8 FUNCIONES

El uso del lenguaje gráfico y algebraico será el hilo conductor de la unidad, los alumnos podrán desarrollar procesos de matematización en contextos funcionales sencillos y aprenderán a describir características de problemas de la vida real que puedan ser representados gráficamente.

Al inicio de esta unidad se presenta el concepto de función, su expresión analítica y gráfica. Es importante que el alumno recuerde los contenidos relativos a funciones que estudió en cursos anteriores para poder comprender y utilizar contenidos más complejos.

Se trabaja la comprensión y el cálculo del dominio y recorrido de una función, para profundizar después en sus características. Finalmente, se practican las operaciones con funciones así como el cálculo de la función inversa y la transformación de funciones.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las funciones, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra en los epígrafes 5, 8 y en la sección final *Ejercicios resueltos,* así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL).** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, representaciones gráficas de funciones diferentes pero que comunican lo mismo, etcétera; para trabajar con los alumnos el hecho de que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de dos semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Reconocer funciones expresadas en sus diferentes formas y contextos.
- Comprender el concepto de dominio y recorrido.
- Identificar las características de una función e interpretar su gráfica.
- Realizar operaciones con funciones.
- Calcular funciones inversas.
- Representar transformaciones de funciones.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Definición de función. Dominio y recorrido	1. Identificar funciones elementales dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real. 2. Reconocer el dominio y el recorrido de una función.	1.1. Identifica y expresa analíticamente funciones reales de variable real elementales. 2.1. Reconoce el dominio y el recorrido de una función.	CMCT CD CL CAA CSC
Representación gráfica de una función	3. Analizar propiedades de funciones a partir de su representación gráfica.	3.1. Comprende y analiza la representación gráfica de una función.	CMCT CD CL CAA
Cálculo del dominio de una función Funciones polinómicas Funciones racionales Funciones irracionales Funciones definidas gráficamente Funciones definidas a trozos **Cálculo del recorrido de una función** **Características de una función** Signo de una función Monotonía Concavidad y convexidad Simetrías Acotación Periodicidad	4. Analizar cualitativa y cuantitativamente las propiedades de funciones elementales, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan. 5. Emplear medios tecnológicos para representar funciones.	4.1. Calcula el dominio de una función polinómica, racional, irracional definida gráficamente o definida a trozos. 4.2. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis del dominio de una función en contextos reales. 4.3. Calcula el recorrido de una función. 4.4. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis del recorrido de una función en contextos reales. 4.5. Determina el signo de una función. 4.6. Distingue cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo. 4.7. Comprende el comportamiento de una función según sea creciente o decreciente. 4.8. Reconoce los máximos y los mínimos de una función y su relación con el crecimiento o el decrecimiento de la misma. 4.9. Identifica cuándo una función es cóncava o convexa en un intervalo. 4.10. Analiza cuando una función es simétrica y las características que presenta. 4.11. Interpreta correctamente cuándo una función está acotada. 4.12. Identifica funciones periódicas y calcula su período. 5.1. Utiliza GeoGebra para representar funciones simétricas.	CMCT CD CL CAA
Operaciones de funciones Adición de funciones Multiplicación de funciones División de funciones Composición de funciones **Función inversa respecto de la composición de funciones**	6. Aplicar operaciones y transformaciones de funciones, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.	6.1. Conoce las operaciones con funciones y las aplica en el cálculo de dominios: adición, multiplicación, división y potenciación. 6.2. Realiza composiciones de funciones. 6.3. Comprende e identifica funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas. 6.4. Interpreta y calcula funciones inversas.	CMCT CD CL CAA
Transformaciones de funciones Representación de $g(x) = f(x) + a$: desplazamiento vertical Representación de $g(x) = f(x + a)$: desplazamiento horizontal Representación de $g(x) = a \cdot f(x)$: dilatación o contracción vertical Representación de $g(x) = f(a \cdot x)$: dilatación o contracción horizontal	7. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	7.1. Comprende y representa gráficamente funciones con desplazamiento vertical: $g(x) = f(x) + a$ 7.2. Comprende y representa gráficamente funciones con desplazamiento horizontal: $g(x) = f(x + a)$ 7.3. Comprende y representa gráficamente funciones con dilatación o contracción vertical: $g(x) = a \cdot f(x)$ 7.4. Comprende y representa gráficamente funciones con dilatación o contracción horizontal: $g(x) = f(a \cdot x)$ 7.5. Utiliza GeoGebra para representar y analizar transformaciones de funciones: traslación vertical y horizontal.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR | **PARA EL ALUMNO**

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Definición de función. Dominio y recorrido

2. Representación gráfica de una función

3. Cálculo del dominio de una función
- Funciones polinómicas
- Funciones racionales
- Funciones irracionales
- Funciones definidas gráficamente
- Funciones definidas a trozos

4. Cálculo del recorrido de una función

Para el profesor: **Actividades de refuerzo** / **Actividades de ampliación**

5. Características de una función
- Signo de una función
- Monotonía
- Concavidad y convexidad
- Simetrías
- Acotación
- Periodicidad

Para el alumno: **GeoGebra.** Funciones simétricas

6. Operaciones con funciones
- Adición de funciones
- Multiplicación de funciones
- División de funciones
- Composición de funciones

Para el profesor: **Prueba de evaluación**

7. Función inversa respecto de la composición de funciones

8. Transformaciones de funciones
- Representación de $g(x) = f(x) + a$: desplazamiento vertical
- Representación de $g(x) = f(x + a)$: desplazamiento horizontal
- Representación de $g(x) = a \cdot f(x)$: dilatación o contracción vertical
- Representación de $g(x) = f(a \cdot x)$: dilatación o contracción horizontal

Para el alumno: **GeoGebra.** Desplazamiento vertical de una función / **GeoGebra.** Desplazamiento horizontal de una función

EJERCICIOS RESUELTOS

Para el alumno: **GeoGebra.** Valor absoluto de una función

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Para el alumno: **Actividades interactivas.** Test de autoevaluación

1. Escribe los intervalos $[-3, 5)$, $(-\infty, 5)$ y $(-3/2, +\infty)$ de la recta real como desigualdades.

El intervalo $[-3, 5)$ es el conjunto de números reales que cumplen $-3 \le x < 5$.

El intervalo $(-\infty, 5)$ es el conjunto de números reales que cumplen $x < 5$.

El intervalo $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ es el conjunto de números reales que cumplen $x > -\frac{3}{2}$.

2. Escribe los conjuntos $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, $\mathbb{R} - [-3, 5)$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -5\}$ en forma de intervalo o unión de intervalos.

$\mathbb{R} - \{-2, 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$

$\mathbb{R} - [-3, 5) = (-\infty, -3) \cup [5, +\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -5\} = [-5, +\infty)$

3. Indica el entorno del punto 2, de radio 0,5.

$$E(x_0, r) = E(2; 0{,}5) = (2 - 0{,}5; 2 + 0{,}5) = (1{,}5; 2{,}5)$$

4. Dada la igualdad $y = \frac{3x-1}{x+1}$ averigua el valor de y cuando $x = 0$, y el valor de x cuando $y = 7$.

Si $x = 0$, entonces $y = -1$.

Si $y = 7$, entonces $x = -2$.

5. Resuelve estas ecuaciones y sistemas.

a) $x^2 - 18x = -17$

b) $(2x+1)^2 - 5 = 4$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 14 \\ x + 2y - 5z = -18 \end{cases}$

a) $x^2 - 18x + 17 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 17}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$x_1 = 17 \quad x_2 = 1$

b) $4x^2 + 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{8}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$

c) $\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases} \Rightarrow 8y = 12 \Rightarrow y = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - z = 10 \\ y - 6z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - z = 10 \\ -31z = -90 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{90}{31}, y = \frac{80}{31}, x = \frac{52}{31}$

6. Halla las soluciones de las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 1 > 0$

b) $x^2 - 4 \ge 0$

c) $x^2 + 2 < 3$

a) $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

b) $x^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow x < -2$ o $x > 2$

c) $x^2 + 2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 1$

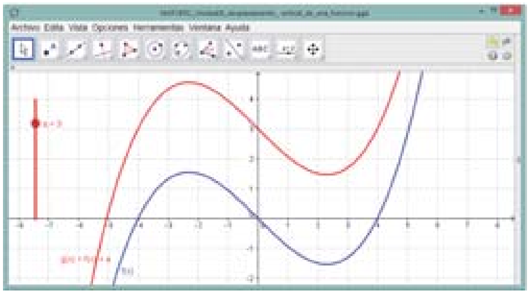
Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Funciones simétricas (página 216)

En este archivo de GeoGebra puede verse representada una función simétrica. El deslizador de color rojo muestra puntos simétricos de la función dibujada. Con el de color verde se puede modificar el exponente del numerador y ver otras funciones simétricas pares e impares.

Desplazamiento vertical de una función (página 224)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas una función y la que resulta de trasladarla verticalmente. En el deslizador de color rojo se puede elegir el valor que determina el desplazamiento para observar la diferencia entre valores positivos y negativos.



Desplazamiento horizontal de una función (página 224)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas una función y la que resulta de trasladarla horizontalmente. En el deslizador de color rojo se puede elegir el valor que determina el desplazamiento para observar la diferencia entre valores positivos y negativos.

Valor absoluto de una función (página 228)

En este archivo de GeoGebra puede verse la representación de una función y al mover el deslizador aparece su valor absoluto.

Actividades (páginas 204/225)

1 **Expresa mediante una función:**

a) **El precio, en función del peso, de una cierta cantidad de café que vale 2 €/kg.**

b) **El coste de una llamada telefónica, si el establecimiento de llamada es de 0,10 € y la tarifa por minuto, de 0,20 €.**

c) **La relación entre la altura y la base de un triángulo cualquiera de 6 cm^2 de área, si la base es la variable dependiente.**

a) $P(x) = 2x$, donde x es el peso del café, en kilogramos.

b) $C(t) = 0{,}10 + 0{,}20t$, donde t es la duración de la llamada, en minutos.

c) $b(h) = \dfrac{12}{h}$, donde h es la altura del triángulo, en centímetros.

