OPCIÓN A. PROBLEMA 1.

Un planeta gigante tiene dos satélites, S1 y S2, cuyos periodos orbitales son T_1 = 4.52 días terrestres y T_2 = 15.9 días terrestres respectivamente.

a) Si el radio de la órbita del satélite S1 es de $5.27 \cdot 10^8$ m, calcular la masa del planeta.

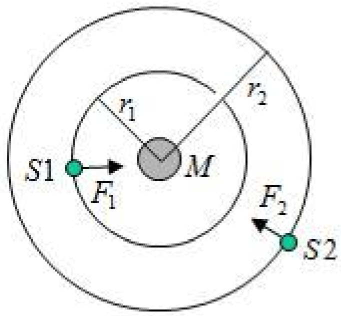
b) Calcular el radio de la órbita del satélite S2 en km.

c) Si un meteorito inicia un movimiento de caída libre sin velocidad inicial hacia el planeta desde la órbita de S2, ¿cuál será su velocidad cuando pase por la órbita de S1?

Constante de gravitación $6.67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Fuerza de gravitación sobre S1 = fuerza centrípeta

$$F_1 = G\frac{M\,m_1}{r_1^2} = m_1\,\omega_1^2\,r_1 = m_1 r_1\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2$$



Sustituyendo $r_1 = 5.27 \cdot 10^8$ m y $T_1 = 86400 \times 4.52$

$$M = \frac{r_1^3\omega_1^2}{G} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r_1^3}{T_1^2} = 5.68 \cdot 10^{26}\ \text{kg}$$

(No hace falta conocer la masa m_1 del satélite S1)

b) Una vez conocida la masa M del planeta, igualamos la fuerza de gravitación sobre S2 con la fuerza centrípeta (tampoco hace falta conocer la masa m_2 de este satélite)

$$F_2 = G\frac{M\,m_2}{r_2^2} = m_2\,\omega_2^2\,r_2 = m_2 r_2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \rightarrow\ r_2 = \sqrt[3]{\frac{GMT_2^2}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo $T_2 = 86400 \times 15.9$ tenemos $r_2 = 1.22 \cdot 10^9$ m $= 1.22 \cdot 10^6$ km

c) Cuando el meteorito (masa m) está en la órbita de S2 e inicia la caída libre hacia el planeta, toda su energía es energía potencial y su valor es $U_2 = -G\frac{Mm}{r_2}$; cuando pasa por la órbita de S1, la energía potencial es $U_1 = -G\frac{Mm}{r_1}$. La diferencia de energía potencial $U_2 - U_1$ se habrá convertido en energía cinética, y su velocidad v puede calcularse igualando:

$$E_C = U_2 - U_1 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \rightarrow v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Sustituyendo $r_1 = 5.27 \cdot 10^8$ m y $r_2 = 1.22 \cdot 10^9$ m queda $\rightarrow v = 9034$ m/s

OPCIÓN A. PROBLEMA 2.

Se tienen dos esferas conductoras de radios 4.5 cm y 9 cm, aisladas entre sí y separadas una distancia de 100 m entre sus centros. Las dos esferas tienen inicialmente la misma carga q_0.

a) Sabiendo que el potencial en el punto medio de la distancia que las separa es 3.6 V, calcular la carga q_0 y el potencial de cada esfera.

b) Si las dos esferas se ponen en contacto mediante un hilo conductor muy fino cuya capacidad de almacenar carga puede despreciarse, calcular el potencial final al que quedan ambas esferas y la carga de cada una de ellas. Explicar cuál es el fundamento físico en que nos basamos para hacer los cálculos correspondientes.

