SOLUCIONARIO

FÍSICA
2.º BACHILLERATO

2

MADRID - BUENOS AIRES - CARACAS - GUATEMALA
LISBOA - MÉXICO - NUEVA YORK - PANAMÁ - SAN JUAN
BOGOTÁ - SÃO PAULO
AUCKLAND - HAMBURGO - LONDRES - MILÁN - MONTREAL
NUEVA DELHI - PARÍS - SAN FRANCISCO - SIDNEY - SINGAPUR
SANT LOUIS - TOKIO - TORONTO

FÍSICA · 2.º Bachillerato · Solucionario

McGraw-Hill/Interamericana de España, S.L.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 978-84-486-0995-5

Autores: Ángel Peña, José Antonio García
Revisor técnico: Antonio José Vasco
Equipo editorial: M.ª Isabel Bermejo, Miguel Montanyà y Ediciones Gráficas Arial, S.L.
Diseño interior: Equipo de diseño McGraw
Ilustraciones: Ediciones Gráficas Arial, S.L., J.B. Estudio Gráfico y Editorial, S.L., Disigit y Estudio Requejo, Pablo Vázquez
Composición: Artedis, S.L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

ÍNDICE

Actividades

1. Determina cuáles de las siguientes son unidades coherentes del SI y cuáles no.

N/cm²; N/kg ; J/año ; C · Cm · s⁻¹; A · s

Son coherentes: N/kg y A · s

2. Describe brevemente los conceptos magnitud, cantidad y unidad, intentando relacionar los tres y el concepto de medida en un esquema.

Esta actividad es de solución abierta.

3. Calcula la ecuación dimensional de la energía potencial gravitatoria $E_p = m\ g\ h$.

$$[E_p] = [m] \cdot [g] \cdot [h] = M \cdot LT^{-2} \cdot L = ML^2T^{-2}$$

4. A partir de las ecuaciones que definen las siguientes magnitudes, determina sus ecuaciones dimensionales, así como sus unidades en el SI.

a) **Cantidad de movimiento $p = m\ v$**

b) **Fuerza $F = m\ a$**

c) **Energía cinética $E_c = 1/2\ m\ v^2$**

a) $[p] = MLT^{-1}$

b) $[F] = MLT^{-2}$

c) $[E_c] = M\left[\dfrac{L}{T}\right]^2 = ML^2T^{-2}$

5. Utilizando las ecuaciones dimensionales, comprueba que la velocidad de caída de un cuerpo bajo la acción de la gravedad no depende de su masa. Es decir, comprueba que es falso que los cuerpos más pesados caigan con más rapidez, como afirmaba Aristóteles.

La velocidad de caída de un cuerpo viene dada por $\nu = \sqrt{2gh}$, cuya ecuación dimensional es:

$$[\nu] = [LT^{-2}]^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = LT^{-1}$$

en donde no aparece la masa.

6. La velocidad de caída de un cuerpo depende de la altura recorrida y de la gravedad, pero dudas si la fórmula correcta es $v = 2gh$; $v = 2gh^2$; $\nu = \sqrt{2gh}$

Será correcta la que dimensionalmente sea homogénea: El segundo miembro tenga las dimensiones de una velocidad.

$[2gh] = LT^{-2} \cdot L = L^2T^{-2} \neq [\nu]$ no es correcta.

$[2gh^2] = LT^{-2} \cdot L^2 = L^3T^{-2} \neq [\nu]$ no es correcta

$[\sqrt{2gh}] = [LT^{-2} \cdot L]^{\frac{1}{2}} = LT^{-1} = [\nu]$ es correcta

7. Halla las dimensiones de la G de la gravitación universal, sabiendo que:

$$F = G\,\frac{m\ .\ m'}{d^2}$$

$$[G] = [F] \cdot [d]^2 \ .\ [M]^{-2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2 \cdot M^{-2} = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$$

8. ¿Es correcta dimensionalmente la fórmula $P = F \cdot S$ (presión = = fuerza · superficie)? Explica por qué.

La ecuación dimensional de la presión es:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

La ecuación dimensional de la fórmula dada es:

$$[P] = MLT^{-2} \cdot L^2 = ML^3T^{-2}$$

Por tanto, no es correcta.

9. El tiempo que tarda un péndulo en dar una oscilación completa viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, siendo *l:* longitud del hilo y *g:* aceleración de la gravedad. Demuestra que esta ecuación es dimensionalmente correcta.

Será correcta si ambos miembros tienen la misma dimensión.