2 **En la siguiente tabla se muestran algunos pares ordenados de una aplicación, $f(n)$, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.**

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	3	5	7	9	11

a) **Halla su expresión analítica.**

b) **Calcula $f(8)$.**

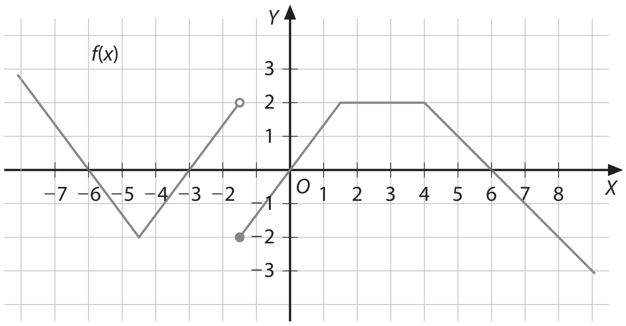
a) $f(n) = 2n - 1$ *b)* $f(8) = 15$

3 **Un coche ha estado circulando a 70 km/h hasta el kilómetro 40 de una carretera comarcal. En ese mismo instante, y en el kilómetro 0 de dicha carretera, otro coche circula a 90 km/h. Si ambos vehículos mantienen su velocidad constante, expresa cómo varía la distancia que los separa en función del tiempo. Cuando el segundo coche vaya 40 km por delante del primero, ¿qué tiempo habrá transcurrido?**

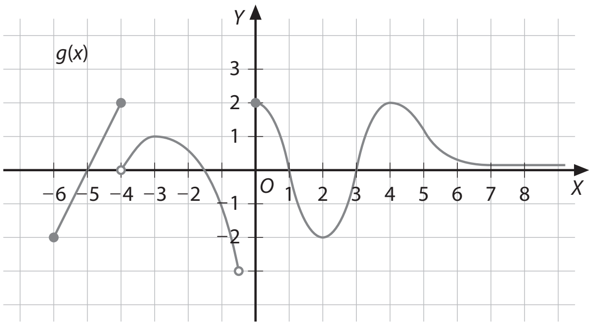
$d = |20t - 40|$; 4 h

4 **A partir de las gráficas, halla los valores de las imágenes y antiimágenes.**

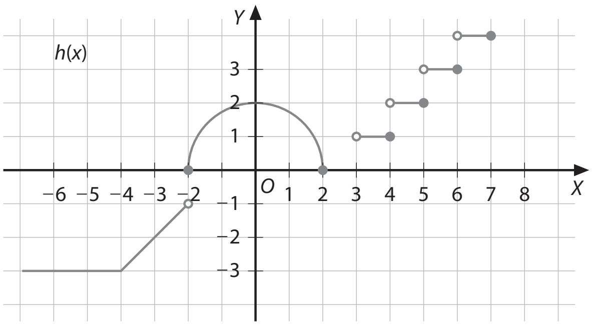
a) $f(2)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(-3/2)$, $f(-9/2)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-2)$



b) $g(-4)$, $g(-1/2)$, $g(0)$, $g^{-1}(2)$, $g^{-1}(-3)$, $g^{-1}(0)$



c) $h(-5)$, $h(-3)$, $h(-2)$, $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$, $h^{-1}(-3)$, $h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(2)$



a) $f(2) = 2$, $f(6) = 0$, $f(7) = -1$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -2$, $f\left(-\dfrac{9}{2}\right) = -2$,

$f^{-1}(0) = \{-6, -3, 0, 6\}$, $f^{-1}(2) = \left\{-\dfrac{15}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{3}{2}, 4\right]$,

$f^{-1}(-2) = \left\{-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{3}{2}, 8\right\}$

b) $g(-4) = 2$, $\nexists g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $g(0) = 2$, $g^{-1}(2) = \{-4, 0, 4\}$,

$\nexists g^{-1}(-3)$, $g^{-1}(0) = \left\{-5, -\dfrac{3}{2}, 1, 3\right\}$

c) $h(-5) = -3$, $h(-3) = -2$, $h(-2) = 0$, $h(0) = 2$, $\nexists h(3)$, $h(5) = 2$, $h^{-1}(-3) = (-\infty, -4]$, $\nexists h^{-1}(-1)$, $h^{-1}(2) = \{0\} \cup (4, 5]$

5 **Halla el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 2x^3 - x - \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3 - 7x^2 + 10x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - x + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-5}}{x-2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3}{x-5} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

j) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 7x + 2}$

a) $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

d) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

e) $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$

f) $\left[\dfrac{5}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$

g) $\mathbb{R} - \{0\}$

h) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$

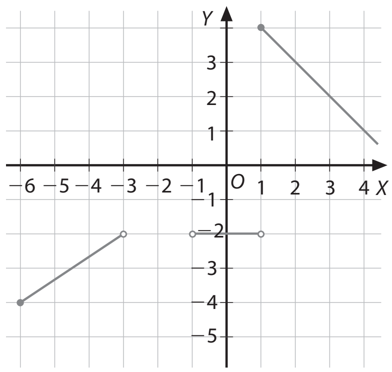
i) $\mathbb{R} - [0, 1]$

j) $\mathbb{R} - \{0\}$

k) $[-2, +\infty)$

l) $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}, 2\right\}$

6 **Calcula la expresión analítica de la función representada en la figura, e indica su dominio.**



$$f(x) = \begin{cases} 2x/3 & \text{si } -6 \le x < -3 \\ -2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Dom $f = [-6, -3) \cup (-1, +\infty)$

7 **Calcula el recorrido de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 - x$

c) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = 7$

a) $[-1, +\infty)$ *b)* $[-1/4, +\infty)$ *c)* $(-\infty, 0]$ *d)* $\{7\}$

8 **Fíjate en las representaciones gráficas de las siguientes funciones.**

a) **Determina los intervalos de signo constante.**

b) **Estudia su monotonía y su curvatura, si es posible.**

c) **¿Qué funciones están acotadas?**

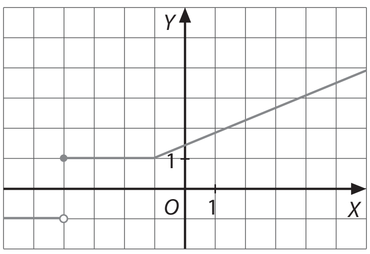


FIGURA 8.30.a.

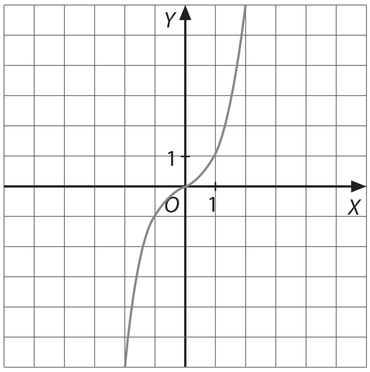


FIGURA 8.30.b.

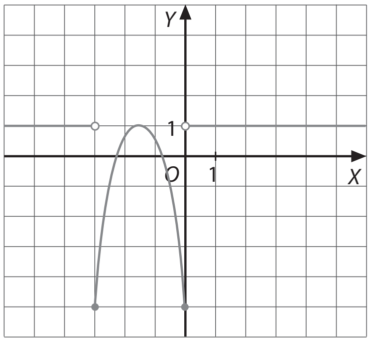


FIGURA 8.30.c.

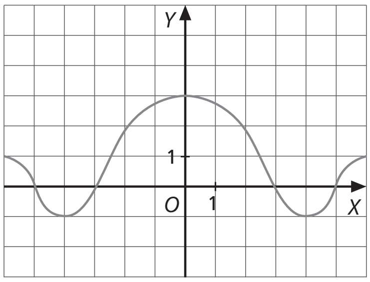


FIGURA 8.30.d.

a) Figura 8.30.a: En $x \in [-4, +\infty)$, $f(x) > 0$ y en $x \in (-\infty, 4)$, $f(x) < 0$.

Figura 8.30.b: En $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < 0$ y en $x \in (0, +\infty)$, $f(x) > 0$.

Figura 8.30.c: En $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$, $f(x) > 0$ y en $x \in \left[-3, -\dfrac{7}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right]$, $f(x) < 0$.

Figura 8.30.d: En $x \in (-6, -5) \cup (-3, 3) \cup (5, 6)$, $f(x) > 0$ y en $x \in (-5, -3) \cup (3, 5)$, $f(x) < 0$.

b) Figura 8.30.a: $f(x)$ es estrictamente creciente en $[1, +\infty)$.

Figura 8.30.b: $f(x)$ es estrictamente creciente en su dominio. Es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

Figura 8.30.c: $f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(-3, -\dfrac{3}{2}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$. Es convexa en $(-3, 0)$.

Figura 8.30.d: $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-6, -4) \cup (0, 4)$ y estrictamente creciente en $(-4, 0) \cup (4, 6)$. Es cóncava en $\left(-5, -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}, 5\right)$ y convexa en $(-6, -5) \cup \left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

c) Figura 8.30.a: No está acotada superiormente, pero sí inferiormente por -1. Figura 8.30.b: No está acotada.

Figura 8.30.c: Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -5. Figura 8.30.d: Está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -1.

9 **De las funciones representadas en las figuras, determina:**

a) **Cuál está acotada.** ***b)*** **Si son pares o impares.**

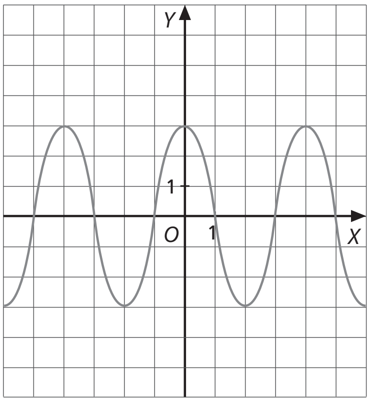


Figura 8.31.a.

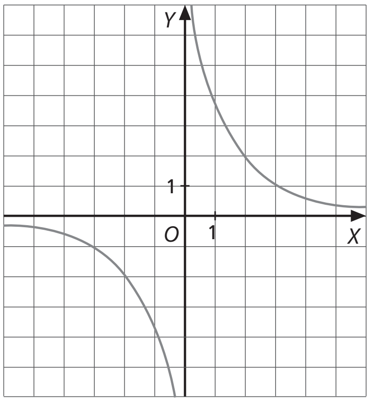


Figura 8.31.b.

a) La figura 8.31.a está acotada, $-3 \leq f(x) \leq 3$. La figura 8.31.b no está acotada.

b) La figura 8.31.a es par y la figura 8.31.b es impar.

10 **Determina el período de la función representada en la figura 8.31.a.**

$T = 6$

11 **Determina los intervalos de signo constante de la función** $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+2}$.

Cuadro de signos:

		−1	2
$x+1$	−	+	+
$-x+2$	+	+	−
$f(x)$	−	+	−

$f(x) < 0\ \forall\, x \in (-\infty, -1)$ $\qquad f(x) > 0\ \forall\, x \in (-1, 2)$

$f(x) < 0\ \forall\, x \in (2, +\infty)$

12 **Determina el tipo de simetría de la función** $f(x) = x - (4/x)$.

$f(-x) = -x - (4/(-x)) = -x + (4/x) = -(x - (4/x)) = -f(x)$

Por tanto, la function $f(x)$ es impar.

13 **A partir de las funciones** $f(x) = x + 1$ **y** $g(x) = \dfrac{2-x}{3x-6}$**, realiza las siguientes operaciones e indica sus respectivos dominios:**

a) $(f + g)(x)$ ***b)*** $(f \cdot g)(x)$ ***c)*** $(f/g)(x)$

a) $(f+g)(x) = \dfrac{3x+2}{3}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{-x-1}{3}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $(f/g)(x) = -3x - 3$, Dom $(f/g) = \mathbb{R} - \{2\}$

14 **Si** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **y** $g(x) = x + 1$**, averigua** $(g/f)(x)$ **y su dominio.**

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \sqrt{x+1}$

$\text{Dom}\left(\dfrac{g}{f}\right) = (-1, +\infty)$

15 **Dadas las funciones** $f(x) = x^2 - 1$ **y** $g(x) = \sqrt{2x-1}$**, calcula las composiciones** $f \circ g$ **y** $g \circ f$**, y el dominio de cada una.**

$(f \circ g)(x) = 2x - 2$, Dom $(f \circ g) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$, Dom $(g \circ f) = \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{3}{2}}, +\infty\right)$

16 **Indica qué tipo de funciones representan las gráficas de las figuras 8.36: inyectivas, suprayectivas o biyectivas.**

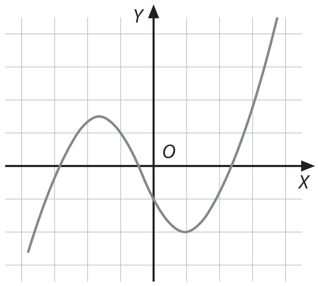


Figura 8.36.a.

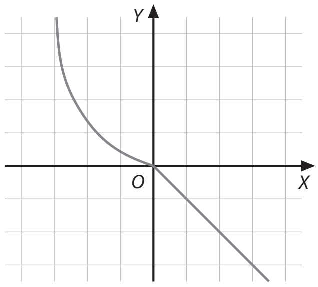


Figura 8.36.b.

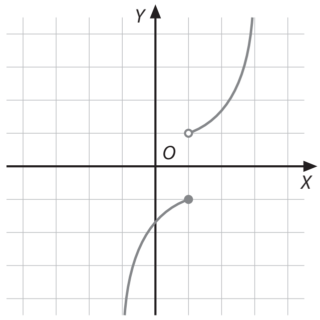


Figura 8.36.c.

