}57$ €

Colocó 13 428,57 € al 8% y 14 571,43 € al 6%.

33 **Dos grifos llenan un depósito de 1 500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?**

Entre los dos $\rightarrow$ 1 500 litros en 1,2 horas

$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ} \rightarrow t+1 \\ 2.^{\circ} \rightarrow t \end{array}\right\} \quad \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{1{,}2}$ (en 1 hora)

$$\frac{1{,}2(t+t+1)}{1{,}2t(t+1)} = \frac{t(t+1)}{1{,}2t(t+1)}$$

$2{,}4t + 1{,}2 = t^2 + t$

$t^2 - 1{,}4t - 1{,}2 = 0$

$t = \dfrac{1{,}4 \pm 2{,}6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -0{,}6 \end{cases}$ ¡Imposible!

El primero tardaría 3 horas, y el segundo, 2 horas.

34 **Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena.**

¿Cuántas docenas tenía al principio?

☛ ***Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.***

Tenía x docenas $\rightarrow$ $\dfrac{36}{x}$ €/docena

Le quedan $x - 4$ docenas $\rightarrow$ $\left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)$ €/docena

$\left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)(x - 4) = 36$

$(36 + 0{,}45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0{,}45x^2 - 1{,}8x = 36x$

$0{,}45x^2 - 1{,}8x - 144 = 0$

$x = 20$ ($x = -16$ no vale) $\Rightarrow$ Tenía 20 docenas.

35 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €.**

¿Cuántos kilogramos compró?

☛ ***Iguala el coste de las que se desechan más las ganancias al aumento de coste de las que quedan.***

Compró x kg $\rightarrow$ $\dfrac{125}{x}$ €/kg

Vende $(x - 20)$ kg $\rightarrow$ $\left(\dfrac{125}{x} + 0{,}40\right)$ €/kg

$\left(\dfrac{125}{x} + 0{,}40\right)(x - 20) = 147$

$(125 + 0{,}40x)(x - 20) = 147x$

$125x - 2\,500 + 0{,}40x^2 - 8x = 147x$

$0{,}40x^2 - 30x - 2\,500 = 0$

$x = 125$ ($x = -50$ no vale)

Compró 125 kg.

36 **Varios amigos toman un refresco en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?**

Número de amigos $\rightarrow\ x\ \rightarrow\ \dfrac{6}{x}$ €/consumición

$(x-2)\left(\dfrac{6}{x}+0{,}80\right)=6$

$(x-2)(6+0{,}80x)=6x$

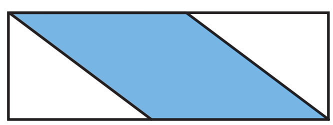
$6x+0{,}80x^2-12-1{,}6x=6x$

$0{,}80x^2-1{,}6x-12=0$

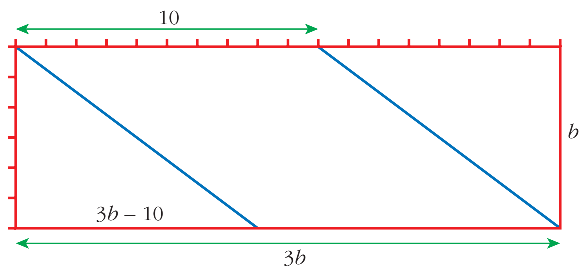
$x=5\ \ (x=-3\ \text{ no vale})$

Son 5 amigos.

37 **El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple de la altura.**



$4x=40;\ \ x=10$ m



$b^2+(3b-10)^2=10^2\rightarrow\ b^2+9b^2+100-60b=100\ \rightarrow\ 10b^2-60b=0\ \rightarrow$

$\rightarrow b(10b-60)=0\ \rightarrow\ b=0,\ \ b=6$

Base: 18 m; Altura: 6 m

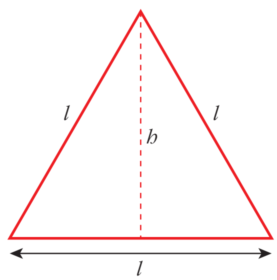
38 **El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?**

$$\begin{array}{ccccc} \text{Enero} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febrero} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Marzo} \\ x & & 1{,}12x & & 0{,}88\cdot 1{,}12x=0{,}9856x \end{array}$$

$x=0{,}9856x+36\ \Rightarrow\ x=2\,500$ personas

Página 96

39 **La superficie de un triángulo equilátero es de 50 m². Calcula el lado.**



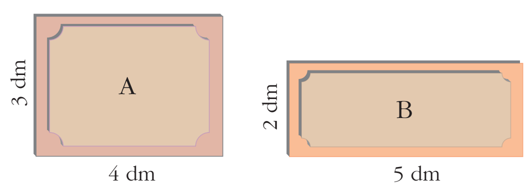
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}; \quad h = \frac{\sqrt{3}\, l}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = 50$$

$$l^2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow l = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = 10{,}75 \text{ m}$$

40 **Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:**



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$$\left.\begin{array}{l} \text{n.° baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.° baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array}\right\} \text{Superficie:} \quad \begin{aligned} 12x &= 10\,(x + 40) \\ 12x &= 10x + 400 \\ 2x &= 400 \\ x &= 200 \text{ baldosas} \end{aligned}$$

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}$

41 **En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x}{D} \cdot \dfrac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\[2ex] \dfrac{x}{D} \cdot \dfrac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array}\right\} \begin{aligned} 31x &= 13x + 54 \\ 18x &= 54 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El número es el 93.

