9 LÍMITES Y CONTINUIDAD

El estudio de límites será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ellos y comprobarán su aplicación en el estudio de la continuidad de funciones.

Al inicio de esta unidad se repasan las sucesiones que los alumnos conocen de cursos anteriores, pero será el punto de partida para introducir el concepto de límite. A continuación, se trabaja en dicho concepto primero aplicado a sucesiones y después a funciones.

Se trabaja el cálculo de límites de sucesiones y de operaciones con sucesiones. A continuación, se trabaja la resolución de algunas indeterminaciones y se introduce el número e como límite de una sucesión. Después, se realiza el mismo estudio pero en este caso aplicado a funciones. En este momento se determinan las asíntotas a partir de límites. Y para terminar se relaciona la continuidad de funciones con el estudio de límites.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las derivadas, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL).** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, utilizando límites de sucesiones y de funciones, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Repasar las sucesiones y sus propiedades y características.
- Manejar el concepto de límite de una sucesión y clasificar estas según su límite.
- Calcular límites de sucesiones y de operaciones con sucesiones.
- Reconocer el número e como límite de una sucesión.
- Calcular límites de funciones y de operaciones con funciones.
- Determinar las asíntotas de funciones a partir de límites.
- Estudiar la continuidad y tipos de discontinuidad de funciones a partir de límites.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Sucesiones Término general de una sucesión Progresiones aritméticas y geométricas Suma de los términos de progresiones aritméticas y geométricas Producto de los términos de progresiones geométricas	1. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.	1.1. Calcula términos de una sucesión numérica usando la ley de formación a partir de términos anteriores y obtiene el término general. 1.2. Identifica sucesiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma y el producto de términos, y las emplea para resolver problemas.	CMCT CL CAA CSC
Idea intuitiva de límite de una sucesión	2. Comprender el concepto de límite de una sucesión.	2.1. Comprende el concepto de límite de una sucesión y clasifica las sucesiones según su límite.	CMCT CL CAA
Operaciones con límites Límite de la suma de sucesiones Límite del producto de sucesiones Límite del cociente de sucesiones Límite de la potencia de sucesiones	3. Utilizar el concepto de límite de una sucesión aplicándolo en el cálculo de límites de sucesiones y de operaciones con sucesiones.	3.1. Comprende el concepto de límite de una sucesión, realiza las operaciones elementales de cálculo de las mismas, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones.	CMCT CL CAA
Cálculo de límites de sucesiones Sucesiones que tienen el término general como un polinomio en *n* Sucesiones que tienen el término general como un cociente de polinomios en *n* Sucesiones con radicales Potencias de sucesiones			
El número e Definición del número e Casos particulares	4. Definir el número e como límite de una sucesión.	4.1. Comprende la relación entre el número e y el concepto de límite de una sucesión. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para comprobar la relación entre el número e y el concepto de límite de una sucesión.	CMCT CD CL CAA
Límites de funciones. Asíntotas Límites de funciones en el infinito Cálculo de límites de funciones en el infinito Límites laterales de una función en un punto Límite de una función en un punto	5. Utilizar el concepto de límite de una función aplicándolo en el cálculo de límites de funciones y de operaciones con funciones.	5.1. Comprende el concepto de límite de una función, realiza las operaciones elementales de cálculo de las mismas, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones, comprobando los resultados con ayuda de medios tecnológicos.	CMCT CD CL CAA
Propiedades de las operaciones con límites de funciones			
Continuidad Propiedades de las funciones continuas	6. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolo en el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	6.1. Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. 6.2. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad, comprobando los resultados con ayuda de medios tecnológicos.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

- **Actividades de refuerzo**
- **Actividades de ampliación**
- **Prueba de evaluación**

PARA EL ALUMNO

- **Vídeo.** Límite de una sucesión
- **GeoGebra.** Asíntota oblicua
- **Vídeo.** Continuidad de una función
- **Actividades interactivas.** Test de autoevaluación

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Sucesiones
- Término general de una sucesión
- Progresiones aritméticas y geométricas
- Suma de los términos de progresiones aritméticas y geométricas
- Producto de los términos de progresiones geométricas

2. Idea intuitiva de límite de una sucesión

3. Operaciones con límites
- Límite de la suma de sucesiones
- Límite del producto de sucesiones
- Límite del cociente de sucesiones
- Límite de la potencia de sucesiones

4. Cálculo de límites de sucesiones
- Sucesiones que tienen el término general como un polinomio en *n*
- Sucesiones que tienen el término general como un cociente de polinomios en *n*
- Sucesiones con radicales
- Potencias de sucesiones

5. El número e
- Definición del número e
- Casos particulares

6. Límites de funciones. Asíntotas
- Límites de funciones en el infinito
- Cálculo de límites de funciones en el infinito
- Límites laterales de una función en un punto
- Límite de una función en un punto

7. Propiedades de las operaciones con límites de funciones

8. Continuidad
- Propiedades de las funciones continuas

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Repasa lo que sabes (página 237)

1. Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $7x^2y + 2xy^2 - 3y^3$ para $x = 2$ e $y = -2$.

Se sustituyen los valores $x = 2$ e $y = -2$ en la expresión obteniéndose: $7 \cdot 2^2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3 = -16$

2. Decide si los siguientes polinomios son irreducibles.

a) $x^2 + x + 1$ ***b)*** $x^3 + 1$ ***c)*** $x^2 + 1$

a) El polinomio es irreducible porque no tiene otros factores que le dividan.

b) Este polinomio es reducible ya que se puede dividir por $x + 1$.

c) El polinomio es irreducible porque no tiene otros factores que le dividan.

3. Halla la factorización de los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 5x^2 - x + 5$ ***b)*** $x^3 - 7x^2 + 12x$

a) $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)$ *b)* $x \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$

4. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

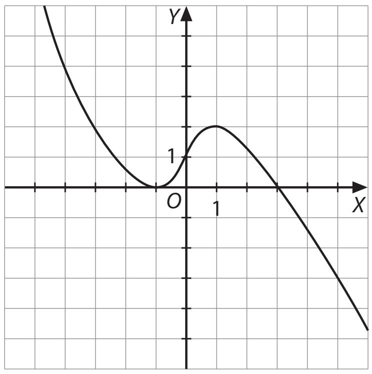
a) $\dfrac{2x^2 - 2x}{x^4 + x^3 + x^2}$ ***b)*** $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x}$

a) $\dfrac{2x^2 - 2x}{x^4 + x^3 + x^2} = \dfrac{2x(x - 1)}{x^2(x^2 + x + 1)} = \dfrac{2(x - 1)}{x(x^2 + x + 1)}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} = \dfrac{x(x^2 - 2x + 1)}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{x(x - 1)^2}{x(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

5. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- **Rec $f = \mathbb{R}$**
- **$f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f^{-1}(2) = \{-3, 1\}$; $f^{-1}(0) = \{-1, 3\}$**
- **La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-1, 1)$.**



6. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 5x}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

El dominio de estas funciones son todos los valores que no anulen el denominador:

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 5\}$

b) Dom $g = \mathbb{R}$

7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{2 - x}$, calcula la función $f^{-1}(x)$.

$y = \dfrac{x + 1}{2 - x}$

$x = \dfrac{y + 1}{2 - y} \Rightarrow (2 - y) \cdot x = y + 1 \Rightarrow 2x - xy = y + 1 \Rightarrow 2x - 1 = (1 + x) \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

Así pues, la función recíproca es:

$$f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$$

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Límite con el número e (página 255)

En el vídeo se resuelve paso a paso el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}$$

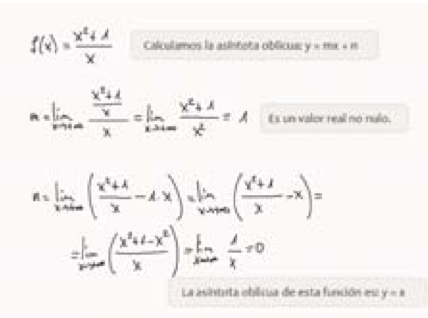
resolviendo la indeterminación del tipo 1^∞.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para calcular este tipo de límites o para que los alumnos repasen el procedimiento.

Asíntota oblicua (página 256)

En el vídeo se muestra cómo hallar la pendiente y la ordenada de la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ mediante el cálculo de límites.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento para determinar este tipo de asíntotas o para que los alumnos lo repasen.



Cálculo de parámetros para que una función sea continua (página 271)

En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 2.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para determinar los valores de a y b para que la función sea continua o para que los alumnos repasen este tipo procedimiento.