La función representada en la figura 8.36.a no es inyectiva, pero sí suprayectiva, por tanto, no es biyectiva.

La función de la figura 8.36.b es inyectiva y suprayectiva y, en consecuencia, biyectiva.

La función de la figura 8.36.c es inyectiva, pero no suprayectiva, por tanto, no es biyectiva.

17 **Indica cuáles de estas funciones son inyectivas.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = \dfrac{3-4x}{2}$

d) $f(x) = x^3 - 2$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Son inyectivas las funciones correspondientes a los siguientes apartados: *a), c), d), f).*

a) $\dfrac{1}{a} - 2 = \dfrac{1}{b} - 2 \Rightarrow a = b$

c) $\dfrac{3-4a}{2} = \dfrac{3-4b}{2} \Rightarrow a = b$

d) $a^3 - 2 = b^3 - 2 \Rightarrow a = b$

f) $\sqrt{a-1} = \sqrt{b-1} \Rightarrow a = b$

18 **Calcula la función inversa, $f^{-1}(x)$, de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{6}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{2 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{7 - x}{x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4 + 5x}$

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 6x}{3}$

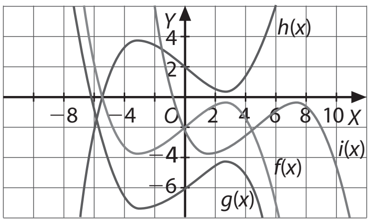
b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 3}{2x}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{7}{1 + x}$

d) $f^{-1}(x) = x^3 + 2$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{3 - 4x}{5x + 1}$

19 **A partir de la gráfica de $f(x)$, identifica las funciones representadas.**



$g(x) = f(x) - 4$; $h(x) = -f(x)$; $i(x) = f(x - 5)$

Ejercicios y problemas (páginas 230/234)

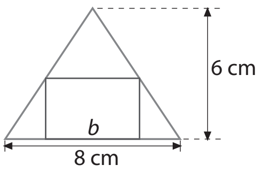
Funciones. Modelización

1 **Averigua la función que permite obtener el volumen de un cubo en función de su diagonal, *d*.**

Siendo x la arista del cubo, su volumen es $V = x^3$.

Como la diagonal de un cubo, d, es, en función de la arista, $d = x\sqrt{3}$, se obtiene que el volumen de un cubo, en función de su diagonal: $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{d^3\sqrt{3}}{9}$

2 **En un triángulo isósceles se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura 8.49. Halla la función que proporciona la superficie del rectángulo en función de su base, *b*. ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Y su recorrido?**



De la semejanza de triángulos se puede obtener la siguiente proporción: $\dfrac{6}{8} = \dfrac{6 - h}{b}$, de donde $h = 6 - \dfrac{3b}{4}$

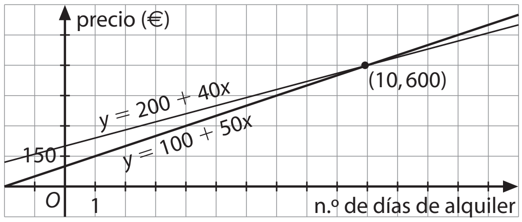
$A(b) = b \cdot \left(6 - \dfrac{3b}{4}\right) = \dfrac{-3b^2}{4} + 6b$

Función polinómica de grado 2. Para $b = 4$, $S(b) = 12$, que corresponde a la superficie máxima que puede tener el rectángulo.

Por lo tanto, Dom $A = (0, 8)$, Rec $A = (0, 12]$.

3 **Queremos alquilar un apartamento en verano. Una agencia, A, pide 200 € de entrada por costes diversos y 40 € diarios. Otra agencia, B, pide 100 € de entrada y 50 € diarios. Dibuja en un mismo sistema de referencia las gráficas que representan el precio del apartamento en función de los días, y determina a partir de cuántos días de alquiler resulta más económica la oferta de la agencia A.**

A partir de los 10 días.



4 **De entre las siguientes relaciones entre variables que sean funciones indica el dominio y recorrido.**

a) **A todo número real, *x*, se le asigna su inverso.**

b) **A cada número real, *x*, se le asigna un número entero, *z*, tal que $0 \le x - z < 1$.**

c) **A cada número real, *x*, se le asigna otro número real, *y*, de tal manera que se cumpla $x^2 + y^2 = 4$.**

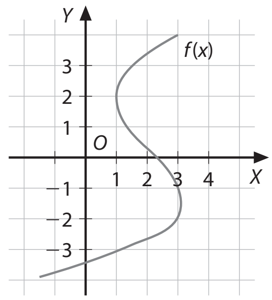
d)

x	−2	−1	0	1	2	3
y	5	5	5	5	5	5

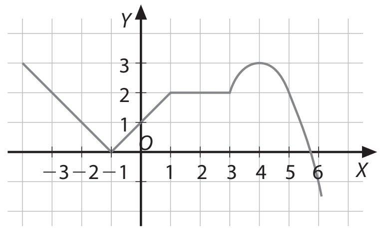
e)

x	3	3	3	3	3	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5

f)



g)



a) Es una función. Su dominio y recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Es una función que se denomina parte entera de x, $E(x)$. Su dominio son todos los reales, y su recorrido los enteros.

c) No corresponde a una función.

d) La tabla corresponde a una función constante. Como no se dan más indicaciones, hemos de suponer que es una función de dominio discreto.

$f(x) = 5$, Dom $f = \{z \in \mathbb{Z} \mid -2 \le z \le 3\}$, Rec $f = \{5\}$

e) La tabla no corresponde a una función: para un mismo valor de x existen varias imágenes posibles.

f) La gráfica no corresponde a una función: para un mismo valor de x existen varias imágenes posibles.

g) La gráfica corresponde a una función. Su dominio es $(-\infty, +\infty)$. Su recorrido es $(-\infty, +\infty)$.

5 **Un fabricante de latas de refresco necesita producir latas cilíndricas de 33 cm^3 de volumen. Expresa:**

a) **La relación entre la altura de la lata y el radio de su base.**

b) **El área total de la lata en función del radio de la base.**

a) $V = \pi r^2 h$, por tanto, la relación entre la altura y el radio es:

$$h = \frac{33}{\pi r^2}$$

b) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Así, el área de la lata es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{33}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{66}{r}$$

6 **Averigua la función que relaciona el área de un rectángulo con uno de sus lados, sabiendo que su perímetro mide 12 cm. ¿Qué tipo de función es? Represéntala. Halla su dominio y su recorrido. ¿Para qué valores es creciente?**

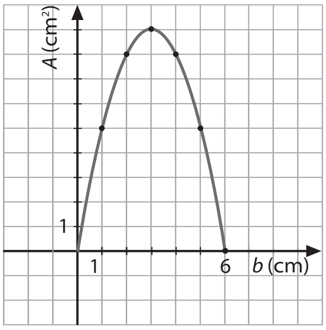
Suponemos un rectángulo de lados a y b, por lo tanto:

$$a + b = 6$$

Como $A = a \cdot b$:

$$A(b) = (6 - b) \cdot b = -b^2 + 6b$$

Es una función cuadrática.



Su dominio es (0, 6).

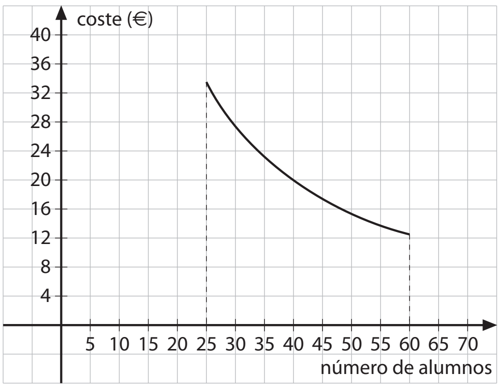
Su recorrido es (0, 9].

Es una función creciente $\forall\, b \in (0, 3)$.

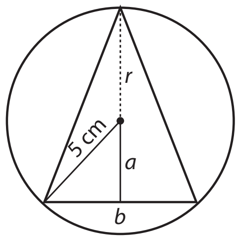
7 **Un centro de estudios alquila un autocar de 60 plazas para realizar una excursión. El alquiler es de 900 €. Por cada alumno que asista, la asociación de padres de la escuela subvenciona la salida con 2,50 €. El número mínimo de asistentes a la salida es de 25 alumnos. ¿Qué función relaciona el precio de la excursión por alumno con el número de alumnos que asistan? Realiza una gráfica que muestre esa relación y determina el dominio de dicha función.**

La función que proporciona el coste por alumno, siendo $25 \leq x \leq 60$ su dominio, es:

$$C(x) = \left(\frac{900}{x}\right) - 2{,}5$$



8 **En un círculo de 5 cm de radio se inscribe un triángulo isósceles. Halla su área en función de su base, *b*.**



El área de un triángulo es: $\dfrac{b \cdot h}{2}$

Según muestra la figura, la altura del triángulo, h, se puede descomponer como $h = r + a$, siendo a:

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Puesto que el radio vale 5 cm, tenemos que:

$$A(b) = \frac{b \cdot \left[r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right]}{2} = \frac{b \cdot \left(5 + \sqrt{25 - \frac{b^2}{4}}\right)}{2}$$

El dominio de A es (0, 10].

9 **Halla la expresión que pasa grados centígrados:**

a) **A grados Kelvin, sabiendo que 0 K corresponden a −273 °C, y 373 K, a 100 °C.**

b) **A grados Fahrenheit, sabiendo que 32 °F corresponden a 0 °C, y 212 °F, a 100 °C.**

a) Si x corresponde a los grados centígrados que se desean transformar y K a sus equivalentes en grados kelvin, tenemos que:

$$K = x + 273$$

b) Si x corresponde a los grados centígrados que se desean transformar y F a sus equivalentes en Farenheit, tenemos que:

$$F = 32 + \frac{180x}{100} = 32 + \frac{9x}{5}$$

10 **La cantidad de calor que hay que suministrar a un gramo de una sustancia para que esta aumente 1 °C se llama calor específico. Sabiendo que cuando se suministran 3 calorías a un gramo de cinc a 20 °C, la temperatura sube a 52,43 °C, averigua su calor específico y escribe una función que proporcione el incremento de temperatura de una masa cualquiera de cinc en función del aporte de calor.**

Dado que se trata de un gramo de sustancia, dividiendo el calor entre el incremento de temperatura se obtiene el calor específico del cinc:

$$\frac{3 \text{ cal}}{32{,}43 \text{ °C}} = 0{,}0925 \text{ cal/°C}$$

Mediante la definición de calor específico, c_e, se puede deducir que c_e = calor/(masa · incremento de temperatura).

Llamando Q al calor suministrado, y despejando de la fórmula anterior el incremento de temperatura, Δt, que se produce para un gramo de cinc es:

$$\Delta t = \frac{Q}{0{,}0925} = 10{,}81\, Q$$

Para una masa de cinc cualquiera, m:

$$\Delta t = \frac{10{,}81\, Q}{m}$$

11 **En la siguiente tabla se detalla el ahorro que se produce en el intercambio de bombillas, en función de la diferencia de potencia que consumen:**

Intercambio de bombillas	Ahorro (€)
25 W $\longrightarrow$ 5 W	4
40 W $\longrightarrow$ 7 W	6,6
60 W $\longrightarrow$ 11W	9,8
75 W $\longrightarrow$ 15 W	12
100 W $\longrightarrow$ 20 W	16
120 W $\longrightarrow$ 23 W	19,4

¿Qué tipo de función relaciona el ahorro, *A,* con la diferencia de potencia consumida, *D*?

La relación es directamente proporcional. Es una función lineal. Se observa que:

$$\frac{4}{20} = \frac{6,6}{33} = \frac{9,8}{49} = \cdots = 0,2$$

El ahorro que se estima por vatio de potencia consumida es de 0,20 €, por tanto, por un kilovatio será de 200 €.