42 **Le pregunté a mi padre: *¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?***

—No sé, nunca me he fijado.

—Pero hombre..., lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanas, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?

—Algo más de 14 euros.

—El domingo pasado, además de nosotros seis, invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?

—Era poco menos de 20 euros, pues puse un billete y dejé la vuelta.

¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?

$6x > 14 \;\rightarrow\; x > 2,\widehat{3}$

$8x < 20 \;\rightarrow\; x < 2,5$

Entre 2,34 y 2,50 €.

43 **Resuelve:**

a) $3x^4 - 75x^2 = 0$

b) $\sqrt{4x+5} = x+2$

c) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

d) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x}{5(x+3)} = \dfrac{3}{10}$

e) $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

f) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$

g) $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

a) $3x^2(x^2 - 25) = 0$

$x_1 = 0;\;\; x_2 = 5;\;\; x_3 = -5$

b) $4x + 5 = x^2 + 4 + 4x;\;\; 1 = x^2 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\;\; x_2 = -1$

c) $2x - 3 = 4 + x - 5 + 4\sqrt{x-5}$

$x - 2 = 4\sqrt{x-5}$

$x^2 + 4 - 4x = 16(x-5)$

$x^2 + 4 - 4x = 16x - 80$

$x^2 - 20x + 84 = 0$

$x = \dfrac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \\ 6 \end{cases}$

$x_1 = 6;\;\; x_2 = 14$

d) $\dfrac{10(x+3)+2x(x+2)}{10(x+2)(x+3)} = \dfrac{3(x^2+5x+6)}{10(x+2)(x+3)}$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = -4$

e) $x_1 = 0;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 2;\ \ x_4 = \dfrac{1}{2}$

f) $x_1 = 3;\ \ x_2 = -3$

g) $x = 0$

$\sqrt{x} = x - 2$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 4\ \ (x = 1$ no vale)

44 **Resuelve:**

a) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = 4$ **b)** $|x^2 - 1| = 3$

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 4 \Rightarrow x - 3 = 8 \Rightarrow x = 11 \\ \dfrac{x-3}{2} = -4 \Rightarrow x - 3 = -8 \Rightarrow x = -5 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x_1 = 11 \\ x_2 = -5 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (no vale)} \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}$

45 **Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:**

a) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$ **b)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$ **c)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x^2} = 0$

d) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = 0$ **e)** $\dfrac{x+1}{x^2} - \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x^3+x^2} = 0$

a) $\dfrac{27x^3 + 125}{45x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \dfrac{-5}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-5}{3}$

b) $\dfrac{81x^4 - 16}{8 \cdot 81x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = \dfrac{16}{81} = \dfrac{2^4}{3^4} \Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3};\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

c) $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

d) $4 - 25x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{4}{25}$

$x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$

$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{10}}{5}$

e) $(x + 1)(x + 1) - x \cdot x^2 - 1 = 0$

$x^2 + 2x + 1 - x^3 - 1 = 0$

$-x^3 + x^2 + 2x = 0$

$-x(x^2 - x - 2) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = -1, \; x_3 = 2$

46 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{4y + 2x} = \sqrt{3y + x} - 1 \\ y + x = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x + 3)(y - 5) = 0 \\ (x - 2)(y - 1) = 0 \end{cases}$

a) $x = 8 - y$

$\sqrt{8} - \sqrt{8 - 2y} = \sqrt{2y} \;\rightarrow\; \sqrt{8} - \sqrt{2y} = \sqrt{8 - 2y} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 8 + 2y - 2\sqrt{16y} = 8 - 2y \;\rightarrow\; 2y - 8\sqrt{y} = -2y \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4y = 8\sqrt{y} \;\rightarrow\; 16y^2 = 64y \;\rightarrow\; 16y^2 - 64y = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16y(y - 4) = 0 \begin{cases} y = 0 \;\rightarrow\; x = 8 \\ y = 4 \;\rightarrow\; x = 4 \end{cases}$