Constante de Coulomb $k = 9\cdot 10^9$ N·m^2·C^{-2}.

a) Cuando las esferas cargadas están muy alejadas se comportan como si fuesen cargas puntuales, y el potencial en el punto medio (d = 50 m) se calcula como la suma de los potenciales debidos a dos cargas iguales de magnitud q_0:

$$V_{medio} = 2k\frac{q_0}{d} = 2\cdot 9\cdot 10^9\frac{q_0}{50} = 3.6 \quad \rightarrow \quad q_0 = 10^{-8}\text{ C}$$

El potencial de cada esfera es función de su radio (R = 4.5 cm; $2R$ = 9 cm):

$$V_{R0} = k\frac{q_0}{R} = 2000\text{ V} \qquad V_{2R0} = k\frac{q_0}{2R} = 1000\text{ V}$$

b) Cuando las dos esferas se unen mediante un conductor se produce un movimiento de cargas de una a otra hasta que finalmente se alcanza un potencial de equilibrio común para las dos. El fundamento es la igualdad de potenciales de las esferas una vez conectadas y la conservación de la carga. Según el enunciado, el hilo conductor entre las esferas no almacena una cantidad apreciable de carga, así que la carga total, que se conserva, estará repartida exclusivamente entre las dos esferas. El valor total de la carga almacenada es $2q_0$ igual que antes de conectarlas, pero ahora estará repartida en dos fracciones desiguales q_R y q_{2R}:

Conservación de la carga: $q_R + q_{2R} = 2q_0$

Potencial de cada esfera: Equilibrio de potenciales:

$$V_R = k\frac{q_R}{R} \text{ y } V_{2R} = k\frac{q_{2R}}{2R} \qquad \text{Como } V_R = V_{2R} \rightarrow k\frac{q_R}{R} = k\frac{q_{2R}}{2R} \rightarrow q_{2R} = 2q_R$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas que permiten calcular las cargas:

$$q_R + q_{2R} = 2q_0 \quad \text{y} \quad q_{2R} = 2q_R \quad \rightarrow \quad q_R = \frac{2}{3}q_0 = \frac{2\cdot 10^{-8}}{3}\text{C} \quad \text{y} \quad q_{2R} = \frac{4}{3}q_0 = \frac{4\cdot 10^{-8}}{3}\text{C}$$

Potencial:

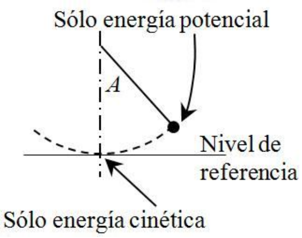
$$V_R = k\frac{q_R}{R} = V_{2R} = k\frac{q_{2R}}{2R} = \frac{4}{3}\cdot 10^3\text{ V}$$

OPCIÓN A. CUESTIONES

3.- Una pequeña bolita sujeta del techo por un hilo delgado se separa de la vertical un ángulo de 5º y se deja oscilar libremente como un péndulo simple. Después se separa de la vertical un ángulo de 10º y también se deja oscilar libremente como péndulo simple. A) ¿Serán iguales los periodos en los dos casos? B) ¿Serán iguales las velocidades cuando la bolita pasa por la posición vertical? Argumentar razonadamente.

El movimiento armónico simple tiene un periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Este periodo de oscilación no depende de la amplitud de la oscilación, sino solo de la aceleración de la gravedad g y de la longitud del péndulo L, por lo que siendo el mismo péndulo en dos oscilaciones de amplitudes diferentes los periodos serán iguales.

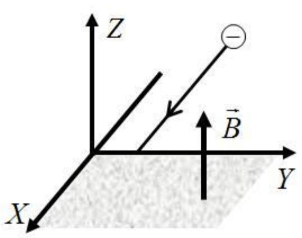
Por otra parte, la ecuación de la oscilación de un péndulo está dada por $\theta = A\sin(\omega t + \delta)$, y su derivada respecto al tiempo es $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$. El significado físico de esta derivada es la velocidad angular del péndulo en cada instante. En particular, cuando el péndulo pasa por la vertical la fase es $\omega t + \delta = 0$ y la velocidad angular será la máxima posible $\dot{\theta} = A\omega$. Así que la velocidad del péndulo será $v = L \cdot \dot{\theta} = L \cdot A\omega$, que depende de la amplitud de la oscilación. Vemos pues que cuando la amplitud es mayor, la velocidad del péndulo al pasar por la vertical es mayor.



Argumento alternativo: la energía total del péndulo simple, que es la suma de cinética más potencial, permanece constante en ausencia de rozamientos. Cuando se inicia la oscilación, la energía cinética es cero y la energía potencial es tanto mayor cuanto mayor sea la amplitud de dicha oscilación, porque el péndulo estará a mayor altura respecto a su nivel más bajo, el cual tomamos como referencia de energía potencial.