12 **La longitud de una varilla de metal varía en función de la temperatura a la que se somete. La tabla muestra la relación entre la temperatura y la longitud de dicha varilla, que inicialmente está a 20 °C y mide 35 m de longitud:**

Temperatura (°C)	20	40	60
Longitud (cm)	3 500	3 501,176	3 502,352

Sabiendo que la relación entre la longitud de la varilla y el incremento de temperatura es afín, halla la expresión analítica *L*(*t*). ¿Cuánto medirá la varilla a 80 °C?

La relación es lineal:

$$l(t) = at + b$$

Sustituyendo los datos que proporciona la tabla, se puede obtener y comprobar que:

$l(t) = 0,0588\ t + 3\ 498,824$ $\qquad$ $l(80) = 3\ 503,528$ cm

La varilla a 80 °C medirá 3 503,528 cm.

13 **La facturación que hace una compañía eléctrica cada dos meses a uno de sus usuarios engloba tres conceptos:**

- ***Facturación de la potencia:* por cada kW contratado y por cada mes, la tarifa es de 2,82 €.**
- ***Consumo:* por cada kWh consumido, la tarifa es de 0,16 €.**
- ***Concepto fijo:* 1,13 € por mes en concepto de equipo de medida.**

Finalmente, al importe se le aplica un 21% de IVA.

Si llamamos *P* a la potencia contratada y *C* al consumo en kWh de dos meses, halla la función que proporciona el importe de la factura bimestral.

a) **¿Cuántas variables engloba?**

b) **Calcula el total de una factura para una potencia contratada de 4,4 kW y un consumo bimestral de 271 kWh.**

a) Como son dos meses el concepto fijo será $2 \cdot 1,13$ y la facturación de la potencia $2 \cdot 2,82 \cdot P$. Hay que aplicar el IVA para saber cuánto se paga realmente:

$I = (2 \cdot 2,82 \cdot P + 0,16 \cdot C + 2 \cdot 1,13) \cdot 1,21$

Esta función engloba dos variables, *P* y *C*.

b) El usuario que tiene contratada una potencia de 4,4 kW y un consumo bimestral de 271 kWh, debe pagar a la compañía eléctrica:

$I = (2 \cdot 2,82 \cdot 4,4 + 0,16 \cdot 271 + 2 \cdot 1,13) \cdot 1,21 = 85,23$ €

14 **Una empresa realiza un estudio comparativo sobre el coste que suponen dos piezas distintas. Estima que el coste en euros de la pieza tipo A, en función del número de miles de piezas, *x,* si el pedido no sobrepasa las 2 000 piezas, viene dado por la expresión:**

$$C_A(x) = -2x^2 + 5x$$

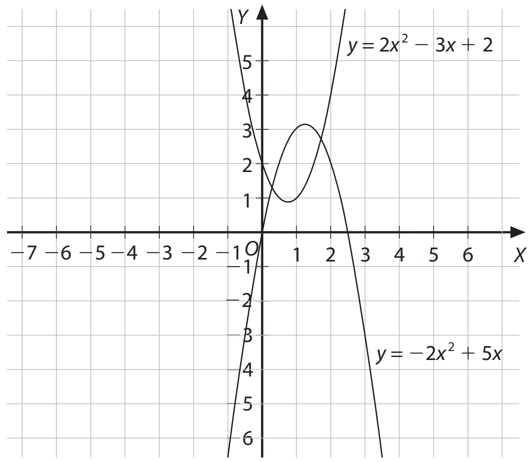
Y el coste de la pieza tipo B en las mismas condiciones es:

$$C_B(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

a) **¿Para qué número de piezas es menor el coste de la producción de la pieza tipo A?**

b) **Para un pedido de 2 000 piezas, ¿qué tipo de pieza produce menor coste a la empresa?**

c) **¿Cuántas piezas del tipo B producen menor coste?**



Debemos calcular los puntos de intersección de las dos gráficas, es decir, el número de piezas de un tipo u otro que producen a la empresa el mismo coste:

$C_A(x) = C_B(x)$ si $-2x^2 + 5x = 2x^2 - 3x + 2$
$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

Resolviendo obtenemos:

$$x = 0,293 \text{ y } x = 1,707$$

Como *x* viene dado en miles de piezas, la solución será 293 piezas y 1 707 piezas.

a) La pieza tipo A tiene menor coste para un pedido menor de 293 unidades o para un pedido de entre 1 707 y 2 000 unidades (el enunciado especifica que el pedido no sobrepase las 2 000 piezas).

b) Para un pedido de 2 000 piezas es menor el coste de la pieza tipo A, ya que si observamos en la gráfica el valor de $x = 2$ para las dos funciones, es menor en la función tipo A.

c) El mínimo de la función $C_B(x)$ se produce en el vertice de la función:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4} = 0,750 \Rightarrow x = 750 \text{ piezas}$$

15 **Un granjero va cerrar un terreno rectangular de 80 m² con una valla. Uno de los lados linda con la carretera, por lo que la valla de este lado es más resistente y cuesta 15 €/m, y el resto de valla está a 10 €/m.**

Expresa, en función del lado que linda con la carretera, *x,* el precio total de la valla.

En primer lugar, $xy = 80$, por lo que $y = \dfrac{80}{x}$.

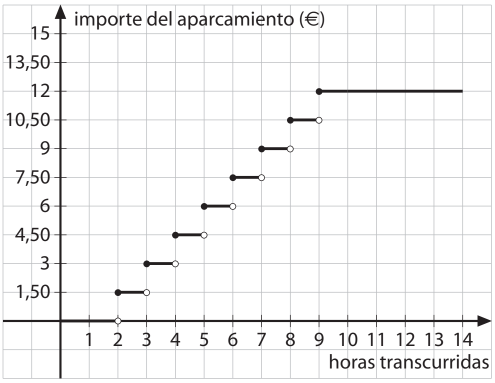
Los dos lados *y,* y un lado *x* cuestan 10 €/m y el otro lado *x,* 15 €/m.

Por tanto:

$$C(x) = \left(x + 2 \cdot \frac{80}{x}\right) \cdot 10 + 15x = 25x + \frac{1\ 600}{x}$$

16 **En el aparcamiento de unos grandes almacenes se debe abonar 1,50 € por cada hora o fracción de hora, hasta un máximo de 12 €, siendo las dos primeras horas gratuitas. Representa gráficamente la función que expresa el importe del aparcamiento en función del tiempo transcurrido.**

Se trata de una función escalonada en la que durante las dos primeras horas hay un valor constante, luego para cada intervalo entre una hora y otra toma otro valor constante, hasta las 9 horas y a partir de ahí es constante de valor 12 €.



17 **El servicio de correos de un cierto país tiene las siguientes tarifas para el envío de cartas:**

Hasta 20 g de peso, se paga 0,35 €. Por cada 10 g o fracción de 10 g de exceso de peso, se añaden 0,07 € más.

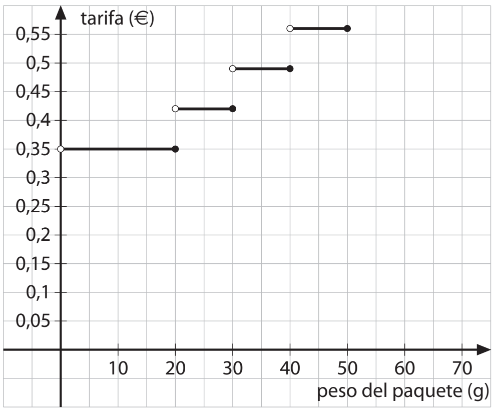
a) **Expresa la relación entre el precio del envío, *y*, y el peso de la carta, *x*, hasta 50 g.**

b) **Representa gráficamente la función.**

a) Se trata de una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}35 & \text{si } 0 < x \leq 20 \\ 0{,}42 & \text{si } 20 < x \leq 30 \\ 0{,}49 & \text{si } 30 < x \leq 40 \\ 0{,}56 & \text{si } 40 < x \leq 50 \end{cases}$$

b)



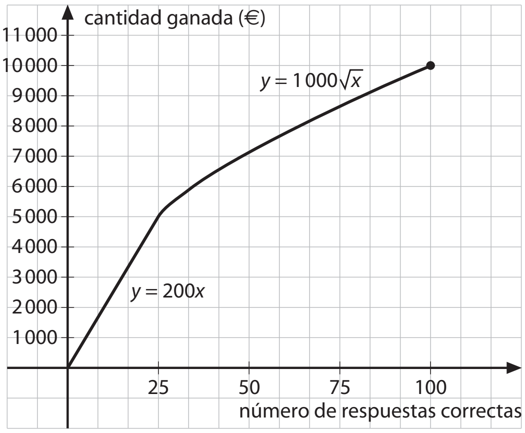
18 **En un concurso, los participantes deben contestar 100 preguntas. En las 25 primeras, se ganan 200 € por cada una que se acierte. A partir de aquí, el premio es, en miles de euros, la raíz cuadrada del número de preguntas acertadas.**

a) **Expresa, mediante una función, la relación entre respuestas correctas y cantidad ganada, y represéntala.**

b) **¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?**

c) **¿Cuántas respuestas ha debido acertar un participante que ha ganado 6 082,76 €?**

a) $f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } 0 \leq x \leq 25 \\ 10^3\sqrt{x} & \text{si } 25 < x \leq 100 \end{cases}$



b) Su dominio es el conjunto de enteros no negativos, *n*, tal que $0 \leq n \leq 100$.

Su recorrido está formado por los números *n* enteros no negativos, $200n$, si $0 \leq n \leq 25$ y el conjunto de números $1\,000\sqrt{n}$ si $25 \leq n \leq 100$.

c) Si ha ganado 6 082,76 € ha acertado 37 respuestas.

19 **Una lancha circula, cuando se ha alejado 60 kilómetros del muelle, a una media de 60 km/h. En ese mismo instante, desde el muelle sale otra lancha a una velocidad media de 75 km/h. Ambas mantienen la velocidad media constante. Expresa cómo varía la distancia que las separa en función del tiempo. Cuando la segunda lancha haya adelantado en 45 km a la primera, ¿qué tiempo habrá transcurrido?**

La distancia será: $d(t) = |15t - 60|$

Transcurren 7 horas para que la segunda lancha adelante en 45 km a la primera.

20 **El beneficio mensual de un artesano expresado en euros, cuando fabrica y vende *x* objetos, se ajusta a la función $B(x) = -0{,}5x^2 + 50x - 800$, donde $20 \leq x \leq 60$.**

a) **Determina el beneficio que obtiene cuando fabrica y vende 20 objetos y 60 objetos, respectivamente.**

b) **¿Cuántos objetos debe fabricar y vender para obtener el máximo beneficio?, ¿a cuánto asciende?**

a) $B(20) = 0$ €; $B(60) = 400$ €

b) La función beneficio tiene su valor máximo en $x = -\dfrac{b}{2a} =$

$= -\dfrac{50}{-1} = 50$, es decir, cuando fabrica y vende 50 objetos su beneficio es máximo y es de $B(50) = 450$ €.

21 **Si el precio de la entrada al cine es de 6 €, van 320 personas. Se sabe que si aumenta el precio en 0,25 €, hay 10 espectadores menos. Halla:**

a) **La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.**

b) **La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.**

c) **El precio de la entrada para obtener el máximo ingreso.**

a) La función es una recta que pasa por el punto (6, 320) y tiene pendiente $-\dfrac{10}{0{,}25} = -40$, por tanto, siendo *e* el número de espectadores y *x* el precio de la entrada:

$$e(x) = 320 - 40(x - 6) = 560 - 40x$$

b) Multiplicando espectadores por precio: $I(x) = 560x - 40x^2$

c) $I(x)$ es una función polinómica de segundo grado, con un máximo en $x = -\dfrac{560}{-80} = 7$ €, es decir, los ingresos son máximos cuando el precio de la entrada es de 7 €.