Actividades (páginas 239/270)

1 **Dada la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{3n+5}{n^2-3}$, calcula los cinco primeros términos.**

Sustituyendo n por los cinco primeros números naturales, del 1 al 5, sucesivamente, se obtiene:

$a_1 = 4$, $a_2 = 11$, $a_3 = -7/3$, $a_4 = 17/13$, $a_5 = -10/11$

2 **Dada la sucesión $a_n = (-n)^3$, calcula el séptimo término.**

Sustituyendo por $n = 7$, se obtiene, $a_7 = -343$

3 **Calcula el término general de las sucesiones siguientes.**

a) **1, 4/3, 6/4, 8/5, …**

b) **0, 3/7, 8/9, 15/11, …**

c) **1/5, 2/9, 4/13, 8/17, …**

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n+3}$

c) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{4n+1}$

4 **Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $-1, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \ldots$

b) **5, 3, 1, −1, −3, …**

c) **3, 1, −1, −3, −5, …**

a) La diferencia es $\dfrac{1}{4}$ y $a_1 = -1$, por lo que $a_n = \dfrac{n-5}{4}$

b) La diferencia es -2 y $a_1 = 5$, por lo que $a_n = 7 - 2n$

c) La diferencia es -2 y $a_1 = 3$, por lo que $a_n = 5 - 2n$

5 **Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.**

a) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, \ldots$

b) **−3, 3, −3, 3, −3, …**

c) **−4, −12, −36, −108, …**

a) La razón es $\sqrt{2}$ y $a_1 = \sqrt{2}$, por lo que $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

b) La razón es -1 y $a_1 = -3$, por lo que $a_n = (-1)^n \cdot 3$

c) La razón es 3 y $a_1 = -4$, por lo que $a_n = -4 \cdot (3)^{n-1}$

6 **¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 10 201?**

Es una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 2, por lo que:

$$10\,201 = \frac{1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 1 + 2(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow 10\,201 = n^2$$

$\Rightarrow n = 101$

Son 101 números impares consecutivos.

7 **En una progresión aritmética que tiene un número impar de términos, el término central es 42. ¿Qué valor tiene la suma de los términos extremos?**

$2 \cdot 42 = 84$

8 **Sabiendo que en una progresión aritmética $S_{15} = 75$ y la diferencia $d = \dfrac{1}{2}$, calcula a_8.**

$$75 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \Rightarrow 10 = a_1 + a_{15} = 2a_8 \Rightarrow a_8 = 5$$

9 **Halla la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica si $a_2 = 5$ y $a_{15} = \dfrac{45}{2^{13}}$. ¿Cuánto vale la suma de todos sus términos?**

En primer lugar calculamos *r:*

$$r^{13} = \frac{45}{2^{13}} : 5 = \frac{9}{2^{13}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[13]{9}}{2}$$

Después, se calcula a_1:

$$a_1 = 5 : \frac{\sqrt[13]{9}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{10}{\sqrt[13]{9}}$$

Sustituyendo en la expresión para la suma de n términos de una progresión geométrica, siendo $n = 10$ y a_1 y r los valores hallados, se obtiene:

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = 20{,}59$$

Si se desea calcular la suma de todos los términos de esta progresión, basta observar que es una progresión decreciente, puesto que $r < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = 20{,}7$$

10 **La suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica es 19 682 y la razón $r = 3$. Halla los nueve primeros términos de la progresión.**

$S_9 = \dfrac{a_1(r^9 - 1)}{r - 1} \Rightarrow 19\,682 = \dfrac{a_1(3^9 - 1)}{2} \Rightarrow a_1 = 2$, por lo que los términos son: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1 458, 4 374, 13 122.

11 **Sabiendo que en una progresión geométrica el producto de los 5 primeros términos es $P_5 = 2^{12} \cdot \sqrt{2}$, calcula a_3.**

Puesto que $a_1 \cdot a_5 = a_3^{\,2}$, se puede escribir:

$$2\sqrt[12]{2} = \sqrt{(a_3^{\,2})^5} \Rightarrow 2^{25} = a_3^{\,10} \Rightarrow a_3 = 2^2 \cdot 2^{5/10} = 4\sqrt{2}$$

12 **Determina, calculando algunos de sus términos, qué tipo de sucesión es cada una de las siguientes.**

a) $\dfrac{n+1}{n}$ ***c)*** 2^{-n+1} ***e)*** $(-2)^n$

b) $\dfrac{n^2+2}{n-1}$ ***d)*** $2^{1/n}$ ***f)*** $\left(\dfrac{-1}{n}\right)^n$

Se calculan sus primeros términos y se obtiene:

a) Convergente ***c)*** Convergente ***e)*** Oscilante

b) Divergente ***d)*** Convergente ***f)*** Convergente

13 **Copia y completa la siguiente tabla para la resta de las sucesiones x_n e y_n:**

$-$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$a - b$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND

14 **Calcula los términos 100, 1 000 y 10 000 de las siguientes sucesiones.**

a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ***b)*** $n^{1/n}$ ***c)*** $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ ***d)*** $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}$

a) $a_{100} = 2{,}704\,8$ $a_{1\,000} = 2{,}716\,9$ $a_{10\,000} = 2{,}718\,1$

b) $a_{100} = 1{,}047\,1$ $a_{1\,000} = 1{,}006\,9$ $a_{10\,000} = 1{,}000\,9$

c) $a_{100} = 0{,}955\,9$ $a_{1\,000} = 0{,}993\,1$ $a_{10\,000} = 0{,}999\,1$

d) $a_{100} = 0{,}911\,8$ $a_{1\,000} = 0{,}986\,3$ $a_{10\,000} = 0{,}998\,2$

15 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2 + 10\,000 - n^4)$ ***d)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6 + 2n^2}{3n^6 + 2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} [4n^3 + 2n - (5n^2 + 4)^2]$ ***e)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + 2n + 3}{1 - n^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2 - 2n^5}}{2n^2 + 6}$ ***f)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 2n - 5}{2n^2 + 5n - n^3}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (-n^4) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (-25n^4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-n^5}{n^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} (-n^3) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{n^6}{3n^6}\right) = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4n^2}{-n^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4}{n} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4n^3}{-n^3}\right) = -4$

16 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{8n^2 + 2n + 3}}{\sqrt[3]{8n^3 - 5n^2 + 3}}$

b) $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{-3n^3 + 2n - 5}}{\sqrt[3]{2n^2 + 3}}$

c) $c_n = \dfrac{n - 2}{\sqrt[5]{32n^5 + 8}}$

d) $d_n = \dfrac{\sqrt[6]{n^5 + 4n^3}}{\sqrt[8]{2n^7 + 5n^2}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{8n^2}}{\sqrt[3]{8n^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2n\sqrt{2}}{2n} = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} b_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\sqrt[3]{3}n}{\sqrt[3]{2}n^{2/3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\sqrt[3]{3}n}{\sqrt[3]{2}} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} c_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} d_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^{5/6}}{\sqrt[8]{2}n^{7/8}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[24]{n}} = 0$

17 **Calcula los límites de las sucesiones que tienen los siguientes términos generales.**

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{121n^2 + 4n - 3} - \sqrt{121n^2 + 19n}}{4}$

b) $b_n = \sqrt{25n^2 + 4n} - (5n + 3)$

c) $c_n = \sqrt{36n^2 - 1} - \sqrt{36n^2 - 5n}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{121n^2 + 4n - 3 - 121n^2 - 19n}{4 \cdot \left(\sqrt{121n^2 + 4n - 3} + \sqrt{121n^2 + 19n}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-15n}{4 \cdot 22n} = \frac{-15}{88}$$

b) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{25n^2 + 4n - 25n^2 - 30n - 9}{\sqrt{25n^2 + 4n} + 5n + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-26n}{10n} = \frac{-13}{5}$$

c) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{36n^2 - 1 - 36n^2 + 5n}{\sqrt{36n^2 - 1} + \sqrt{36n^2 + 5n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5n}{12n} = \frac{5}{12}$$

18 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n + 2}{2n - 7}\right)^{n - n^3}$ ***c)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n + 2}{2n - 5}\right)^{\frac{3}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n + 3)^{\frac{4n - 2}{2n}}$ ***d)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{9n^2 + 3n - 5}}{\sqrt{2n + n^2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3n}{2n}\right)^{-n^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (2n)^{4n/2n} = (+\infty)^2 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7n}{2n}\right)^{7/n} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3n}{n}\right)^{2n/n} = (3)^2 = 9$