Cuando el péndulo pasa por la vertical, toda la energía potencial se ha transformado en cinética, por lo tanto cuanto mayor es la amplitud de la oscilación, mayor es la velocidad al pasar por la vertical, ya que la energía cinética en ese momento será mayor.

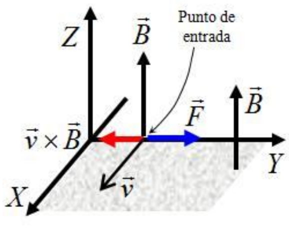
4.- Una partícula cargada negativamente que viaja con velocidad constante penetra en la zona sombreada (región positiva $x > 0$ del plano XY, véase dibujo adjunto), en la cual existe un campo magnético uniforme ***B*** dirigido verticalmente hacia arriba. Explicar razonadamente qué trayectoria seguirá y dibujar un esquema de la misma.

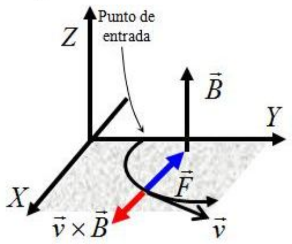


La fuerza magnética $\vec{F}$ sobre la partícula cargada moviéndose con velocidad $\vec{v}$ dentro del campo $\vec{B}$ es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La partícula tiene carga negativa, en la figura aparecen $\vec{v} \times \vec{B}$ y $\vec{F}$.





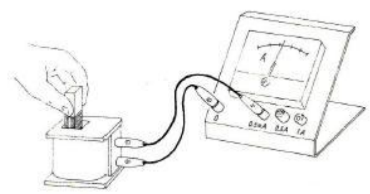
El módulo de la velocidad es constante: dentro del campo magnético sólo cambia su dirección. Aplicando la regla de la mano derecha comprobamos que la trayectoria será circular con giro en sentido antihorario (visto desde arriba) alrededor de las líneas del campo magnético.

5.- El radioisótopo iodo-131 tiene un periodo de semidesintegración de 8 días. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la actividad de una muestra de este material se reduzca hasta el 10% de su valor original?

Ecuación de la desintegración radiactiva: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, donde λ es la constante de desintegración, N_0 es el número de núcleos inicialmente presente en la muestra y N el número de núcleos que queda al cabo del tiempo t. La relación entre la constante λ y el tiempo de semidesintegración τ es $\lambda = \frac{ln2}{\tau} = \frac{ln2}{8} = 0.08664 \text{ dia}^{-1}$. Para que la actividad se reduzca a un 10% del valor original tiene que haber transcurrido el tiempo necesario para que quede solamente un 10% de los núcleos radiactivos que había al principio. El tiempo preciso t_{10} es:

$$e^{-\lambda t_{10}} = \frac{N}{N_0} = 0.10 \longrightarrow t_{10} = -\frac{\ln 0.10}{\lambda} = -\frac{(-2.3026)}{0.08664} = 26.6 \text{ dias}$$

6.- Un estudiante de Física dispone de una bobina formada por un estrecho arrollamiento de espiras de cable conductor y un amperímetro conectado con la misma (ver figura). El estudiante tiene dos imanes: uno de gran potencia y otro poco potente. ¿De qué forma registrará el amperímetro una lectura mayor, si introduce el imán potente y lo deja en reposo en el interior del hueco de la bobina o si mueve el imán menos potente alternativamente hacia dentro y hacia fuera en el hueco de la bobina? Justificar la respuesta.



De acuerdo con la ley de Faraday, la variación de flujo magnético en un circuito origina una fuerza electromotriz inducida que se opone a la causa que la produce: $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$, donde ε es la fuerza electromotriz inducida y $\frac{d\phi}{dt}$ es la variación de flujo magnético con el tiempo.