22 **El beneficio (en miles de euros) de una empresa por la venta de x unidades de un producto, lo da por la función: $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$, $50 \leq x \leq 250$.**

a) **¿Cuántas unidades habrá vendido si el beneficio que ha obtenido es de 3 900 miles de euros?**

b) **¿Cuántas unidades debe vender para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende este beneficio?**

c) **¿Cuántas unidades debe vender para no tener pérdidas?**

a) $3\,900 = -x^2 + 300x - 16\,100 \Rightarrow x^2 - 300x + 20\,000 = 0$ $\Rightarrow x = 100$ o $x = 200$, puede haber vendido 100 o 200 unidades del producto.

b) Valor máximo en $x = -\dfrac{300}{-2} = 150$ unidades del producto. $B(150) = 6\,400$ miles de euros es el beneficio máximo.

c) $B(x) \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 300x - 16\,100 \geq 0$

$-x^2 + 300x - 16\,100 = -(x - 70)(x - 230)$

Realizamos un cuadro de signos:

	50 – 70	70 – 230	230 – 250
$x - 70$	$-$	$+$	$+$
$x - 230$	$-$	$-$	$+$
$-(x - 70)(x - 230)$	$-$	$+$	$-$

La empresa no tendrá pérdidas si $70 \leq x \leq 230$.

Dominio y recorrido

23 **Halla el dominio de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

c) $f(x) = 3x + \sqrt{x} - 2$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{6x-1}{\sqrt{x+1}}$

f) $f(x) = \dfrac{6x-1}{\sqrt{x-1}}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^3+7}{\sqrt[3]{3x+6}}$

h) $f(x) = \dfrac{7x+5}{(x^2-1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$

k) $f(x) = \dfrac{3x+1}{1-2x}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2x^2}$

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

ñ) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}}$

o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x}}$

p) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x^2}}$

q) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{3-x} & \text{si } x < 3 \\ -7 & \text{si } x = 4 \\ \dfrac{1}{x-10} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

a) Dom $f = [-3, +\infty)$

b) Dom $f = (-\infty, 3]$

c) Dom $f = [0, +\infty)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$

e) Dom $f = [0, +\infty)$

f) Dom $f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

g) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$

h) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i) Dom $f = \mathbb{R}$

j) Dom $f = \mathbb{R} - [-1, 1]$

k) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

l) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$

m) Dom $f = (-2, +1]$

n) Dom $f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1] \cup [1, +\infty)$

ñ) Dom $f = (-3, +\infty)$

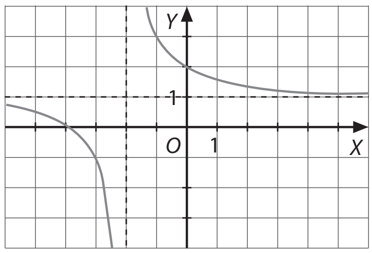
o) Dom $f = (0, +\infty)$

p) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

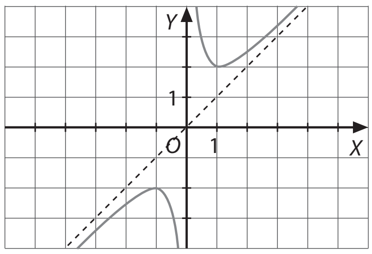
q) Dom $f = (-\infty, 3) \cup \{4\} \cup [5, 10) \cup (10, +\infty)$

24 **Averigua el recorrido de estas funciones.**

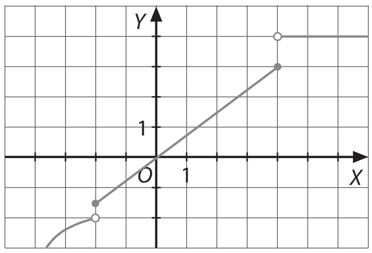
a)



b)



c)



a) Rec $f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Rec $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) Rec $f = (-\infty, -2) \cup [-1{,}5; 3) \cup \{4\}$

25 **Averigua el recorrido de estas funciones.**

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{3x}{2} + 2$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

d) $f(x) = x^2 - 4x$

e) $f(x) = E(x) + 4$

f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 4 \\ -x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) Rec $f = \left[\dfrac{-1}{8}, +\infty\right)$

b) Rec $f = \left(-\infty, \dfrac{25}{8}\right]$

c) Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$

d) Rec $f = [-4, +\infty)$

e) Rec $f = \mathbb{Z}$

f) Rec $f = (-\infty, 4]$

26 **¿Son iguales $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$? ¿Por qué?**

No son iguales porque su dominio no es el mismo.

Dom $f = \mathbb{R}$ y Dom $g = \mathbb{R} - \{2\}$

Representación de funciones

27 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -x + 5$

b) $g(x) = |-x + 5|$

c) $f(x) = 2x + 3$

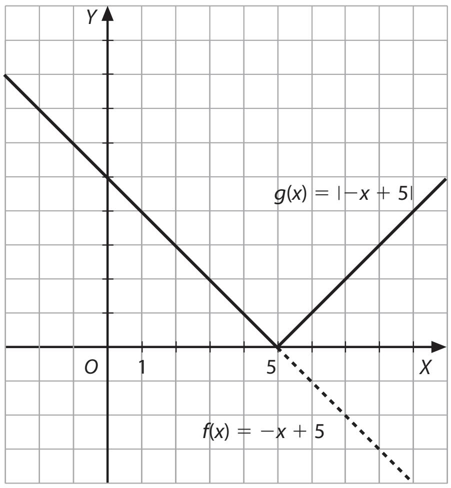
d) $g(x) = |2x + 3|$

e) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

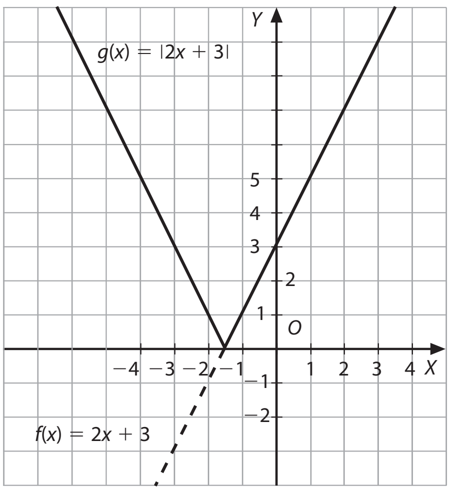
f) $g(x) = |-2x^2 + 5x + 3|$

A partir de $f(x)$ representamos $g(x)$ en cada caso.

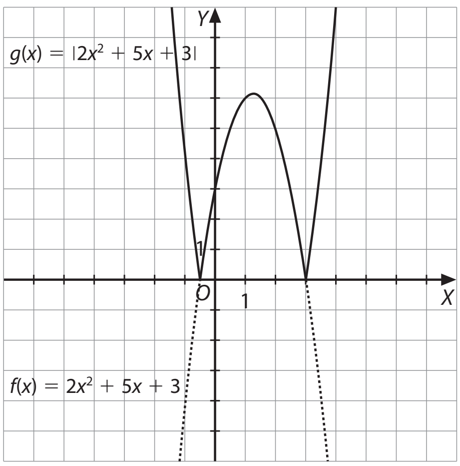
a), b)



c), d)



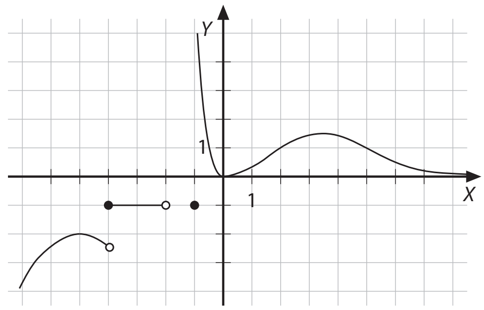
e), f)



28 **A partir de la función representada en la figura 8.56, halla:**

a) $f(0)$, $f(-2)$, $f(-4)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

b) **Dom f y Rec f**



a) $f(0) = 0$, $\nexists f(-2)$, $f(-4) = -1$,

$f^{-1}(1) = \left\{-\dfrac{1}{2}, 2, 5\right\}$, $f^{-1}(-1) = [-4, -2) \cup \{-1\}$,

$f^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -6$

b) Dom $f = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$,

Rec $f = (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty)$

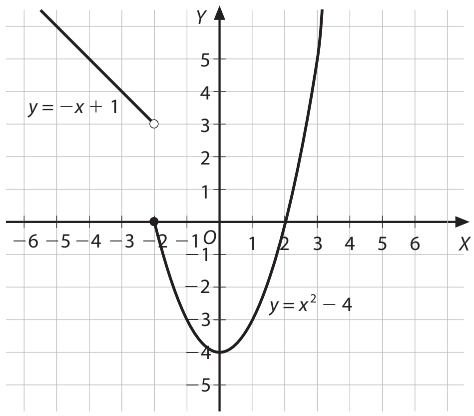
29 **Representa las siguientes funciones e indica sus dominios y recorridos.**

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si} -1 < x \leq 3 \\ -x^2 - 4x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

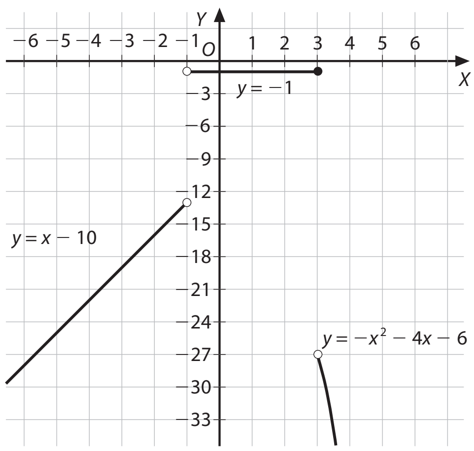
c) $f(x) = |x^2 - 2x|$

a)



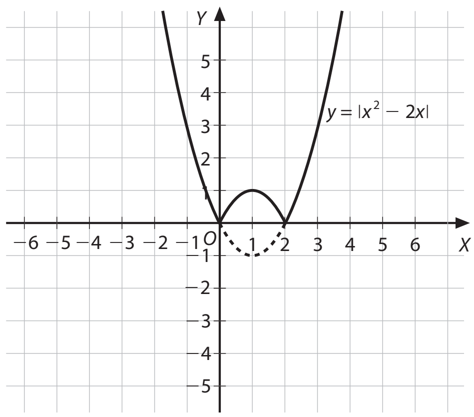
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-4, +\infty)$

b)



Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$, Rec $f = (-\infty, -11) \cup \{-1\}$

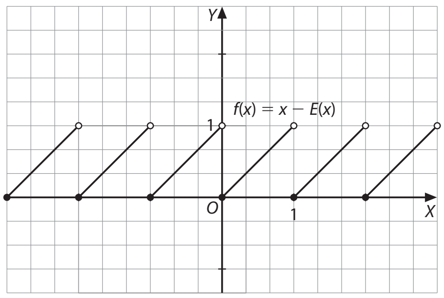
c)



Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, +\infty)$

30 **La función $f(x) = x - E(x)$ es la función que a cada número real x, comprendido en un intervalo $[z, z + 1)$, le hace corresponder $x - z$. Por ejemplo, $f(3{,}25) = 3{,}25 - 3 = 0{,}25$, $f(-3{,}25) = 0{,}75$, $f(0{,}5) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$, $f(-0{,}5) = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$. Haz una tabla de valores y realiza su representación gráfica.**

x	$f(x)$
0	0
1	0
1,5	0,5
1,75	0,75
−0,5	0,5
−1	0
−1,5	0,5
−1,75	0,25



Características de las funciones

31 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, determina sus intervalos de signo constante.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $f(x) = 0$ en $x = 0$, por lo tanto, intervalos de signo constante son:

$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$

$$f(-2) = \frac{4}{-1} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-\infty, -1),\ f(x) < 0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{0{,}25}{0{,}5} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-1, 0),\ f(x) > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (0, +\infty),\ f(x) > 0$$

32 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$, determina sus intervalos de signo constante.**

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ y $f(x) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$, por lo tanto, los intervalos de signo constante son los siguientes:

$(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$

$$f(-3) = \frac{5}{-3} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-\infty, -2),\ f(x) < 0$$

$$f(-1) = \frac{-3}{-1} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (-2, 0),\ f(x) > 0$$

$$f(1) = \frac{-3}{1} < 0 \Rightarrow \forall\, x \in (0, 2),\ f(x) < 0$$

$$f(3) = \frac{5}{3} > 0 \Rightarrow \forall\, x \in (2, +\infty),\ f(x) > 0$$

33 **Estudia en las funciones que muestran las figuras, los intervalos de signo constante, la monotonía y la curvatura si es posible. ¿Está acotada alguna de las funciones? ¿Hay alguna que presente simetría? ¿Y periodicidad?**

FIGURA 8.57.a.