Primer miembro: $[T] = T$

Segundo miembro: $\left[2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\right] = \left[\sqrt{\dfrac{l}{g}}\right] = L^{\frac{1}{2}} \cdot [LT^{-2}]^{\frac{-1}{2}} \cdot T = T$

10. Estás midiendo el periodo de un péndulo. Pueden darse algunas de estas circunstancias durante la medición:

- **Que el cronómetro no funcione bien (adelanta o atrasa).**
- **Que al medir un solo periodo *(T),* el tiempo que empleas en disparar o parar el cronómetro (tiempo de reacción) sea diferente en cada medición.**
- **Que unos compañeros tuyos abran la puerta del laboratorio, provocando corrientes de aire o vibraciones de las mesas de trabajo que interfieran en la calidad de las medidas. Para minimizar los posibles errores cometidos, en lugar de medir el tiempo que tarda el péndulo en dar una oscilación, mides el tiempo que tarda en dar diez oscilaciones, y repites la operación cinco veces, obteniendo los siguientes resultados:**

Medición	1.a	2.a	3.a	4.a	5.a
Resultado	19,4 s	20,2 s	20,0 s	18,1 s	21,3 s

- **Sabemos que el periodo de un péndulo viene dado por la ley $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$(siendo *l* la *g* longitud del hilo y *g* el valor de la gravedad).**

a) **De las circunstancias indicadas, ¿cuáles dan origen a errores accidentales y cuáles a errores sistemáticos?**

b) **¿Cuál es el periodo del péndulo, de acuerdo con los resultados de las medidas?**

c) **¿Qué error absoluto y relativo has cometido en la medición del periodo *T,* teniendo en cuenta la ley del péndulo? (Se supone que el valor de *l* y de *g* son exactos).**

a)

- Origen accidental de los errores: tiempo de reacción, corrientes de aire al abrir la puerta del laboratorio.
- Origen sistemático de errores: error del cronómetro.

b) El periodo del péndulo viene dado por la media aritmética de los valores obtenidos:

$$T = \frac{1}{10} \cdot \frac{19{,}4\ s + 20{,}2\ s + 20{,}0\ s + 18{,}1\ s + 21{,}3\ s}{5} = 1{,}98\ s$$

Aplicando la ley del péndulo, el valor del periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}28 \sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}00\ s$$

c) $e_a = 2{,}00\ s - 1{,}98\ s = 0{,}02\ s$;

$$e_r = \frac{e_a}{\nu_\nu} = \frac{0{,}02}{2{,}00} = 0{,}01 \Rightarrow 1\ \%$$

11. Realiza un trabajo en equipo sobre algún tema físico de actualidad (por ejemplo, los agujeros negros, la materia oscura, las ondas gravitacionales, etc.). Para ello visita webs como goo.gl/BQS4R8, goo.gl/6ns1, goo.gl/LBF9Gh o goo.gl/RWnvl.

Respuesta abierta: la solución depende del tema elegido y del grupo de alumnos que lo desarrolle.

12. Diseña simulaciones interactivas sobre fenómenos físicos usando programas sencillos de elaboración de applets, como por ejemplo: goo.gl/6QxoT5.

Respuesta abierta: la solución depende del tema elegido y del grupo de alumnos que lo desarrolle.

13. Elige simulaciones sobre temas de Física vistos durante el curso pasado: cinemática, dinámica, energía, etc. Después, realiza una página web o blog que enlace esos contenidos directamente, junto con una breve nota descriptiva, con objeto de reunir la información de todas las simulaciones realizadas para visitar posteriormente.

Respuesta abierta: la solución depende del tema elegido y del grupo de alumnos que lo desarrolle.

14. Consulta páginas web de PeHT simulations (como goo.gl/OJ9U) para analizar las muchas simulaciones que existen en Internet sobre los distintos fenómenos físicos que estudiarás a lo largo del curso.

Respuesta abierta: la solución depende del tema elegido y del grupo de alumnos que lo desarrolle.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. Cita algunas posibles causas por las que grandes ideas no llegan a plasmarse en inventos.

Dificultades económicas o técnicas para llevar a la práctica las ideas concebidas por el inventor. Incomprensión social hacia el inventor.

2. ¿Existen algunas diferencias entre invento y descubrimiento?

El invento es la culminación práctica (en forma de utensilios, aparatos, etc.) de una idea, tras un proceso lento y laborioso en general.

El descubrimiento es la manifestación (unas veces imprevista y otras resultado de una serie de ensayos) de la existencia de un hecho desconocido hasta esa fecha.

El invento suele ser consecuencia de un proceso lento. En cambio, el descubrimiento suele ser imprevisto.

3. Hay muchos «inventos caseros» en forma de recetas, remedios, utensilios, etc. que no están patentados. Cita algún ejemplo.

Contestación abierta.

4. Se suele decir que la siesta es un gran invento español. ¿Se puede considerar la siesta como un invento? Explica tu respuesta.

No. No cumple la definición de invento. Invento sería: la cama, sofá, hamaca, etc. usados para dormir la siesta. La siesta es una costumbre social.