$x_1 = 8, \; y_1 = 0; \; x_2 = 4, \; y_2 = 4$

b) $x = -5 - y$

$\sqrt{4y - 10 - 2y} = \sqrt{3y - 5 - y} - 1$

$\sqrt{2y - 10} = \sqrt{2y - 5} - 1$

$2y - 10 = 2y - 5 + 1 - 2\sqrt{2y - 5}$

$2\sqrt{2y - 5} = 6$

$\sqrt{2y - 5} = 3$

$2y - 5 = 9$

$x = -12; \; y = 7$

c) $x_1 = -3, \; y_1 = 1; \; x_2 = 2, \; y_2 = 5$

47 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $|x - 5| = 3x - 1$

b) $|x + 2| = |x - 6|$

c) $|x^2 - 3x + 1| = 1$

d) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$

a) $x - 5 = 3x - 1 \Rightarrow -2x = 4;\ \ x = -2$ (no vale)

$5 - x = 3x - 1 \Rightarrow 6 = 4x;\ \ x = \frac{3}{2}$

b) $x + 2 = x - 6 \Rightarrow$ Imposible

$x + 2 = 6 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

c) $x^2 - 3x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$x^2 - 3x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 2;\ \ x_4 = 3$

d) $x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$x^2 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{-1}{2};\ \ x_2 = 1$

48 **Resuelve por tanteo:**

a) $2^x = x^3$

b) $\ln x = -x$

a) $2^x = x^3;\ \ x \approx 1{,}37$

b) $x \approx 0{,}57$

49 **Resuelve por tanteo las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen una solución en el intervalo indicado:**

a) $x^3 - x - 2 = 0$ **en** $[1, 2]$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ **en** $[0, 1]$

a) $x \approx 1{,}52$

b) $x \approx 0{,}90$

50 **Queremos repartir, mediante un sistema de ecuaciones, 330 euros entre tres personas de forma que la primera reciba 20 euros más que la segunda y la tercera la mitad de lo que han recibido entre las otras dos.**

¿Cómo lo hacemos?

Llamamos x a los euros que recibe la primera; y a los que recibe la segunda, y z a los que recibe la tercera. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=330 \\ x=y+20 \\ z=\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 330 \\ x-y &=& 20 \\ x+y-2z &=& 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2\cdot 1.^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 330 \\ x-y &=& 20 \\ 3x+3y &=& 660 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 330 \\ x-y &=& 20 \\ x+y &=& 220 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 330 \\ x-y &=& 20 \\ 2x &=& 240 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=120 \\ y=x-20=100 \\ z=330-x-y=110 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 120$ € recibe la 1.ª; $y = 100$ € recibe la 2.ª; $z = 110$ € recibe la 3.ª

51 **La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.**

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

Llamamos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas, y z a la de las unidades. Así, el número es:

$x\ y\ z \ \rightarrow\ 100x + 10y + z$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ y=x+z+1 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+99 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 7 \\ x-y+z &=& -1 \\ 99x-99z &=& -99 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 7 \\ x-y+z &=& -1 \\ x-z &=& -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 7 \\ 2x+2z &=& 6 \\ x-z &=& -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a \end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 7 \\ x+z &=& 3 \\ x-z &=& -1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 7 \\ x+z &=& 3 \\ 2x &=& 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=3-x=2 \\ y=7-x-z=7-1-2=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=4 \\ z=2 \end{array}$$

Solución: El número es el 142.

Página 97

CUESTIONES TEÓRICAS

52 **¿Qué valores ha de tomar el parámetro k para que $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales?**

$36 - 4k < 0$; $36 < 4k$; $9 < k$; $k > 9$

53 **Halla m para que al dividir el polinomio**

$$2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$$

entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.

	2	9	2	–6	m
–4		–8	–4	8	–8
	2	1	–2	2	$m - 8$

$m - 8 = 12 \Rightarrow m = 20$

54 **Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.**

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x - 1)$; $Q(x) = x^2(x - 1)$

55 **Justifica por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:**

$$\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y + z &= 5 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}\right.$$

La primera y la tercera ecuación son contradictorias.

56 **Invéntate ecuaciones que tengan por soluciones los valores:**

a) 3, –3, $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

b) 5; 0,3 y –2

c) 0, $\frac{1}{2}$ y 0,7

d) 0, 1, –1 y $\frac{1}{3}$

a) $(x - 3)(x + 3)\left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = (x^2 - 9)(x^2 - 7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x - 5)(x - 0{,}3)(x + 2) = x^3 - 3{,}3x^2 - 9{,}1x + 3$

c) $x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 0{,}7) = x(x - 0{,}5)(x - 0{,}7) = x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}35x$

d) $x(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x$

PARA PROFUNDIZAR

57 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es *x*:**

a) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$

☛ ***Al aplicar la fórmula general, verás que el discriminante es un cuadrado perfecto:***