19 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n-2}\right)^{4n+5}$ ***d)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-1}{5n^2+n}\right)^{2n-2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-7}{3n^2+2n}\right)^{\frac{4n^2+2}{3n-7}}$ ***e)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+4}{6n-3}\right)^{\frac{4n^2+2}{2n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+7}{3n+2}\right)^{5n-9}$ ***f)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-4}\right)^{-n+2}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot(4n+5)\cdot\frac{2}{n-1}}=e^8$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{3n^2+2n}{-2n-7}}\right)^{\frac{3n^2+2n}{-2n-7}\cdot\frac{4n^2+2}{3n-7}\cdot\frac{-2n-7}{3n^2+2n}}=e^{-8/9}=\dfrac{1}{\sqrt[9]{e^8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{3n}\right)^{5n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{5n^2+n}{-n-1}}\right)^{\frac{5n^2+n}{-n-1}\cdot(2n-2)\cdot\frac{-n-1}{5n^2+n}}=e^{-2/5}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^2}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{6n-3}{7}}\right)^{\frac{6n-3}{7}\cdot\frac{4n^2+2}{2n}\cdot\frac{7}{6n-3}}=e^{7/3}=\sqrt[3]{e^7}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{5n-4}{8}}\right)^{\frac{5n-4}{8}\cdot(-n+2)\cdot\frac{8}{5n-4}}=e^{-8/5}=\dfrac{1}{e\sqrt[5]{e^3}}$

20 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+2}{n^2+1}\right)^{4n}$ ***e)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{-n+7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2-6n}\right)^{n+6}$ ***f)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+13}{2n-2}\right)^{\frac{-1}{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-4}{2+n}\right)^{1-n^2}$ ***g)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2n}{1-2n}\right)^{\frac{4-n^2}{n+2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{2n-2}-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1-n^2}{n+4}}$ ***h)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n}{n^3+1}\right)^{-2n+3}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n^2+1}{5n+1}}\right)^{\frac{n^2+n}{5n+1}\cdot 4n\cdot\frac{5n+1}{n^2+1}}=e^{20}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}\cdot(n+6)\cdot\frac{3}{6n+2}}=\sqrt{e}$

c) $5^{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-2}{7}}\right)^{\frac{2n-2}{7}\cdot\frac{1-n^2}{n+4}\cdot\frac{7}{2n-2}}=e^{-7/2}=\dfrac{1}{e^3\sqrt{e}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}\cdot(-n+7)\cdot\frac{3}{n+2}}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

g) $2^{-\infty}=0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}\cdot(-2n+3)\cdot\frac{(n-1)}{n^3+1}}=e^0=1$

21 **Determina los límites en el infinito de las siguientes funciones y escribe la ecuación de sus asíntotas horizontales.**

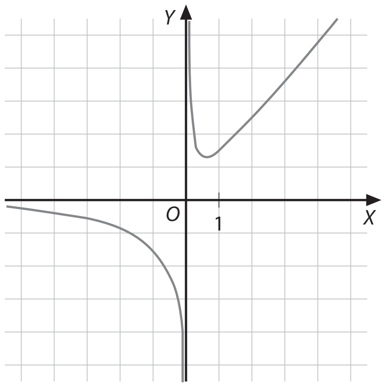


Figura 9.9.

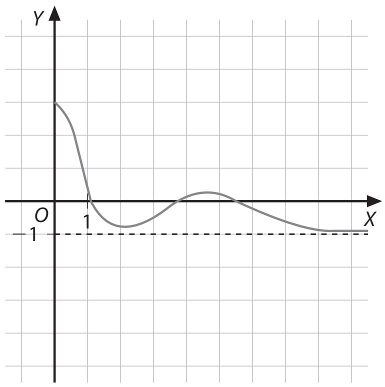


Figura 9.10.

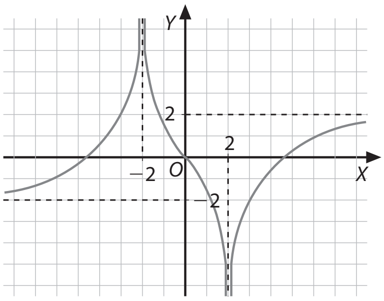


Figura 9.11.

Figura 9.9: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Tiene una asíntota horizontal por la izquierda ($y=0$).

Figura 9.10: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y=-1$).

Figura 9.11: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y=2$) y otra por la izquierda ($y=-2$).

22 **Calcula la ecuación de las asíntotas horizontales, si las tienen, de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ ***c)*** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$

b) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ ***d)*** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-2$, luego, asíntota horizontal $y=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3/2$, luego, asíntota horizontal $y=3/2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, luego, asíntota horizontal $y=0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, luego, asíntota horizontal por la izquierda $y=-1$, y por la derecha $y=1$.

23 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{7x^2}\cdot\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{x^3+1}{2x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{x^3+1}{2x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)^{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-5x+1}{3x^3-2x^2+5}\right)^{-x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2}-2x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{-6x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-2x+1}\right)^{x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+3}\right)$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) Indeterminación $0\cdot\infty$

Para resolver el límite, primero multiplicamos y después simplificamos ambas funciones:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{7x^3}=\frac{1}{7}$$

b) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$$

c) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^{-\infty}=0$$

d) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$$

e) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=+\infty$$

f) Indeterminación $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$$

g) Indeterminación $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{4x}=0$$

h) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{-3}}\right)^{\frac{3x-1}{-3}\cdot(-6x)\cdot\frac{-3}{3x-1}}=e^6$$

i) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x^2-2x-1}{-2x-2}}\right)^{\frac{2x^2-2x-1}{-2x-2}\cdot(x+1)\cdot\frac{-2x-2}{2x^2-2x-1}}=\frac{1}{e}$$

j) Indeterminación $\infty-\infty$

$-\infty$

24 **Halla lo que se indica en cada apartado.**

a) **Figura 9.26: Dom f, Rec f, $f(0)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.**

b) **Figura 9.27: Dom f, Rec f, $f(0)$, $f^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.**

c) **Figura 9.28: Dom f, Rec f, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.**

e) **Figura 9.29: Dom f, Rec f, $f(1)$, $f(3/2)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.**

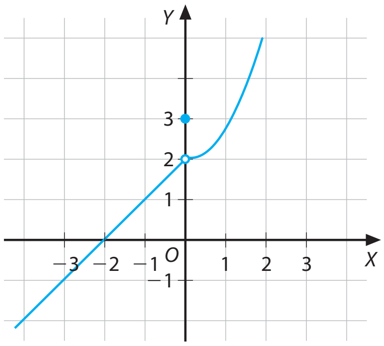


Figura 9.26.

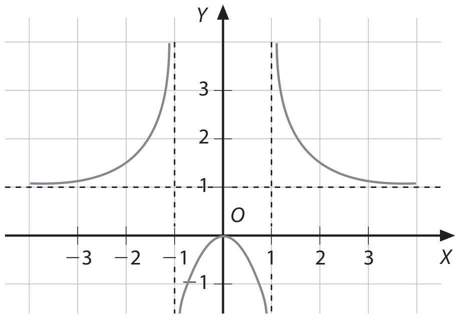


Figura 9.27.

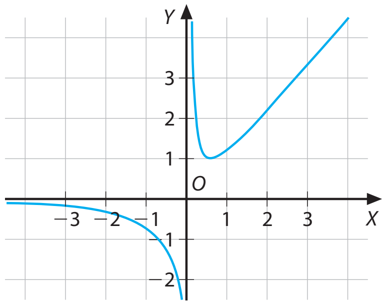


Figura 9.28.

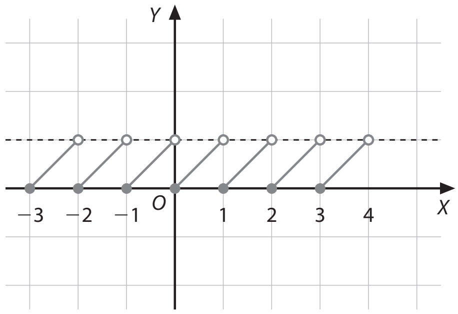


Figura 9.29.

Figura 9.26: Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=\mathbb{R}-\{2\}$, $f(0)=3$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Figura 9.27: Dom $f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$, Rec $f=\mathbb{R}-(0,1]$, $f(0)=0$, $\nexists\, f^{-1}(1)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Figura 9.28: Dom $f=\mathbb{R}-\{0\}$, Rec $f=\mathbb{R}-[0,1)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Figura 9.29: Dom $f=\mathbb{R}$, Rec $f=[0,1)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$, $\nexists\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

25 **Estudia el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = -3x + 5$, en $x = 0$ y en $x = 3$

b) $f(x) = x^3$, en $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$

c) $f(x) = |x - 2|$, en $x = 2$ y en $x = -3$

d) $f(x) = x + E(x)$, en $x = 2$ y en $x = -1$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$, en $x = -2$ y en $x = -1$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = -2$, en $x = 2$ y en $x = 4$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ (x + 1)/(x + 3) & \text{si } x > 5 \end{cases}$ en $x = -3$, en $x = -2$ y en $x = 5$

a) $\lim_{x\to 0} (-3x + 5) = 5$, $\lim_{x\to 3} (-3x + 5) = -4$

b) $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, $\lim x^3 = \lim_{x\to\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

c) $\lim_{x\to 2} |x - 2| = 0$, $\lim_{x\to -3} |x - 2| = 5$

d) $\lim_{x\to 2^-} [x + E(x)] = 3$, $\lim_{x\to 2^+} [x + E(x)] = 4$, $\nexists \lim_{x\to 2} [x + E(x)]$

$\lim_{x\to -1^-} [x + E(x)] = -3$, $\lim_{x\to -1^+} [x + E(x)] = -2$,

$\nexists \lim_{x\to -1} [x + E(x)]$

e) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$

f) $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 1) = 5$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 3) = 5$.