Si hay un imán dentro del hueco de la bobina, el campo magnético de éste origina un flujo magnético no nulo (recordemos que el flujo magnético en cada punto es el producto del campo magnético por el elemento de superficie al que dicho punto pertenece) tanto mayor cuanto más potente sea el imán; pero si el imán está inmóvil, éste flujo magnético adoptará un valor constante (aunque sea muy grande). Por lo tanto la variación de flujo magnético con el tiempo es nula y la fuerza electromotriz inducida será cero, pues la derivada $\frac{d\phi}{dt}$ es cero. Si no hay fuerza electromotriz, no hay ningún agente que mueva las cargas libres del hilo conductor de la bobina y el amperímetro no acusará el paso de ninguna corriente.

Sin embargo, si un imán (aunque sea menos potente) se mantiene en movimiento dentro del hueco de la bobina, habrá un flujo magnético cambiante con el tiempo, su derivada $\frac{d\phi}{dt}$ ya no será cero y la fuerza electromotriz tendrá un valor no nulo. En consecuencia aparecerá una corriente eléctrica que será registrada por el amperímetro.

OPCION B. PROBLEMA 1.

Una onda armónica transversal de periodo T = 2 s se propaga con velocidad de 60 cm/s en sentido positivo a lo largo de una cuerda tensa orientada según el eje X.
Se sabe que el punto de la cuerda de abscisa x = 30 cm oscila en la dirección del eje Y, de forma que en el instante t = 1 s la elongación es nula y su velocidad es positiva; y en el instante t = 1.5 s su elongación es 5 cm y su velocidad es nula. Se pide:

a) La frecuencia y la longitud de onda.
b) La fase inicial, la amplitud de la onda armónica y su expresión matemática.
c) La diferencia de fase de oscilación de dos puntos separados por un cuarto de longitud de onda.

a) Relación entre velocidad de fase, longitud de onda y periodo:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = vT = 60 \cdot 2 = 120 \text{ cm} = 1.20 \text{ m}$$

Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ Hz}$$

b) La ecuación de la onda tiene la forma general $y = A\sin(\omega t - kx + \delta)$

Con los datos conocidos calculamos: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1.20} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

- Aplicando condiciones dadas del punto de abscisa x = 0.30 m, t = 1 s → y = 0. Nos dice que la velocidad es positiva, y por ser y=0 esa velocidad ha de ser máxima, pues en ese momento la cuerda está pasando por la posición de equilibrio. Calculamos la velocidad máxima a partir de

  $$y = A\sin(\omega t - kx + \delta) \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t - kx + \delta) \rightarrow \dot{y}_{max} = A\omega$$

  y además

  $$\cos\left(\pi \cdot 1 - \frac{2\pi}{1.20} \cdot 0.30 + \delta\right) = +1 \quad \rightarrow \pi \cdot 1 - \frac{2\pi}{1.20} \cdot 0.30 + \delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

- Las otras condiciones dadas del punto de abscisa x = 0.30 m son t = 1.5 s → y = 5 cm.

  Sustituyendo en $y = A\sin(\omega t - kx + \delta) \rightarrow 0.05 = A\sin\left(\pi \cdot 1.5 - \frac{2\pi}{1.20}0.30 - \frac{\pi}{2}\right)$

  Véase que $\left(\pi \cdot 1.5 - \frac{2\pi}{1.20}0.30 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $A = \frac{0.05}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0.05$ m

Ecuación de la onda: $y = 0.05\sin\left(\pi\, t - \frac{2\pi}{1.20}x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) Dos puntos separados por una distancia Δx tienen un desfase de

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

Por tanto si $\Delta x = \lambda/4 \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ rad

OPCIÓN B. PROBLEMA 2.

Un ion de masa $6.64 \cdot 10^{-26}$ kg, cargado positivamente, es acelerado desde el reposo mediante una diferencia de potencial de 5025 V y a continuación se le hace entrar perpendicularmente a las líneas de campo en un campo magnético de 0.1 T donde describe una órbita circular de radio 45.68 cm.

a) Calcular la carga del ion.

b) Explicar si el sentido en que este ion describirá la órbita es horario o antihorario. Se valorará un diagrama adecuado para ilustrar la explicación.

c) Si un protón se hiciese entrar en el mismo campo magnético **con la misma energía cinética** que el ion al que se refiere el apartado a), ¿cuál sería su velocidad y el radio de su órbita?