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

b) $(x - a)^2 - 2x(x + a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a + b)x^2 + bx - a = 0$

a) $$x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}}{2ab} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}}{2ab} =$$

$$= \frac{a + b \pm (a - b)}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a + b + a - b}{2ab} = \dfrac{2a}{2ab} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{a + b - a + b}{2ab} = \dfrac{2b}{2ab} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{a}$; $x_2 = \dfrac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$$x = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{-4a \pm 2a}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4a + 2a}{2} = \dfrac{-2a}{2} = -a \\ \dfrac{-4a - 2a}{2} = \dfrac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a$; $x_2 = -3a$

c) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b - a)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a - b)^2}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b + 2a - b}{2a} = \dfrac{2a - 2b}{2a} = \dfrac{a - b}{a} \\ \dfrac{-b - 2a + b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{a - b}{a}$

$$\text{d) } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-b + 2a + b}{2(a+b)} = \dfrac{a}{a+b} \\[2ex] \dfrac{-b - 2a - b}{2(a+b)} = \dfrac{-(2a+2b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{a}{a+b}$$

58 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$

b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\dfrac{4 - x^2}{(x-3)^2} > 0$

d) $\dfrac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x(x - 3)(x + 2) < 0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{l} x \neq 3 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1; \ (1, +\infty)$

59 **Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?**

x cazos V_1	$(12 - x)$ cazos V_2	12 cazos
3 alcohol 7 agua	2 alcohol 3 agua	3 alcohol 5 agua
$\frac{3}{10}$ alcohol	$\frac{2}{5}$ alcohol	$\frac{3}{8}$ alcohol

La proporción de alcohol es:

$$\frac{3}{10}x + (12 - x) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24 - 2x}{5} = \frac{9}{2}; \quad 3x + 48 - 4x = 45; \quad x = 3$$

Solución: 3 cazos de la primera y 9 de la segunda.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Resuelve factorizando previamente.**

$$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2. **Opera y simplifica el resultado.**

$$\left(\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}\right) : \frac{3x}{x - 1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}\right) : \frac{3x}{x - 1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2 - 1} : \frac{3x}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x^2 + x)(x - 1)}{3x(x^2 - 1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6$

c) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3}$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x + 1)$

g) $|3x + 1| = |x - 3|$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6 \;\rightarrow\; \sqrt{8 + 2x} = 2x + 6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{8 + 2x})^2 = (2x + 6)^2 \;\rightarrow\; 8 + 2x = 4x^2 + 36 + 24x \;\rightarrow\; 4x^2 + 22x + 28 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 + 11x + 14 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{-11 \pm 3}{4} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Comprobada sobre la ecuación inicial, el resultado $-\frac{7}{2}$ resulta ser no válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = -2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; \dfrac{9x}{3(x^2 - 4)} = \dfrac{3x(x - 2) - 4(x^2 - 4)}{3(x^2 - 4)} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 9x = 3x^2 - 6x - 4x^2 + 16 \;\rightarrow\; x^2 + 15x - 16 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} = \frac{-15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = -16$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; 3^{x-1} = 3^{-1/2} \;\rightarrow\; x - 1 = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 2^2 \;\rightarrow\; x = 2$

$y = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2^1 \;\rightarrow\; x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x + 1) \rightarrow \ln 4x = \ln (x + 1)^2 \rightarrow 4x = (x + 1)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

g) $|3x + 1| = |x - 3| \begin{cases} 3x + 1 = x - 3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = -(x - 3) \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = 1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$

4. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z^2 - 6z + 9 = 0 \rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

$3^x = 3 \rightarrow x = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 1$; $y = 2$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{2.^a - 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a + 2 \cdot 1.^a} \end{array} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 7y + 7z = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{3.^a + 7 \cdot 2.^a} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 14z = -14 \end{array}\right\}$

$14z = -14 \rightarrow z = -1$

$-y + z = -3 \rightarrow -y - 1 = -3 \rightarrow y = 2$

$x + 2y + 2z = 3 \rightarrow x + 4 - 2 = 3 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

5. Resuelve:

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$ **b)** $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1) \rightarrow x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \rightarrow$

$\rightarrow -4x - 4 < 0 \rightarrow 4x > -4 \rightarrow x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de serlo.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, $(x + 1)^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador ha de ser cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$

6. **La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.**

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

Supongamos que el número es xyz.

$xyz = z + 10y + 100x$

$zyx = x + 10y + 100z$

Con los datos que tenemos, el sistema que se plantea es:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ y = x + z + 1 \\ x + 10y + 100z = 99 + z + 10y + 100x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 7 \\ -x + y - z &= 1 \\ -99x + 99z &= 99 \end{array}\right\} \xrightarrow{1.^a + 2.^a} \left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 7 \\ 2y &= 8 \\ -x + z &= 1 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x + z &= 3 \\ -x + z &= 1 \end{array}\right\} 2z = 4 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

$-x + z = 1 \rightarrow -x + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$

El número buscado es el 142.