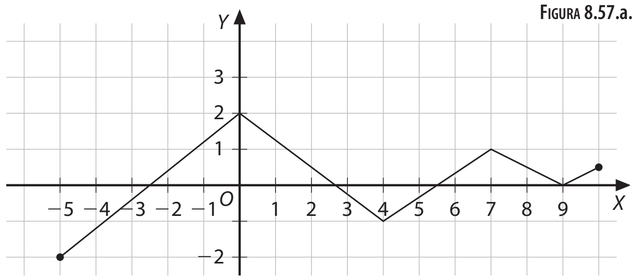


FIGURA 8.57.b.

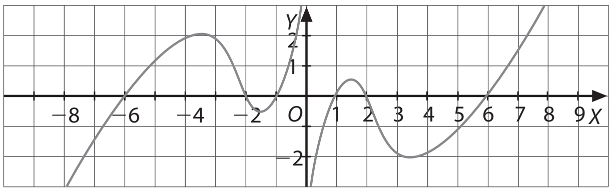


FIGURA 8.57.c.

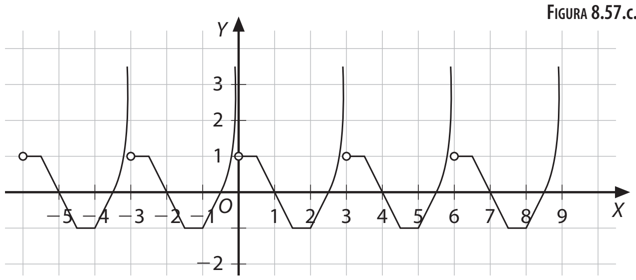


Figura 8.57.a.

- Intervalos de signo constante:
  $f(x) > 0$ en $(-2{,}5; 2{,}5) \cup (5{,}5; 9) \cup (9, 10]$
  $f(x) < 0$ en $[-5; -2{,}5) \cup (2{,}5; 5{,}5)$
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-5, 0)$, en $(4, 7)$ y en $(9, 10)$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, 4)$ y en $(7, 9)$.
- Función acotada, $|f(x)| \le 2$, no es simétrica ni periódica.

Figura 8.57.b.

- Intervalos de signo constante:
  $f(x) > 0$ en $(-6, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (6, +\infty)$
  $f(x) < 0$ en $(-\infty, -6) \cup (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 6)$
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty; -3{,}5)$, en $(-1{,}5; 0)$, en $(0; 1{,}5)$, y en $(3{,}5; +\infty)$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-3{,}5; -1{,}5)$, y en $(1{,}5; 3{,}5)$.
- Es convexa en $(-\infty, -3) \cup (0; 2{,}5)$ y cóncava en $(-3, 0) \cup (2{,}5; +\infty)$.
- Es una función no acotada, sí es simétrica respecto al origen de coordenadas, y por tanto, impar, y tampoco es periódica.

Figura 8.57.c.

- Intervalos de signo constante:
  Dado que es una función periódica de período $T = 3$:
  $f(x) > 0$ en $(0 + 3k, 1 + 3k) \cup (2{,}5 + 3k, 3 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x) < 0$ en $(1 + 3k; 2{,}5 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x)$ es estrictamente creciente en $(2 + 3k, 3 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(0{,}5 + 3k; 1{,}5 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
  $f(x)$ es constante en $(0 + 3k;\ 0{,}5 + 3k)$ en $(1{,}5 + 3k; 2 + 3k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es cóncava en $(3k - 1, 3k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Es una función no acotada.

Operaciones con funciones

34 **Calcula, en cada caso, $(f+g)(x)$ y su dominio.**

a) $f(x)=x^3+2x^2-x+3,\ g(x)=\sqrt{x^2-4}$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1},\ g(x)=\dfrac{-1}{x-2}$

a) $(f+g)(x)=x^3+2x^2-x+3+\sqrt{x^2-4}$

Dom $(f+g)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

b) $(f+g)(x)=\dfrac{3x^2-8x-1}{2x^2-3x-2}$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1}{2},2\right\}$

35 **Calcula $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$, y sus respectivos dominios, siendo $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1-x}{x+2}$.**

- $(f+g)(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x^2+2x}$

  Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

- $(f-g)(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+2x}$

  Dom $(f-g)=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

36 **Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, calcula $(f+g)(x)$ y su dominio.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2-1} & \text{si } x\le 3\\ x^2-1 & \text{si } x>3\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

La función suma queda determinada en tres intervalos, que son:

$(-\infty,0),\ [0,3]$ y $(3,+\infty)$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ \dfrac{x+3}{x^2-1} & \text{si } x\in[0,1)\cup(1,3]\\ \dfrac{x^3-x^2-x+2}{x-1} & \text{si } x\in(3,+\infty)\end{cases}$$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

37 **Calcula, en cada caso, $(f\cdot g)(x)$ y su dominio.**

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2x},\ g(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$

b) $f(x)=x^2-x-6,\ g(x)=\dfrac{x-2}{2x-6}$

a) $(f\cdot g)(x)=\dfrac{x-1}{2\sqrt{x+1}}$ *b)* $(f\cdot g)=\dfrac{x^2-4}{2}$

Dom $(f\cdot g)=(1,0)\cup(0,+\infty)$ Dom $(f\cdot g)=\mathbb{R}-\{3\}$

38 **Halla $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, y sus respectivos dominios, a partir de las funciones:**

$$f(x)=\frac{3+x}{x^2-3x}\ \text{ y }\ g(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$$

- $(f+g)(x)=\dfrac{4x^2-3x-3}{x^3-4x^2+3x}$
- $(f-g)(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2-x}$

Dom $(f+g)=\mathbb{R}-\{0,1,3\}$ Dom $(f-g)=\mathbb{R}-\{0,1,3\}$

- $(f/g)(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-5x}$

  Dom $(f/g)=\mathbb{R}-\left\{0,1,\dfrac{5}{3},3\right\}$

39 **Dadas las funciones definidas a trozos:**

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 \text{ si } x\le 0\\ \sqrt{x} \text{ si } x>0\end{cases}\quad \text{y}\quad g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} \text{ si } x<0\\ \sqrt{x^3} \text{ si } x\ge 0\end{cases}$$

encuentra la expresión de $(f\cdot g)(x)$ y su dominio.

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}x \text{ si } x<0\\ 0 \text{ si } x=0\\ x^2 \text{ si } x>0\end{cases}$$

Dom $(f\cdot g)=\mathbb{R}$

40 **A partir de los siguientes pares de funciones, halla $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$, indicando su dominio.**

a) $f(x)=\dfrac{2}{3x},\ g(x)=\dfrac{2x}{3}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=3$

c) $f(x)=2x^2+x-3,\ g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

a)
- $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}$

  Dom $(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$

- $(g\circ f)(x)=\dfrac{4}{9x}$

  Dom $(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b)
- $(f\circ g)(x)=f(3)=\sqrt{10}$

  Dom $(f\circ g)=\mathbb{R}$

- $(g\circ f)(x)=3$

  Dom $(g\circ f)=\mathbb{R}$

c) $(f\circ g)(x)=\dfrac{-3x^2-5x}{(x+1)^2}$

Dom $f\circ g=\mathbb{R}-\{-1\}$

$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-2}$

Dom $g\circ f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

41 **Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{2x-1}$, calcula la función compuesta de $f(x)$ y $g(x)$ y su dominio.**

$(g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{3-3x}{x+1}}$

Dom $(g\circ f)=(-1,1]$

42 **A partir de las funciones $f(x)=2x-x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-2}$, halla $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ y sus respectivos dominios. ¿Qué se observa? ¿Es siempre posible la composición?**

$(f\circ g)(x)=2\sqrt{x-2}-x+2$, Dom $(f\circ g)=[2,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$, Dom $(g\circ f)=\varnothing$

$(g\circ f)(x)$ no existe, puesto que el recorrido de $f(x)=(-\infty,1]$ no está incluido en el dominio de $g(x)$, que es $[2,+\infty)$.

43 **La función $h(x)=4x^2$ se puede entender como la composición de las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=x^2$ de este modo: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=4x^2=h(x)$.**

Expresa las siguientes funciones como composición de funciones, indicando estas últimas:

a) $h(x)=5\sqrt{x}+5$

b) $h(x)=5x^4+2x^2+6$

a) $f(x)=5x$ y $g(x)=\sqrt{x}+1\Rightarrow h(x)=(f\circ g)(x)$

b) $f(x)=5x^2+2x+6$ y $g(x)=x^2\Rightarrow h(x)=(f\circ g)(x)$

Función inversa

44 **¿Existe función inversa respecto de la composición para las siguientes funciones? Si es así, halla su expresión.**

a) $f(x) = 3x - 2$ ***e)*** $f(x) = \dfrac{1}{4x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{4x}$ ***f)*** $f(x) = -x - \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$ ***g)*** $f(x) = x^2 - 3x + 1$

d) $f(x) = x^2 + 5x$ ***h)*** $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x}$

a) $f(x)$ es biyectiva, por tanto, tiene inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

b) $f(x)$ es inyectiva: $f^{-1}(x) = \dfrac{-3}{4x-1}$

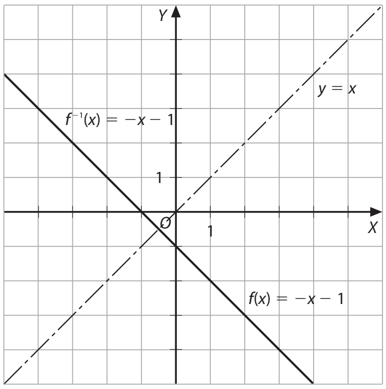
c) $f^{-1}(x) = x^3 - 8$

e) $f(x)$ es inyectiva: $f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{4x}$

h) $f^{-1}(x) = \dfrac{-4}{x-1}$

Las funciones de los apartados *d), f)* y *g)* no son inyectivas y por tanto no existe su función inversa.