Datos del protón: masa = $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg; carga = $1.60 \cdot 10^{-19}$ C.

Apartados a) y b)

Si el ion (carga q a calcular) se somete a una ddp ΔV = 5025 V, el incremento de energía potencial se convierte al final en energía cinética y por lo tanto tendremos la siguiente relación entre la carga y la velocidad del ion (donde $m = 6.64 \cdot 10^{-26}$ kg):

$$E_C = \Delta E_P = q\,\Delta V = 5025\,q \;\rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 = 5025\,q \;\rightarrow\; q = \frac{m\,v^2}{10050}$$

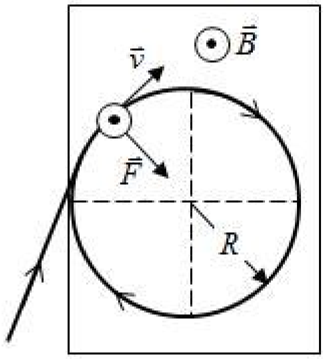
Cuando el ion entra en el campo, la fuerza magnética actúa como una fuerza centrípeta, curva la trayectoria y le obliga a describir una órbita de radio R:

$$F = qvB = \frac{m\,v^2}{R}$$

Sustituyendo la carga en función del cuadrado de v:

$$\frac{m\,v^2}{10050}vB = \frac{m\,v^2}{R}$$

$$v = \frac{10050}{R\,B} = \frac{10050}{0.4568 \cdot 0.1} = 220000\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 220\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



El valor de la carga es $q = \frac{m\,v^2}{10050} = \frac{6.64 \cdot 10^{-26} \cdot 220000^2}{10050} = 3.20 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 2e$

Como se trata de un ion con dos cargas elementales positivas, su trayectoria vista desde la parte superior de las líneas de campo es de giro horario, de acuerdo con la regla de la mano derecha (véase el sentido de la fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en el esquema).

Apartado c)

Energía cinética del ion: $E_C = 5025\,q = 5025 \cdot 3.20 \cdot 10^{-19} = 1.61 \cdot 10^{-15}$ J

Velocidad de un protón de esa energía: $E_C = \frac{1}{2}m_P v_P^2 \;\rightarrow\; v_P = \sqrt{\frac{2E_C}{m_P}}$

Sustituyendo $m_P = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg $\rightarrow v_P = 1.39 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$

El radio de la órbita se obtiene de igualar $e \cdot v_P \cdot B = \frac{m_P \cdot v_P^2}{R_P} \;\rightarrow\; R_P = \frac{m_P\,v_P}{e\,B}$

Sustituyendo $R_P = 0.144$ m.

OPCIÓN B. CUESTIONES

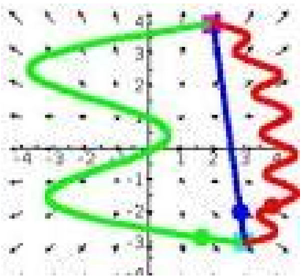
3.- Explicar qué es la velocidad de escape desde la superficie de un planeta y demostrar cómo se calcula su valor.

La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la mínima velocidad que debe comunicarse a un cuerpo situado allí para que se libere de la atracción del mismo y se aleje ilimitadamente del planeta, alcanzando el infinito con velocidad nula. O dicho con otras palabras: cuando el cuerpo (masa *m*) está situado en la superficie del planeta (masa *M* y radio *R*), la energía total del sistema es igual a la energía potencial, esto es, $E_{SUP} = U = -G\frac{Mm}{R}$, y es negativa porque el sistema está ligado; la velocidad de escape es la velocidad que hay que dar al cuerpo para que el sistema tenga energía total cero, y esto se consigue suministrando energía cinética (es decir, velocidad *v*) al cuerpo de masa *m* de modo que la energía total sea cero (condición mínima de sistema no ligado). La velocidad de escape se calcula así:

$$E_\infty = E_{SUP} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

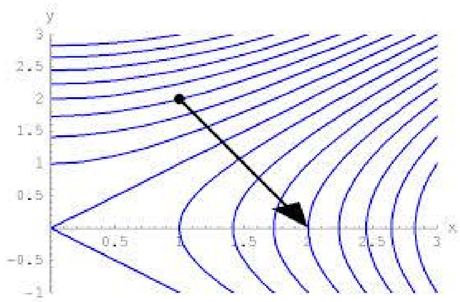
4.- El campo eléctrico originado por una configuración estática de carga eléctrica es conservativo. ¿Qué quiere decir esta afirmación? ¿Qué relación tiene con el potencial eléctrico?