Así, $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.

$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (x + 3) = 7$

g) $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} (3x - 1) = -10$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3x - 1) = -7$, $\nexists \lim_{x\to -2^+} f(x)$. Así, $\nexists \lim_{x\to -2} f(x)$.

$\nexists \lim_{x\to 5^-} f(x)$, así $\nexists \lim_{x\to 5} f(x)$

26 **Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, +\infty)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$,

$f(3) = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, $\text{Rec } f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$,

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$,

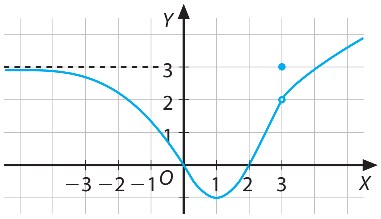
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

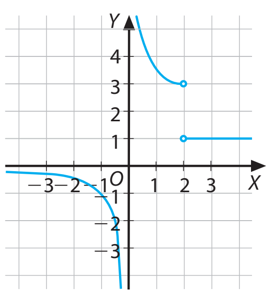
c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

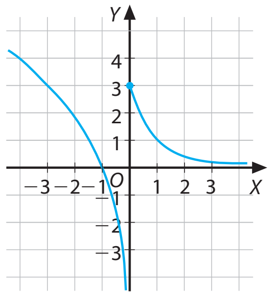
a)



b)



c)



27 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim_{x\to 2} (x - 2) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{(x - 2)^2}\right)$

b) $\lim_{x\to 4} \left(\dfrac{x + 1}{x^2 - 16} - \dfrac{x}{x - 4}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}\right)$

d) $\lim_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}\right)^{2x+1}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim_{x\to 2} \left(x - 2 + 1 + \dfrac{1}{x - 2}\right) = \infty$

b) $\lim_{x\to 4} \left(x^2 - 3x + \dfrac{1}{x^2 - 16}\right) = \infty$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x + 4} - 2)}\right) = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim_{x\to -1} \left(\dfrac{x - 5}{x - 1}\right)^{2x + 1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

28 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{1}{x - 4}$

b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x}{(x - 4)^2}$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 2}$

e) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{(4 + 2x)^3}$

f) $\lim_{x\to +\infty} 7^{1/x}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) ∞

b) $+\infty$

c) $\dfrac{0}{5} = 0$

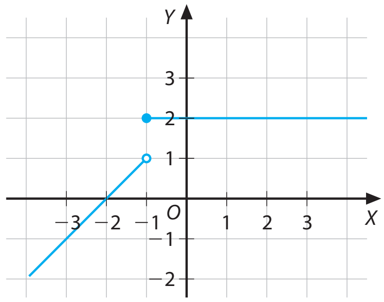
d $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x}\right) = +\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{8x^3}\right) = \dfrac{1}{8}$

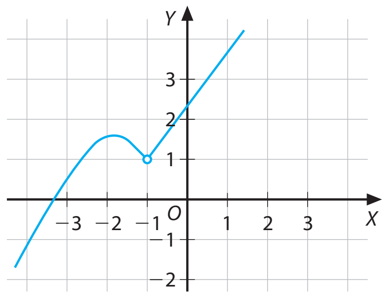
f) $7^0 = 1$

29 **Indica el dominio de continuidad de estas funciones.**

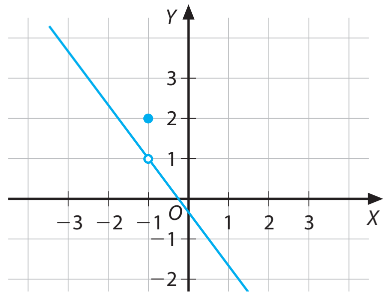
a)



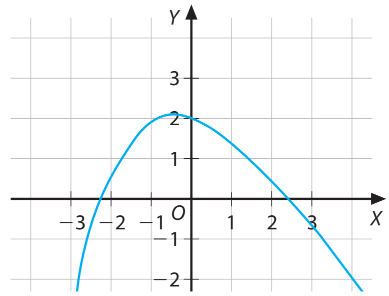
b)



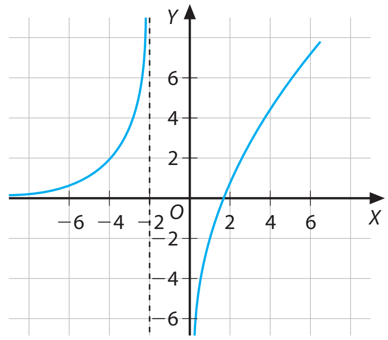
c)



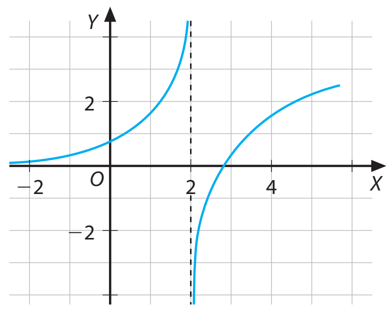
d)



e)



f)



a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

c) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

d) Continua en $\mathbb{R}$

e) Continua en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

30 Clasifica las discontinuidades de las funciones anteriores.

a) Discontinuidad de salto finito en $x = -1$

b) Discontinuidad evitable en $x = -1$

c) Discontinuidad evitable en $x = -1$

e) Discontinuidades asintóticas en $x = -2$ y $x = 0$

f) Discontinuidad asintótica en $x = 2$

31 Analiza la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -3x + 5$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = |x - 2|$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

f) $f(x) = x + E(x)$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq -3 \\ -2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Continua en $\mathbb{R}$

b) Continua en $\mathbb{R}$

c) Continua en $\mathbb{R}$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Puesto que es una función racional es continua en su dominio. En $x = -2$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable, puesto que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x + 1) = 3$$

e) Dom $f = \mathbb{R}$. Puesto que:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

f) Continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En $x \in \mathbb{Z}$ presenta discontinuidad de salto.

g) Dom $f = (-\infty, -2] \cup (5, +\infty)$. Puesto que las funciones son polinómica y racional, respectivamente en $(-\infty, -2]$ y $(5, +\infty)$, es continua en su dominio.

h) Dom $f = \mathbb{R} - (-3, 2]$. La función es continua en su dominio.

Ejercicios y problemas (páginas 274/278)

Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas

1 Calcula el término general de las siguientes sucesiones y di si son convergentes, divergentes u oscilantes.

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 2, 6, 18, 54, 162, …

c) 1, 3/2, 2, 5/2, 3, …

d) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, …

e) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, …

a) $a_n = 4n - 1$, divergente.

b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, divergente.

c) $a_n = \dfrac{n+1}{2}$, divergente.

d) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, convergente.

e) $a_n = 2^{3-n}$, convergente.

2 Halla el término general de las siguientes sucesiones e indica si son convergentes, divergentes u oscilantes.

a) 1, 3/4, 5/9, 7/16, …

b) 2, 5, 10, 17, 26, …

c) 10, 26, 50, 82, …

d) −1/2, 1/5, 3/8, 5/11, …

e) −2, 4, −8, 16, …

a) $a_n = \dfrac{2n - 1}{n^2}$, convergente.

b) $a_n = n^2 + 1$, divergente.

c) $a_n = (2n + 1)^2 + 1$, divergente.

d) $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n - 1}$, convergente.

e) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n = (-2)^n$, oscilante.

3 **Calcula el término general de cada una de las siguientes sucesiones.**

a) **4, 3, 9/4, 27/16, …** ***d)*** **2, −7/5, 5/4, −13/11, …**

b) **1/16, −1/16, 9/256, −1/64, …** ***e)*** **3,4, 4,5, 5,6, 6,7, …**

c) **3, 2, 35, 46, 57, …**

a) $a_n = 3^{n-1} \cdot 4^{-n+2}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2/4^{n+1}$

c) No tiene un término general.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(3n+1)}{(3n-1)}$

e) $a_n = (n+2) + \dfrac{(n+3)}{10}$

4 **Dadas las progresiones.**

- **4, 7, 10, …**
- **20, 17, 14, …**

Averigua la suma de los *n* primeros términos de cada sucesión y luego la suma de esas sumas.