45 **Representa la función $f(x) = -x - 1$ y su inversa.**

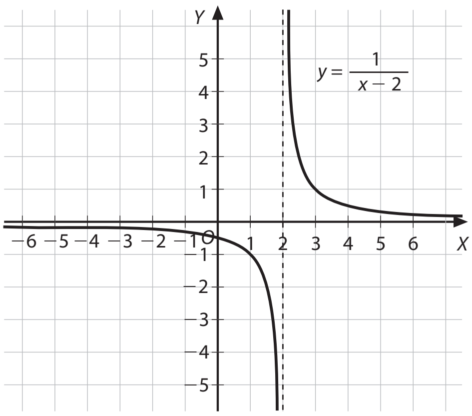


Transformaciones de funciones

46 **A partir de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, representa las siguientes funciones e indica sus dominios y recorridos.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ***b)*** $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

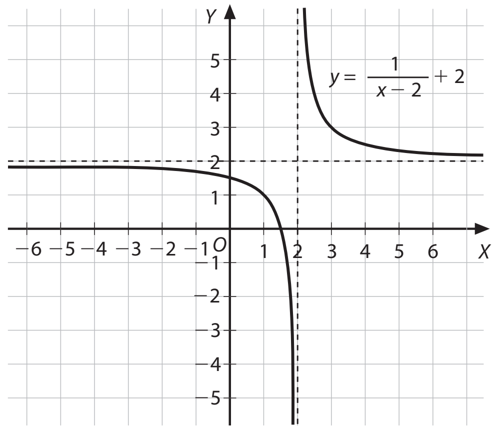
a)



Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$

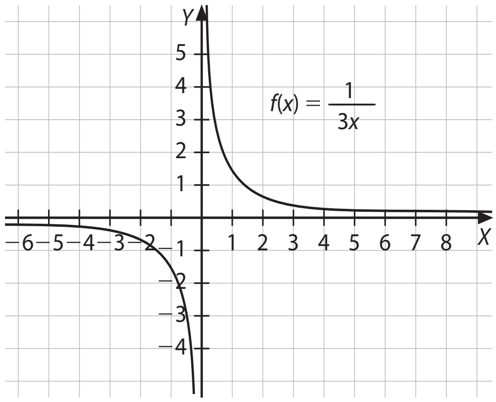
b)



Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$

c)

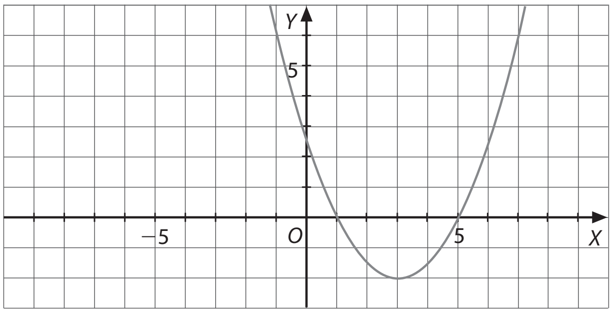


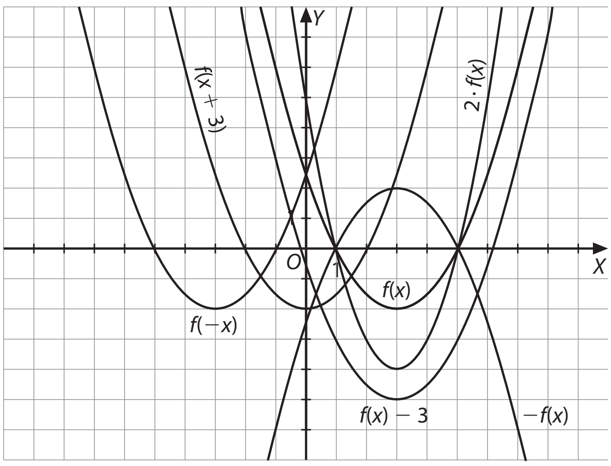
Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

Rec $f = \mathbb{R} - \{0\}$

47 **A partir de la gráfica de la función $f(x)$ de la figura, representa:**

$f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+3)$, $f(x) - 3$ y $2 \cdot f(x)$





Ejercicios de aplicación

48 **Considera las siguientes funciones:**

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- $g(x) = -(x + 1)^2$
- $h(x) = x^2 + x + 1$
- $i(x) = -3x^2 - x + 2$

a) **Represéntalas gráficamente, indicando sus ceros, sus vértices y sus ejes de simetría.**

b) **Estudia su signo.**

c) **Indica sus intervalos de monotonía y sus recorridos.**

d) **Escribe las funciones valor absoluto correspondientes a cada una como funciones a trozos, y represéntalas.**

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ es una función polinómica de segundo grado, con $a > 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola con las ramas hacia arriba, y su vértice es el punto que separa un intervalo de decrecimiento de otro de crecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$$

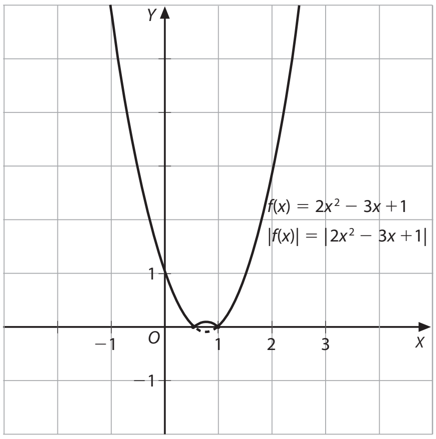
En $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.

En $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$, $f(x)$ es estrictamente creciente.

Su eje de simetría es la recta $x = \frac{3}{4}$.

Sus ceros son 1 y $\frac{1}{2}$, por lo que $f(x) > 0$ en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y $f(x) < 0$ en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Su recorrido es $\left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.



$$|2x^2 - 3x + 1| = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \text{ en } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty) \\ -2x^2 + 3x - 1 \text{ en } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

- $g(x) = -(x + 1)^2$ es una función polinómica de segundo grado, con $a < 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola con la ramas hacia abajo, y su vértice es el punto que separa un intervalo de crecimiento de otro de decrecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = \frac{-b}{2a} = -1$$

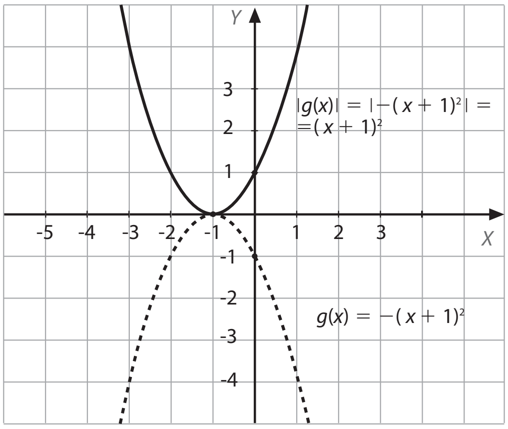
En $(-\infty, -1)$, $g(x)$ es estrictamente creciente.

En $(-1, +\infty)$, $g(x)$ es estrictamente decreciente.

Su eje de simetría es la recta $x = -1$.

Tiene un cero, -1, por lo que $g(x) < 0$ en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Su recorrido es $(-\infty, 0]$.



- $h(x) = x^2 + x + 1$ es una función polinómica de segundo grado, con $a > 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola *con las ramas hacia arriba*, y su vértice es el punto que separa un intervalo de decrecimiento de otro de crecimiento.

  Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es:

$$x = -\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

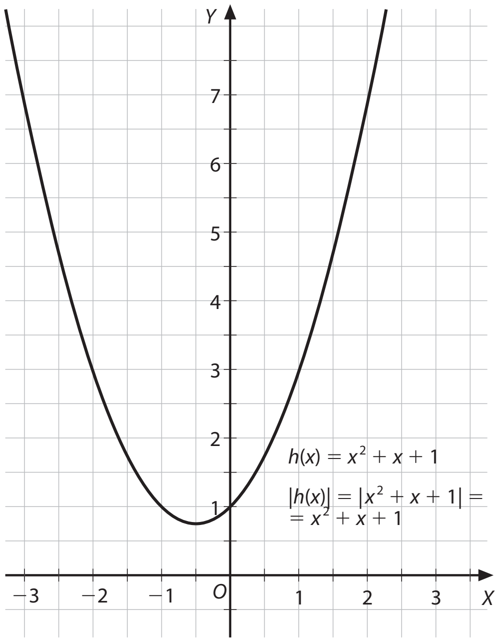
En $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$, $h(x)$ es estrictamente decreciente.

En $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$, $h(x)$ es estrictamente creciente.

Su eje de simetría es la recta $x = \frac{-1}{2}$.

No tiene ceros. Es siempre positiva.

Su recorrido es $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.



- $i(x) = -3x^2 - x + 2$ es una función polinómica de segundo grado, con $a < 0$, por tanto, su representación corresponde a una parábola invertida, y su vértice es el punto que separa un intervalo de crecimiento de otro de decrecimiento.

Dado que el vértice es el punto cuya abscisa es

$$x = -\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{6}$$

En $\left(-\infty, \frac{-1}{6}\right)$, $i(x)$ es estrictamente creciente.

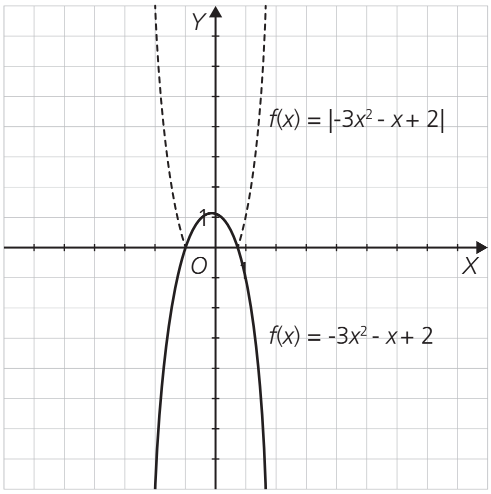
En $\left(\frac{-1}{6}, +\infty\right)$, $i(x)$ es estrictamente decreciente.

Su eje de simetría es la recta $x = \frac{-1}{6}$.

Tiene dos ceros, $\frac{2}{3}$ y -1, por lo que $i(x) < 0$ en:

$\left(-\infty, -1\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y $i(x) > 0$ en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

Su recorrido es $\left(-\infty, \frac{25}{12}\right]$.



49 **Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$:**

a) **Averigua sus ceros.**

b) **Determina sus intervalos de signo constante.**

c) **Esboza una gráfica, completando previamente la siguiente tabla de valores:**

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
$f(x)$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x - 9) = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x^2 + 3x - 9 = 0$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 1{,}85 \text{ y } x = -4{,}85$$

Por tanto, las soluciones serán:

$x = 0$, $x = 1{,}85$ y $x = -4{,}85$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ y los ceros de la función son los valores hallados en el apartado anterior, por lo tanto, los intervalos de signo constante son los siguientes:

$(-\infty; -4{,}85)$, $(-4{,}85; 0)$, $(0; 1{,}85)$ y $(1{,}85; +\infty)$

$f(-6) = -54 < 0$, $\forall\, x \in (-\infty, -4{,}85)$, $f(x) < 0$

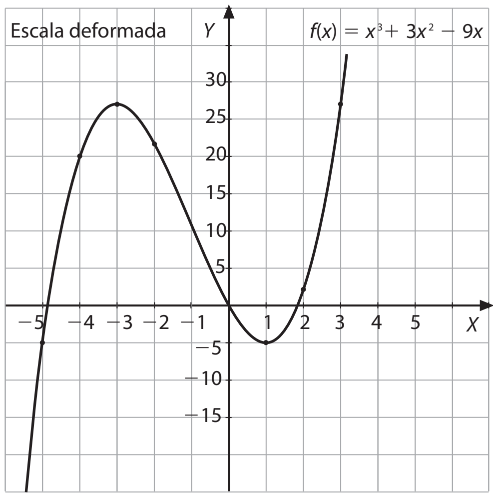
$f(-1) = 11 > 0$, $\forall\, x \in (-4{,}85; 0)$, $f(x) > 0$

$f(1) = -5 < 0$, $\forall\, x \in (0; 1{,}85)$, $f(x) < 0$

$f(2) = 2 > 0$, $\forall\, x \in (1{,}85; +\infty)$, $f(x) > 0$

c)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-5	20	27	22	11	0	-5	2	27	76	155



50 **La tarifa del transporte en taxi en cierta localidad depende linealmente de la longitud del trayecto que se efectúe. A un usuario de este servicio, una carrera de 3,6 km le cuesta 7,12 €, y a otro, 8,80 € un trayecto de 5 km. ¿Cuánto vale la bajada de bandera?**

La bajada de bandera cuesta 2,80 €.