Un campo se llama conservativo si el trabajo total realizado por el campo sobre un cuerpo que se desplaza entre dos posiciones es independiente de la trayectoria, dependiendo sólo de la posición inicial y la posición final. Ejemplo: el campo representado en la figura a la derecha es conservativo, así que el trabajo del campo cuando una partícula se desplaza del punto inferior al superior es el mismo por los tres caminos mostrados en verde, azul y rojo. Lo mismo es cierto para cualquier trayectoria.

En el caso de un campo creado por cargas estáticas, el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre cualquier carga de prueba que se traslada entre dos puntos tiene un valor independiente de cuál de las posibles trayectorias entre esos dos puntos se haya seguido.

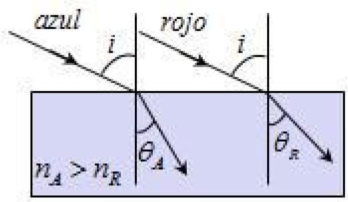
Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, el trabajo total realizado por el campo será cero, ya que el punto inicial y final son coincidentes.



Cuando un campo es conservativo, siempre existe una función escalar *V*, que depende de las coordenadas, de manera que el campo es proporcional al vector gradiente de dicha función. En el caso del campo eléctrico, la función *V* es el potencial eléctrico. El vector gradiente indica en cada punto cuál es la dirección en la que la función escalar varía más rápidamente, y el campo eléctrico es igual al gradiente cambiado de signo, ya que el campo eléctrico apunta desde los lugares donde el potencial es mayor hacia donde el potencial es menor: $\vec{E} = -grad\,V$.

5.- Un rayo de luz azul y un rayo de luz roja inciden sobre la superficie plana de una lámina de vidrio formando el mismo ángulo con la normal. Si el índice de refracción del vidrio es directamente proporcional a la frecuencia de la luz incidente, ¿cuál de los dos rayos tendrá un ángulo de refracción mayor?

La luz azul tiene menor longitud de onda que la luz roja; por tanto, la frecuencia de la luz azul es mayor que la frecuencia de la luz roja. Si n_A y n_R son respectivamente los índices de refracción de la luz azul y roja, entonces $n_A > n_R$. Aplicando la ley de Snell tenemos que



$\sin\theta_A = \frac{\sin i}{n_A} \quad \sin\theta_R = \frac{\sin i}{n_B} \rightarrow \sin\theta_A < \sin\theta_R \rightarrow \theta_A < \theta_R$

El ángulo de refracción para el rojo es mayor que para el azul.

6.- Un estudiante quiere determinar la constante elástica de un muelle en el laboratorio de Física. Para ello cuelga distintas masas del muelle y lo deja oscilar libremente, midiendo los tiempos invertidos en realizar 16 oscilaciones (masas ***m*** y tiempos ***t*** en la tabla). Explicar de qué forma deben tratarse los datos y calcular cuál es la constante elástica del muelle estudiado.

m (g)	***t*** (s)
90	6,0
120	7,0
150	7,8
180	8,5

El periodo *T* de oscilación de un resorte cargado con la masa *m* es igual a $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, donde k es la constante elástica.

Por tanto *k* puede despejarse: $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$

m (g)	t (s)		m (kg)	T (s)	k /N/m)
90	6,0		0,09	0,375	25,3
120	7,0		0,12	0,438	24,8
150	7,8		0,15	0,488	24,9
180	8,5		0,18	0,531	25,2
		Promedio k (N/m) =			25,0

En la tabla adjunta se han obtenido los periodos (dividiendo los tiempos de oscilación por 16) y se han hecho los cálculos para obtener el valor de la constante elástica: *k* = 25.0 N/m.