$S1_n = \dfrac{3n^2+5n}{2}$ $\quad S2_n = \dfrac{43n-3n^2}{2}$ $\quad S1_n + S2_n = 24n$

5 **Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y su perímetro es 36 cm. Halla cuánto miden sus lados.**

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 36 \\ (a_1+2d)^2 = (a_1+d)^2 = a_1^2 \end{cases} \Rightarrow 9, 12 \text{ y } 15 \text{ cm}$$

6 **Halla tres números de una progresión aritmética sabiendo que su suma es 6 y la suma de sus cuadrados es $\dfrac{158}{9}$.**

Se plantea un sistema con las dos condiciones:

$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 6 \Rightarrow a_2 = 2$

$(a_2 - d) + a_2{}^2 + (a_2+d)^2 = \dfrac{158}{9}$

Así $d = \dfrac{5}{3}$ y los términos son: $\dfrac{1}{3}, 2, \dfrac{11}{3}$

7 **Calcula $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$**

$x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} = 2^{1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots}$

El exponente es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$, por tanto el exponente es el valor:

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, con lo que $x = 2^1 = 2$

8 **Se deja caer una bola de goma desde la azotea de un edificio que tiene una altura de 243 metros. Cada vez que toca al suelo, rebota y recorre hacia arriba una distancia igual a las dos terceras partes de la altura desde la que ha caído la última vez.**

a) **¿De qué altura ha caído la bola cuando ha tocado el suelo por sexta vez?**

b) **¿Qué distancia ha recorrido desde que se ha dejado caer hasta que ha tocado al suelo por sexta vez?**

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot 3^5 = 2^5 = 32$ m

b) $243\left[1 + 2\left(\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right)\right] = 1\,087$ m.

9 **Un concurso de televisión consiste en proponer al concursante una sucesión de preguntas hasta que de una respuesta incorrecta y quede eliminado. Los premios de cada respuesta se acumulan y son de un euro por la primera, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente, en progresión geométrica de razón 2.**

a) **Si se responden diez preguntas correctamente, ¿cuánto dinero se consigue?**

b) **¿Cuál es el mínimo número de preguntas que hay que responder para conseguir 6 000 €?**

a) $S = (1 \cdot 2^{10} - 1)/(2-1) = 1\,023$ €

b) Por tanteo, o tomando logaritmos: $2^{n-1} = 3\,000$, $n = 12{,}55$, luego el mínimo número de preguntas es 13.

Límites de sucesiones

10 **Calcula, a partir de las siguientes sucesiones:**

$$a_n = \frac{4n^2+3n}{n^2-6n} \qquad b_n = \frac{2n+1}{2-7n} \qquad c_n = \frac{3n^2+2}{5-n}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ ***h)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{c_n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ ***i)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + c_n)$ ***j)*** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - c_n)$ ***k)*** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{c_n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}$ ***l)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n)$ ***m)*** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n \cdot c_n)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \cdot c_n)$ ***n)*** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/c_n}$

a) $\lim (a_n + b_n) = 26/7$

b) $\lim (a_n - b_n) = 30/7$

c) $\lim (a_n + c_n) = -\infty$

d) $\lim (b_n - c_n) = +\infty$

e) $\lim (1/c_n) = 0$

f) $\lim (a_n \cdot c_n) = -\infty$

g) $\lim (b_n \cdot c_n) = +\infty$

h) $\lim (b_n/c_n) = 0$

i) $\lim (a_n/b_n) = -14$

j) $\lim (a_n)^{b_n} = \sqrt[7]{1/16}$

k) $\lim (a_n)^{c_n} = 0$

l) $\lim \sqrt{a_n} = 2$

m) $\lim (a_n \cdot b_n \cdot c_n) = +\infty$

n) $\lim (a_n)^{1/c_n} = 1$

11 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \dfrac{3n^4+2n^5-3n}{6n^4+2n}$ ***d)*** $d_n = \dfrac{-4+n^5+n^8}{3+2n^2-7n^8}$

b) $b_n = \dfrac{2n^2+3n}{6n^3+2n-7}$ ***e)*** $e_n = \dfrac{3n-7}{n^2+1}$

c) $c_n = \dfrac{5n^5-3n^3+1}{-2n^2+3}$ ***f)*** $f_n = \dfrac{(n+3)^2}{n^2+3}$

a) $\lim a_n = \lim [(3n^4 + 2n^5 - 3n)/(6n^4 + 2n)] = +\infty$

b) $\lim b_n = \lim [(2n^2 + 3n)/(6n^3 + 2n - 7)] = 0$

c) $\lim c_n = \lim [(5n^5 - 3n^3 + 1)/(-2n^2 + 3)] = -\infty$

d) $\lim d_n = \lim [(-4 + n^5 + n^8)/(3 + 2n^2 - 7n^8)] = -1/7$

e) $\lim e_n = \lim [(3n - 7)/(n^2 + 1)] = 0$

f) $\lim f_n = \lim [(n + 3)^2/(n^2 + 3)] = 1$

12 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \left(\dfrac{10}{3n+3}\right) \cdot (-6n)$

b) $b_n = \left(2 + \dfrac{3}{n}\right) \cdot \left(\dfrac{4n+2}{2n-1}\right) \cdot \left(6 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

c) $c_n = \left(\dfrac{3n-1}{2n+4} - \dfrac{11n+3}{10n^2+5}\right)$

d) $d_n = \left[(n+1)^2 - (n-2)^2\right]$

e) $e_n = \left(\dfrac{5n+1}{7n-4}\right) \cdot \left(\dfrac{7n^2+5}{5n^2-9}\right)$

f) $f_n = \left(\dfrac{n^2}{n^3} + \dfrac{n^3}{n^2}\right)$

a) $\lim a_n = \lim \left[\dfrac{10}{3n+3} \cdot (-6n)\right] = -20$

b) $\lim b_n = \lim \left[\left(2 + \dfrac{3}{n}\right) \cdot \left(\dfrac{4n+2}{2n-1}\right) \cdot \left(6 + \dfrac{1}{n^2}\right)\right] = 24$

c) $\lim c_n = \lim \left(\dfrac{3n-1}{2n+4} - \dfrac{11n+3}{10n^2+5}\right) = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim d_n = \lim \left[(n+1)^2 - (n-2)^2\right] = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim \left(\dfrac{5n+1}{7n-4} - \dfrac{7n^2+5}{5n^2-9}\right) = 1$

f) $\lim f_n = \lim \left(\dfrac{n^2}{n^3} + \dfrac{n^3}{n^2}\right) = +\infty$

13 **Calcula los límites de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3} + n^2 + 1}{3\sqrt{n^3} + 2n^2 - 7}$

b) $b_n = \dfrac{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n} + 3\sqrt[3]{n} + 5\sqrt[4]{n}}$

c) $c_n = \sqrt[3]{n^4 + 4} - \sqrt[4]{n^3 + 3}$

d) $d_n = \sqrt[3]{n^7 - 10^8}$

e) $e_n = \sqrt{13n^2 - 4} - \sqrt{6n^2 + 5}$

f) $f_n = \sqrt{13n^2 - 4} - \sqrt{7n^3 + 10n}$

a) $\lim \left(\sqrt{n^3} + n^2 + 1\right)/\left(3\sqrt{n^3} + 2n^2 - 7\right) = 1/2$

b) $\lim \left[(2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n})/(\sqrt{9n} + 3\sqrt[3]{n} + 5\sqrt[4]{n})\right] = 2/3$

c) $\lim \left(\sqrt[3]{n^4 + 4} - \sqrt[4]{n^3 + 3}\right) = +\infty$

d) $\lim \left(\sqrt[3]{n^7 - 10^8}\right) = +\infty$

e) $\lim \left(\sqrt{13n^2 - 4} - \sqrt{6n^2 + 5}\right) = +\infty$

f) $\lim \left(\sqrt{13n^2 - 4} - \sqrt{7n^3 + 10n}\right) = -\infty$

14 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}$

b) $b_n = 1/\left(\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2 + 3n}\right)$

c) $c_n = \sqrt{6n^2 + 3} - (6n + 2)$

d) $d_n = \sqrt{16n^2 + 5} - (4n - 9)$

e) $e_n = \left(\sqrt{25n^2 + 3} - \sqrt{25n^2 - 5n}\right)/10$

a) $\lim a_n = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 2n}\right) = 1$

b) $\lim b_n = \lim \left[1/(\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2 + 3n})\right] = -2\sqrt{19}/3$

c) $\lim c_n = \lim \left[\sqrt{6n^2 + 3} - (6n + 2)\right] = -\infty$

d) $\lim d_n = \lim \left[\sqrt{16n^2 + 5} - (4n - 9)\right] = 9$

e) $\lim e_n = \lim \left[(\sqrt{25n^2 + 3} - \sqrt{25n^2 - 5n})/10\right] = 1/20$