51 **De una función lineal se conocen los puntos (−1, 5/2) y (1/4, −3). Halla su expresión analítica. ¿Es una función creciente?**

$f(x) = \frac{-22}{5}x - \frac{19}{10}$. Es una función decreciente.

52 **El porcentaje destinado de I+D del PIB de un determinado país en los años 2008, 2010 y 2012 es la que se indica en la siguiente tabla:**

Año	2008	2010	2012
% I+D del PIB	0,28	0,32	0,47

Mediante interpolación lineal, calcula el porcentaje del PIB destinado de I+D en el año 2009 y realiza una extrapolación para estimar cuánto se destinará en el año 2016.

Con los puntos extremos de la tabla se obtiene la recta $y = 0{,}28 + 0{,}05(x - 2008)$.

En el año 2009, el PIB destinado a I+D fue:

$$y = 0{,}28 + 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}33\,\%$$

En el año 2016 podemos suponer que el PIB destinado a I+D será $y = 0{,}28 + 0{,}05 \cdot 8 = 0{,}68\,\%$.

53 **El precio de un viaje en tren es función, entre otras cosas, de los kilómetros recorridos. Recorrer 57 km cuesta 2,21 € y recorrer 68 km vale 2,54 €. Averigua:**

a) **La función afín que expresa el coste del billete en función de los kilómetros recorridos.**

b) **Por extrapolación, el precio del billete cuando la distancia recorrida sea de 500 km.**

c) **Si un billete cuesta 5,93 €, ¿cuántos kilómetros tiene el recorrido?**

a) x es la distancia recorrida, el precio del billete en función de la distancia es: $p(x) = 0{,}03x + 0{,}5$

b) $p(500) = 15{,}50$ €

c) $x = 181$ km

54 **Encuentra una función cuadrática $f(x)$ que tome los valores que muestra la tabla:**

x	0	2	-1
$f(x)$	1,25	$-0,75$	6,75

$f(x) = 1,5x^2 - 4x + 1,25$

55 **Expresa el volumen de un cono cualquiera de generatriz 2 dm en función de su altura. ¿Entre qué valores puede oscilar la altura? Indica el dominio de esta función.**

$V(h) = \pi\dfrac{(4 - h^2)h}{3}$. La altura oscila entre 0 y 2 dm.

Dom $V = (0, 2)$

56 **Si un juguete se vende a 130 € lo compran 1 000 personas. Por cada euro que aumenta (o disminuye) este precio, disminuye (o aumenta), respectivamente, el número de compradores en 50.**

a) **Expresa la función que proporciona el número de juguetes que se venden en función del precio de venta.**

b) **Si el precio de coste de un juguete es de 80 €, calcula el precio, *p*, que proporciona el beneficio total máximo.**

c) **Halla el número de juguetes que se venden si el precio es *p*, y calcula el beneficio máximo.**

a) La función que proporciona el número de juguetes que se venden en función del precio de venta es una recta de pendiente -50 que pasa por el punto (130, 1 000):

$$n(p) = 1\,000 - 50(p - 130) = 7\,500 - 50p$$

b) El beneficio total es el producto de los juguetes vendidos por el beneficio de cada juguete que es $p - 80$:

$$B(p) = (7\,500 - 50p)(p - 80) = \\ = -50\,p^2 + 11\,500p - 600\,000$$

$B(p)$ tiene su valor máximo en $p = -\dfrac{11\,500}{-100} = 115$ €.

c) Para $p = 115$ € se venden $n(115) = 1\,750$ juguetes, y el beneficio que proporcionan es de $B(115) = 61\,250$ €.

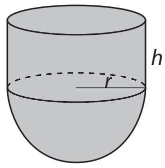
57 **El perímetro de un triángulo isósceles es 6 cm. Expresa el área del triángulo en función de la base, *b*, y determina su dominio.**

$A(b) = \dfrac{b}{2}\sqrt{9 - 3b}$, Dom $A = (0, 3)$

58 **Expresa el área de un pentágono regular en función de su lado, *l*, y determina su dominio.**

$A(l) = \dfrac{5l^2}{4\ \mathrm{tg}\ (\pi/5)}$, Dom $A = \mathbb{R}^+$

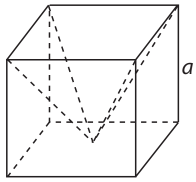
59 **El área de un contenedor formado por una semiesfera de radio *r* y un cilindro abierto de altura *h* es de 32 m². Expresa su volumen en función del radio, y determina su dominio.**



$V(r) = 16\,r - \dfrac{1}{3}\,\pi r^3$, Dom $V = (0, 4)$

60 **En un cubo se instala un depósito en forma de pirámide invertida con la misma base que la cara superior del cubo.**

Determina el área de la cuatro caras del depósito, en función de su volumen.



$A(V) = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{9V^2}$, Dom $A = \mathbb{R}^+$

61 **Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y su volumen es 768 m³. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 100 unidades por m², mientras que por el techo es de 300 unidades por m². La pérdida de calor a través del suelo es despreciable. Expresa la pérdida de calor del almacén en función del lado de su base.**

Si x es el lado de la base e y la altura del almacén:

Calor perdido a través de las paredes: $400xy$

Calor perdido a través del techo: $300\,x^2$

Calor total perdido: $400xy + 300x^2$

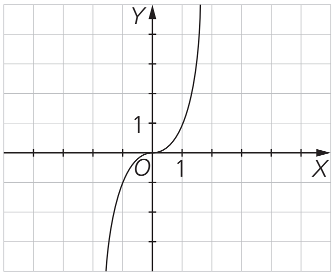
Dado que $V = 768$ m³ $\Rightarrow y = \dfrac{768}{x^2}$, con lo que el calor perdido en función de x será:

$C(x) = \dfrac{307\,200}{x} + 300x^2$

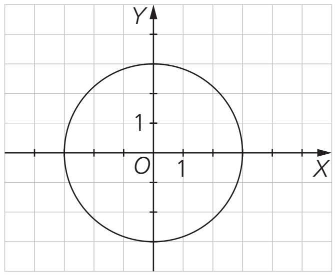
Evaluación (página 235)

1. Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función. Construye una tabla de valores y escribe su expresión analítica.

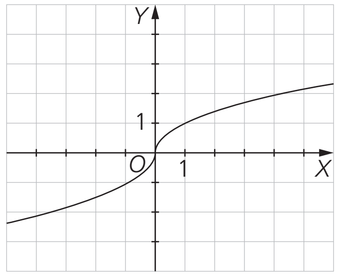
a)



b)



c)



a) Corresponde a la función $y = x^3$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

b) No corresponde a una función porque existen valores de la x a los que no les corresponde un único valor de la y.

c) Corresponde a la función $y = \sqrt[3]{x}$.

x	-8	-1	0	1	8
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ***b)*** $f(x) = x^2 - 5x$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 4}{x}$ ***e)*** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Es una función polinómica. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

d) $x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = [-1, 1]$

3. Estudia el signo de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 5x + 6}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}$ ***d)*** $f(x) = x^2 + 3x + 2$

a) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

$f(-2) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -1)$.

$f(-0{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-1, 0)$.

$f(0{,}5) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(0, 1)$.

$f(2) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, +\infty)$.

b) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 5)$ y $(5, +\infty)$.

$f(-4) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -3)$.

$f(-2{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-3, -2)$.

$f(0) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-2, 5)$.

$f(6) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(5, +\infty)$.

c) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$.

$f(-3) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-\infty, -2)$.

$f(0) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-2, 1)$.

$f(1{,}5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, 2)$.

$f(3) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(2, 4)$.

$f(5) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(4, +\infty)$.

d) El signo es constante en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$.

$f(-3) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en el intervalo $(-\infty, -2)$.

$f(-1{,}5) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en el intervalo $(-2, -1)$.

$f(0) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en el intervalo $(-1, +\infty)$.

4. Estudia la simetría de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ ***b)*** $f(x) = x^2 - 4x$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2}$

a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = f(x)$

Es una función par.

b) $f(-x) = (-x)^2 - 4 \cdot (-x) = x^2 + 4x; -f(x) = -x^2 + 4x$

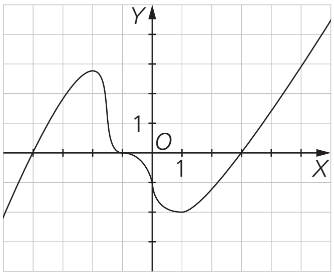
No es par ni impar.

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 5(-x)}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2} = -f(x)$

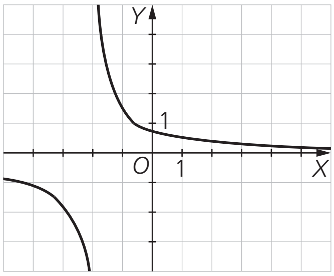
Es una función impar.

5. Determina la monotonía y la curvatura de estas funciones. ¿Alguna de ellas está acotada?

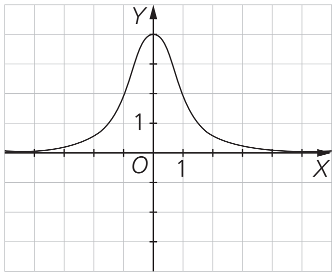
a)



b)



c)



a) Crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.

Es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (-1, 0)$ y cóncava en $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right) \cup (0, +\infty)$.

No está acotada.

b) Es decreciente en todo su dominio. Es convexa en el intervalo $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$. No está acotada.

c) Crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, +\infty)$. Es cóncava en el intervalo $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$. Está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 4.

6. Determina todas las características de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 1$ ***b)*** $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ***c)*** $f(x) = -x^2 + x$ ***d)*** $f(x) = -x^2 + 4$

Todas las funciones son parábolas.

a) Es positiva en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, y negativa en $(-1, 1)$.

El vértice es el punto $(0, -1)$, y es el mínimo de la función.

Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, -1)$.

Es una función cóncava.

b) Es positiva en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$, y negativa en $(1, 2)$.

El vértice es el punto $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, y es el mínimo de la función.

Es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(1, 0)$ y $(2, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 2)$.

Es una función cóncava.

c) Es negativa en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y positiva en $(0, 1)$.

El vértice es el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, y es el máximo de la función.

Es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 0)$.

Es una función convexa.

d) Es negativa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, y positiva en $(-2, 2)$.

El vértice es el punto $(0, 4)$, y es el máximo de la función.

Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Los puntos de corte con el eje X son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y el punto de corte con el eje Y, $(0, 4)$.

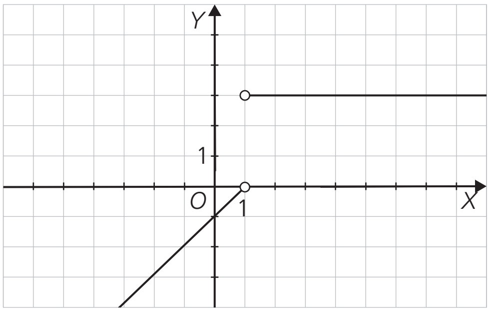
Es una función convexa.

7. **Estudia y representa estas funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

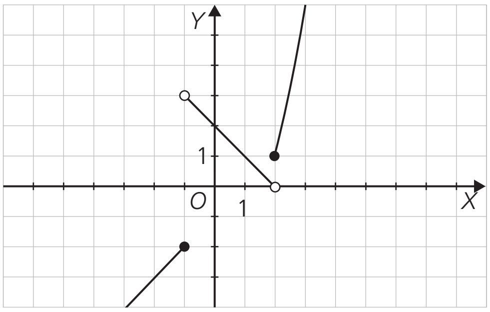
a)



Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y constante en el intervalo $(1, +\infty)$.

No corta con el eje *X* y el punto de corte con el eje *Y* es $(0, -1)$.

b)



Es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 2)$.

No corta con el eje *X* y el punto de corte con el eje *Y* es $(0, 2)$.