15 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = (3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}}$

b) $b_n = \left(\dfrac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}}$

c) $c_n = \left(\dfrac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n}$

d) $d_n = \left(10 + \dfrac{10}{n}\right)^{10n}$

e) $e_n = \left(\dfrac{3 + 5/n^5}{6 + 6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}}$

f) $f_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{n-1}}$

a) $\lim a_n = \lim (3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}} = (+\infty)^{-3/2} = 0$

b) $\lim b_n = \lim \left(\dfrac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}} = 0^5 = 0$

c) $\lim c_n = \lim \left(\dfrac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n} = (3/4)^{+\infty} = 0$

d) $\lim d_n = \lim \left(10 + \dfrac{10}{n}\right)^{10n} = 10^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim \left(\dfrac{3 + 5/n^5}{6 + 6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}} = \dfrac{1}{8}$

f) $\lim f_n = \lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{n-1}} = \sqrt{2}$

16 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n+1}}$

b) $b_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19}$

c) $c_n = \left(n + \dfrac{1}{n^2}\right)^6$

d) $d_n = \dfrac{(-n)^n}{2n^2+3}$

e) $e_n = \left(1 - \dfrac{3}{n+1}\right)^{n+7}$

f) $f_n = \left(\dfrac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}}$

a) $\lim a_n = \lim \sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{n+1}} = 2^{1/\infty} = 2^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19} = 1^{\infty} =$

$$= \lim \left(1 + \dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot (3n-19)} = e^{\lim \frac{6n}{2n}} = e^3$$

c) $\lim c_n = \lim \left(n + \dfrac{1}{n^2}\right)^6 = +\infty$

d) Es una sucesión oscilante, no tiene límite.

e) $\lim e_n = \lim \left(1 - \dfrac{3}{n+1}\right)^{n+7} = \dfrac{1}{e^3} = e^{-3}$

f) $\lim f_n = \lim \left(\dfrac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}} = +\infty$

17 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7}$

b) $b_n = \left(\dfrac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3}$

c) $c_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}}$

d) $d_n = \left(\dfrac{2n}{2n+2}\right)^{n^2}$

e) $e_n = \left(\dfrac{6n+6}{6n-6}\right)^{-n+2}$

f) $f_n = \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{5n+5}$

a) $\lim a_n = \lim \left(\dfrac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7} = e^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim \left(\dfrac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{e^6}}$

c) $\lim c_n = \lim \left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}} = \left(\dfrac{1}{\infty}\right)^{-5} = +\infty$

d) $\lim d_n = \lim \left(\dfrac{2n}{2n+2}\right)^{n^2} = e^{-\infty} = 0$

e) $\lim e_n = \lim \left(\dfrac{6n+6}{6n-6}\right)^{-n+2} = e^{-2}$

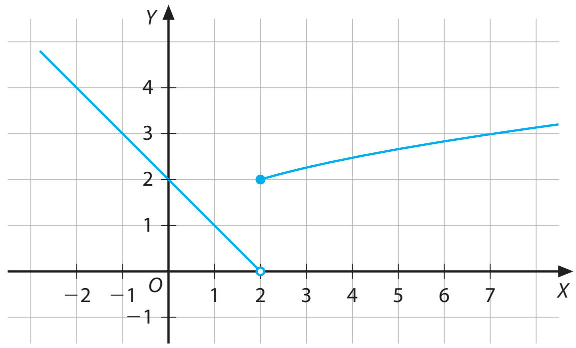
f) $\lim f_n = \lim \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{5n+5} = \dfrac{1}{e^{25}} = e^{-25}$

Límites de funciones en el infinito

18 **Dadas las siguientes funciones, averigua los límites que se indican.**

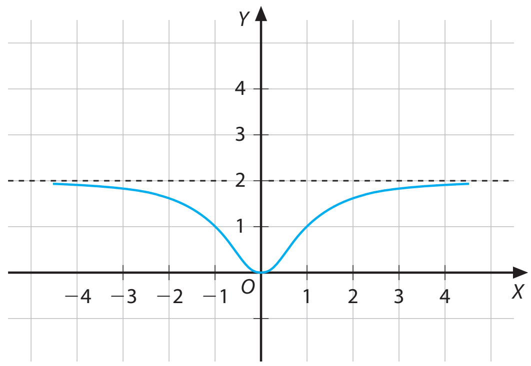
a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

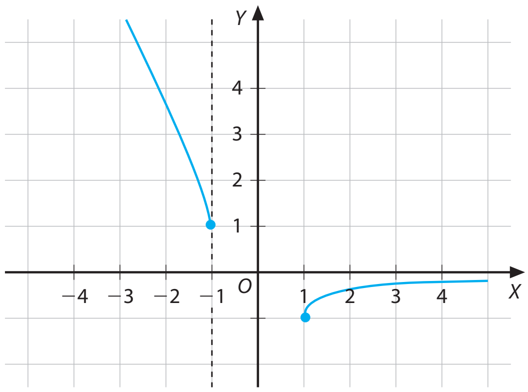
b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

19 **Averigua los límites que se indican.**

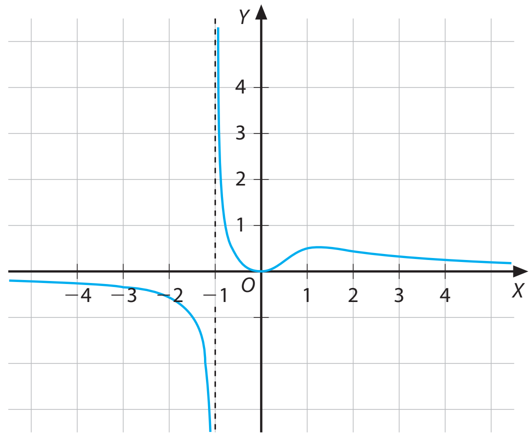
a) $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.



b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.



a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad \nexists \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$

20 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$

21 **Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.**

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$

22 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x^3+3x-3}{x^2+5x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(3-5x)^2}{-9x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+3x^2+7x-8}{x^4-4x^2+6}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2+5x-1}{3-5x}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} [(-3x^3 + 3x - 3)/(x^2 + 5x - 2)] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} [(3 - 5x)^2/(-9x^2 - x)] = -25/9$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} [(x^3 + 3x^2 + 7x - 8)/(x^4 - 4x^2 + 6)] = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} [(-x^2 + 5x - 1)/(3 - 5x)] = +\infty$

23 **Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-3x^3 + 3x - 3}{x^2 + 5x - 2}\right] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{(3 - 5x)^2}{-9x^2 - x}\right] = -\dfrac{25}{9}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{x^3 + 3x^2 + 7x - 8}{x^4 - 4x^2 + 6}\right] = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{-x^2 + 5x - 1}{3 - 5x}\right] = -\infty$

24 **Calcula los límites de las siguientes funciones.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ y no está definida para valores que vayan a $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right) = \dfrac{1}{2}$

25 **Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \to -\infty$.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2}\right)$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{2}{3}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}\right)$

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

$2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2}$

No existe, porque Dom $f = \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x\right) = +\infty$

26 **Calcula los límites de las siguientes funciones.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{5x - 3}\right)^{-x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{5x - 3}\right)^{-x + 3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x + 5} - \dfrac{x^2 + 2}{x - 5}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{x}{9 + x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{3x + x^2}{2x + 1}\right)\right]$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x}\right)^{2x + 2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x + 3}{3 - 2x^2}\right)^{-x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x - 1}{2x + 2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{2x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 2^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{(2x + 1)}{(5x - 3)}\right]^{-x + 3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{(2x + 1)}{(5x - 3)}\right]^{-x + 3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x + 5} - \dfrac{x^2 + 2}{x - 5}\right] = -10$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{9 - x^2}\right] \cdot \left[\dfrac{3x + x^2}{2x + 1}\right] = -\dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x}\right)^{2x + 2} = \sqrt[3]{e^2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \dfrac{x + 3}{3 - 2x^2}\right]^{-x^2} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{x - 1}{2x + 2}\right]^{\frac{3 - x^2}{x}} = e$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right) = -2$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}\right) = -\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)/\sqrt{2x} = 0$

Límites de funciones en un punto

27 **Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ (x-1)^2+2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **en $x=0$ y en $x=3$**

b) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-4x+4}$ **en $x=2$**

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-3x}{x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-x-1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **en $x=0$ y en $x=1$**

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & \text{si } x\leq 3 \\ \dfrac{1}{3-x} & \text{si } x>3 \end{cases}$ **en $x=-1$ y en $x=3$**

e) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1 \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x=(0^+)^{-1}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)=+\infty$

28 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x+1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3}{(x+1)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-x^3}{x^6}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{6x^3+3x^2-3x}$

h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-9}{2x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2+x}$

j) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+4x}{x^2+2x-1}$

k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}$

l) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2-1}{2x^3+3x^2-2x}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\;[(x^3+x^2-x+1)/(1-x)]=1$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}=\infty$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\;[3/(x+1)^3]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\;[3/(x+1)^3]=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} 3/(x+1)^3=\infty$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\;[(x^5-x^3)/x^6]=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\;[(x^5-x^3)/x^6]=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(x^5-x^3)/x^6=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\;[(x^3-2x^2-4x+8)/(x^2-x-2)]=0$

f) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}\right)=\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 1/2}\;[(2x^3-x^2-2x+1)/(6x^3+3x^2-3x)]=-1/3$

h) $\lim\limits_{x\to -2}\;[(x^2-9)/(2x+1)]=5/3$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\;[(x^3-2x^2+x)/(x^2+x)]=1$

j) $\lim\limits_{x\to -2}\;[(4x^2+4x)/(x^2+2x-1)]=-8$

k) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{-x^3+2x}{x^3-2x^2-3x}\right)=\infty$

l) $\lim\limits_{x\to 1/2}\;[(4x^2-1)/(2x^3+3x^2-2x)]=8/5$

29 **Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican.**

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1/3)^{\frac{1}{x-2}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)^{-x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\;2^{1/x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\;2^{-1/x^2}=0$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\;2^{1/x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\;2^{1/x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x}$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\;2^{-1/x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\;2^{-1/x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x}$

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0}[2x+(1/3)]^{1/(x-2)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\;(2x+1)^{-x+1}=1$

30 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2-x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2-1}\right)=\infty$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x+2}{x^2-1}\right)=\infty$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x^2-x}\right)=2$

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=+\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x}\right)=\infty$

f) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

31 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{4x-12}}$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-4}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\ \sqrt{(x^2-4)/(x-2)}=2$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\ \sqrt{(x^2-9)/(4x-12)}=\sqrt{3/2}=\sqrt{6}/2$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-}\ (x+2)/\sqrt{x^2-4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+}\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-4}}=+\infty$

32 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x-1}\right)^{2x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\ (2x^2+3x+1)^{\frac{-5}{(x-2)^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+1}\right)^{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{2x+2}{x}\right)^{\frac{-1}{x+2}}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\ \left[\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x-1}\right]=\dfrac{1}{27}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\ (2x^2+3x+1)^{-5/(x-2)^2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\ \left[\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+1}\right]^{x-2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\ \left[\dfrac{2x+2}{x}\right]^{-1/(x+2)}=\sqrt{e}$

Asíntotas

33 **Indica el dominio de las funciones de los ejercicios 18 y 19 y calcula analíticamente las asíntotas horizontales y verticales de las funciones representadas, en caso de que las tengan.**

Ejercicio 18

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<0\\ \sqrt{x+2} & x\geq 0\end{cases}$

No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

$\text{Dom}=\{x\in\mathbb{R}, x<0 \mid \exists\,(-x+2)\}\cup$
$\cup\,\{x\in\mathbb{R}, x\geq 0 \mid x+2\geq 0\}=\mathbb{R}$

b) $f(x)=2x^2/(x^2+1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, asíntota horizontal en $y=2$.

No tiene asíntotas verticales.

$\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$

Ejercicio 19

a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal por la derecha $y=0$.

No tiene asíntotas verticales.

$\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\geq 0\}=\mathbb{R}-(-1,1)$

b) $f(x)=x^2/(x^3+1)$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$, asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, asíntota horizontal en $y=0$.

$\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^3+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

34 **Determina la ecuación de todas las asíntotas de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-x}$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{(4-x)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^2+5}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3x+2}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

a) A.V.: $x=0$, $x=1$; A.H.: $y=0$

b) A.V.: $x=4$, $x=1$; A.H.: $y=0$

c) A.H.: $y=1/2$

d) A.V.: $x=-1$, $x=1$; A.H.: $y=x-1$

e) A.V.: $x=1$, $x=2$; A.H.: $y=2$

f) A.V.: $x=1$, $x=-1$; A.H.: $y=1$ cuando x tiende a $+\infty$, e $y=-1$ cuando x tiende a $-\infty$.

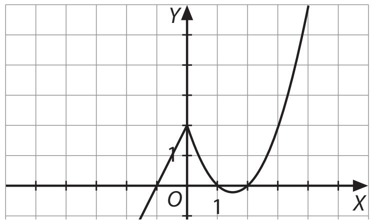
Continuidad de funciones

35 **Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) **Dibuja la gráfica.** ***b)*** **Estudia la continuidad.**

a)



b) ▮ $\exists\, f(0) = 2$

▮ $¿\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x)?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$$

▮ $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

Como ya podíamos apreciar en el gráfico, la función es continua en $x = 0$.

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 5$, se evitaría imponiendo $f(5) = 15$.

36 **Dada la función:** $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2}$

a) **Halla el límite en $x \to -1$, en $x \to 2$ y en $x \to 0$.**

b) **Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.**

c) **Indica qué valor debería tomar $f(x)$ en $x = -1$ para evitar la discontinuidad.**

d) **Indica sus asíntotas.**

e) **Estudia su signo.**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+2}{x^4 + x^3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2(x+1)}{x^2(x+1)(x-2)} = -\dfrac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = \infty$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = -\infty$

b) y *d)* $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1, 2\}$

En $x = 0$ d. a. $\Rightarrow x = 0$ a. v.

En $x = 2$ d. a. $\Rightarrow x = 2$ a. v.

En $x = -1$ d. e.

En $y = 0$ a. h. puesto que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

c) $f(-1) = -2/3$

e) $x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2 (x^2 - x - 2)$

		-1	0	2
x^2	+	+	+	+
$x^2 - x - 2$	+	−	−	+
$x^4 - x^3 - 2x^2$	+	−	−	+

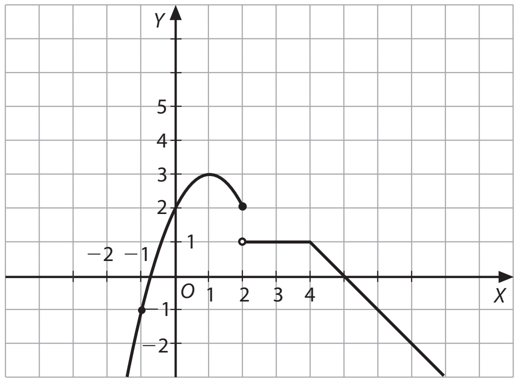
		-1	2
$2x + x$	−	+	+
$x^4 - x^3 - 2x^2$	+	−	+
$\dfrac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2}$	−	−	+

37 **Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) **Represéntala.**

b) **Clasifica sus discontinuidades, si las tuviera.**



En $x = 2$, $f(2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

En $x = 4$, $f(4) = 1$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$

En $x = 2$, discontinuidad de salto.

38 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ |x - 1| & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ ((1-x)/x) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f = \mathbb{R}$

En $x < 2$, f es continua por ser función polinómica.

En $-2 < x < 2$ f es continua por ser valor absoluto de un polinomio.

En $x > 2$ f es continua por ser una función racional continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$f(-2) = -3$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -3$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$f(2) = -7/2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -7/2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

En $x = -2$ y $x = 2$ discontinuidad de salto.

39 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$\nexists\, f(-1)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$

$f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$\nexists\, f(3)$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4$

Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ $\qquad x = -1$, d. a. $x = 3$, d. e.

40 **Estudia la continuidad de la función: $f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}$**
Clasifica sus discontinuidades.

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^{1/0^+} = 2^{+\infty} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^{1/0^-} = 2^{-\infty} = 0\end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

en $x = 2$, d. a.

41 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina *a* para que la función sea continua en todo su dominio.

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim (x^2 + 1) = 2 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim (ax + 3) = a + 3$

Igualando los límites laterales: $2 = a + 3 \Rightarrow a = -1$

42 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + b}{x - 1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{4}{x - 2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{ax} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Determina *a* y *b* para la función sea continua en todo su dominio.

$f(0) = -b$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{3x + b}{x - 1}\right) = -b \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4}{x - 2}\right) = -2$

Igualando los límites laterales: $-b = -2 \Rightarrow b = 2$

$f(1) = \dfrac{2}{a}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{4}{x - 2}\right) = -4 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^2 + 1}{ax}\right) = \dfrac{2}{a}$

Igualando los límites laterales: $-4 = \dfrac{2}{a} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Ejercicios de aplicación

43 **En los seis primeros meses, desde que abrió, una librería ha ido anotando el número de compradores de cada mes. Este número $N(x)$ se puede ajustar por la función**

$$N(x) = \frac{1\,000x - 600}{x}$$

Siendo *x* el número del mes contado desde que abrió.

a) **¿Cuántos compradores tuvo en el segundo mes? ¿En qué mes contado desde la apertura tuvo 900 compradores?**

b) **Supongamos que esta fórmula sirve para predecir el número de compradores en el futuro, ¿podemos asegurar que este número siempre irá creciendo? Explica razonadamente tu respuesta.**

a) $N(2) = \dfrac{1\,000 \cdot 2 - 600}{2} = 700$ compradores

$900 = \dfrac{1\,000x - 600}{x} \Rightarrow x = 6$. En el sexto mes hay 900 compradores.

b) Si calculamos $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1\,000x - 600}{x} = 1\,000$

Como máximo, tendremos 1 000 visitantes.

44 **Tras un estudio demográfico se ha determinado que el número de habitantes de cierta población en los próximos años, vendrá dado por la función:**

$$N(x) = \frac{14\,750x + 3\,750}{2x + 1}$$

a) **¿Cuál es la población actualmente? (año $x = 0$)**

b) **¿Cuál será la población dentro de dos años?**

c) **¿Y dentro de tres años?**

d) **Si se supone que el comportamiento de la población es siempre el mismo, ¿la población crecería indefinidamente o, por el contrario, se estabilizaría? Y si así fuera, ¿en qué valor?**

a) 3 750 habitantes

b) 6 650 habitantes

c) 6 857 habitantes

d) Se estabilizará en el valor 7 375 habitantes.

45 **En un cuadrado de lado 1, se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, del cual se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.**

Las áreas forman una progresión geométrica decreciente, de primer término, 1 y de razón, 1/2.

Por tanto $s = 1/1 - 1/2 = 2$

46 **Representa gráficamente funciones que cumplan las siguientes condiciones.**

a) **$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,**

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$,

$f(0) = 0$, $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$

b) **$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, 0) \cup \{2\}$,**

$f(1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c) **$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,**

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

d) **$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,**

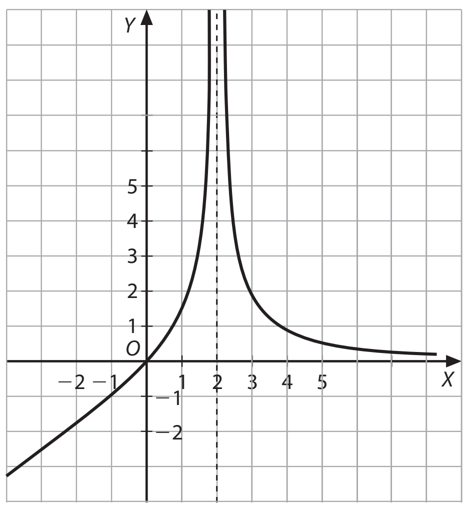
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +3} f(x) = \infty$

e) **$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,**

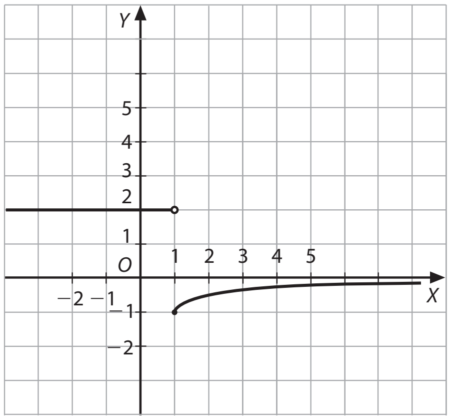
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

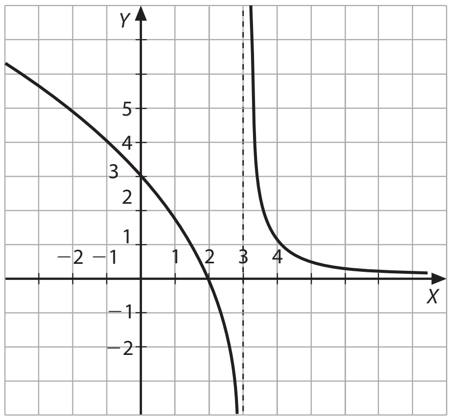
a)



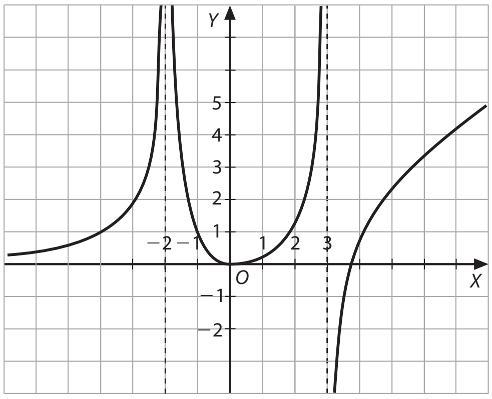
b)



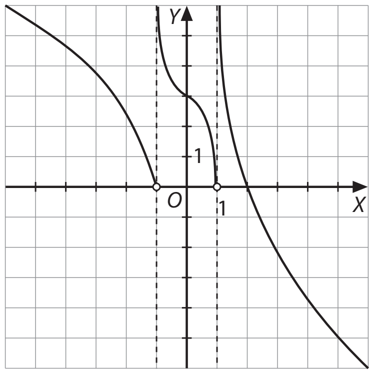
c)



d)



e)



Evaluación (página 279)

1. Calcula los términos generales y la suma de los 15 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) **1, 4, 7, 10, …** ***b)*** **−8, −6, −4, −2, …** ***c)*** $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ ***d)*** $-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, \dots$

a) $a_n = 3n - 2$ $\quad S_{15} = \dfrac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \dfrac{1 + 43}{2} \cdot 15 = 330$

c) $c_n = \dfrac{1}{2}n$ $\quad S_{15} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{2}}{2} \cdot 15 = 60$

b) $b_n = 2n - 10$ $\quad S_{15} = \dfrac{-8 + 20}{2} \cdot 15 = 90$

d) $d_n = \dfrac{1}{3}n - 2$ $\quad S_{15} = \dfrac{\dfrac{-5}{3} + 3}{2} \cdot 15 = 10$

2. Calcula los términos generales y la suma de los 5 primeros términos en cada caso. Si se puede, calcula también la suma de todos los términos de la progresión geométrica.

a) **1, 2, 4, 8, …** ***b)*** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ***c)*** $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$ ***d)*** **1, 5, 25, 125, …**

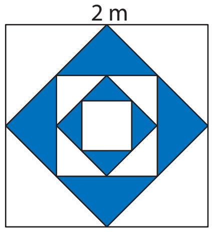
a) $a_n = 2^{n-1}$ $\quad S_5 = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

b) $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad S_5 = \dfrac{1 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\dfrac{1}{2} - 1} = 1{,}9375$ $\quad S = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$

c) $c_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ $\quad S_5 = \dfrac{\dfrac{-1}{3} \cdot \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\dfrac{1}{3} - 1} = -0{,}4979$ $\quad S = \dfrac{-\dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} = -\dfrac{1}{2}$

d) $d_n = 5^{n-1}$ $\quad S_5 = \dfrac{1 \cdot (5^5 - 1)}{5 - 1} = 781$

3. **Los cuadrados de esta figura se han obtenido uniendo 2 a 2 los puntos medios de los lados consecutivos. Calcula:**



a) **El término general de la sucesión que forman los lados.**

b) **El término general de la sucesión que forman las áreas.**

c) **La suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se generan.**

a) La sucesión es una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}/2$. El término general es: $a_n = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

b) $b_n = (a_n)^2 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $S = \dfrac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

4. **Mediante la definición del número e elabora una tabla con el desarrollo de la sucesión, utilizando una hoja de cálculo.**

Construimos la tabla de la siguiente forma:

- En una fila horizontal añadimos los términos de la sucesión y en la siguiente fila, se introduce el valor de la sucesión haciendo referencia a la celda superior.
- Se arrastra hacia la derecha ambas filas para generar tantos términos como se quiera de la sucesión.
- A medida que crece el término, nos aproximamos al valor del número e.

5. **Resuelve estos límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2}\right)$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x\right)$ ***c)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2}\right) \dfrac{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}}{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x^2 - 3}{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}} = \dfrac{-5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x\right) \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x} + x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6}\right) \dfrac{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}}{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^2 - 6x^3 - 6}{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}} = -\infty$

6. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}\right)$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-3)}{(x+2)} = \dfrac{-1}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left(\dfrac{20}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = -\infty \end{cases}$

7. **Estudia la continuidad de estas funciones y clasifica sus puntos de discontinuidad.**

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 5}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ ***c)*** $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 4}$

a) La función es racional, por lo que es continua en todo su dominio. En este caso, como el denominador no se anula nunca, la función no tiene puntos conflictivos. Así pues, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Esta función es racional, continua en todo su dominio. En este caso, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La función tiene una discontinuidad asintótica en dicho punto ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

c) La función está definida a trozos siendo cada uno un polinomio, así que, habría que estudiar en la continuidad en los puntos de unión. En este caso, la función tiene una discontinuidad de salto finito para $x = 3$. Por tanto, es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

d) La función es racional cuyo dominio son todos los número reales excepto el cuatro. En este caso, para $x = 4$ la función tiene una discontinuidad asintótica ya que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \infty$. Así pues, $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

8. **Determina las asíntotas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

a)
- La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.
- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

b)
- La recta $x = 1$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.
- No tiene una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1 \neq 0$ $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) - x) = 1 \in \mathbb{R}$

c)
- La recta $x = -3$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$.
- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.