Problemas propuestos

Cálculo de errores y notación científica

1. Te recordamos que la notación científica consiste en expresar un número con una parte entera (de una sola cifra, que no sea cero) seguido del resto del número en forma decimal multiplicado por una potencia de base diez con exponente positivo o negativo según corresponda al valor del número. Expresa en notación científica:

***a)* Las cantidades: *a* = 73 000 000; *b* = 0,000 003.**

***b)* El resultado de las operaciones *a* · *b*; *a* : *b*.**

a) $a = 73\,000\,000 = 7{,}3 \cdot 10^{7}$; $b = 0{,}000\,003 = 3 \cdot 10^{-6}$

b) $a \cdot b = 7{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 2{,}19 \cdot 10^{2}$;

$$a : b = \frac{7{,}3 \cdot 10^{7}}{3 \cdot 10^{-6}} = 2{,}43 \cdot 10^{13}$$

2. Un carpintero mide una puerta de 2,50 m de alto, obteniendo un valor de 2,52 m; otro carpintero, al medir la longitud de una mesa de 80,0 cm obtiene 79 cm. De estas dos medidas, ¿cuál es más precisa?

La precisión de una medida depende del valor del error relativo cometido. Cuanto menor sea este, mayor será la precisión de la medida.

Error relativo de la primera medida:

$$e_r = \frac{2{,}52\ m - 2{,}50\ m}{2{,}50\ m} = 0{,}8\ \%$$

Error relativo de la segunda medida:

$$e_r = \frac{80{,}0\ cm - 79\ cm}{80{,}0\ cm} = 1{,}25\ \%$$

La primera medida es más precisa: $0{,}8\ \% < 1{,}25$

3. Se han pesado dos muestras de la misma sustancia, cuyas medidas han sido 9,2 ± 0,2 g y 3,6 ± 0,1 g. ¿Cuál es el peso de la muestra conjunta? S: 12,8 ± 0,3 g.

El peso de la muestra conjunta y su error cometido es igual a la suma de cada una de las muestras y la suma de los errores respectivos.

$s = (9{,}2 \pm 0{,}2\ g) + (3{,}6 \pm 0{,}1\ g) = 12{,}8 \pm 0{,}3\ g$

4. Se deja caer un objeto desde una determinada altura y se miden los siguientes tiempos hasta su llegada al suelo: 1,17 s; 1,21 s; 1,15 s; 1,18 s; 1,20 s; 1,18 s.

a) Halla el valor medio del tiempo que tarda en caer.

b) Escribe ese tiempo con su correspondiente incertidumbre.

c) Determina la altura desde la que cayó.

a) El valor medio se obtiene hallando la media aritmética de los valores obtenidos:

$$t = \frac{1{,}17\ \text{s} + 1{,}21\ \text{s} + 1{,}15\ \text{s} + 1{,}18\ \text{s} + 1{,}20\ \text{s} + 1{,}18\ \text{s}}{6} = 1{,}18\ \text{s}$$

b) 1,18 ± 0,01 s

c) $h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \,.\, (1{,}18 \pm 0{,}01\ \text{s})^2 = 6{,}83 \pm 0{,}12\ \text{m}$

5. Un automóvil recorre una distancia de 30 ± 0,8 s en un tiempo de 2,0 ± 0,1 s. ¿Qué error relativo se comete al calcular la velocidad del coche?

El error relativo cometido en el cálculo de la velocidad es igual al error relativo cometido en la distancia más el error relativo cometido en la medida del tiempo.

Error relativo en la distancia: $e_r = \frac{0{,}8\ \text{m}}{30\ \text{m}} = 2{,}66\ \%$

Error relativo en el tiempo: $e_r = \frac{0{,}1\ \text{s}}{2\ \text{s}} = 5\ \%$

Error relativo en el cálculo de la velocidad:
$e_r = 2{,}66\ \% + 5\ \% = 7{,}66\ \%$

Ecuaciones dimensionales

6. Una partícula de masa *m* cuando se desplaza con movimiento vibratorio lo hace de forma que el periodo-tiempo que tarda en dar una vibración viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

¿Qué dimensión tiene la constante *k* para que la ecuación anterior sea homogénea?

Para que la ecuación sea homogénea la expresión $\sqrt{\frac{m}{k}}$ ha de tener la dimensión de un tiempo: $\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = T$. Por tanto, se cumple $\frac{m}{k} = t^2 \Rightarrow k = \frac{m}{t^2}$

De donde $[k] = MT^{-2}$

7. Dudas acerca de cuál de las ecuaciones $F = \frac{mv^2}{r}$, $F = \frac{mv}{r}$ representa la fuerza centrípeta? Indica cuál de las dos es dimensionalmente correcta.

Será correcta la que en el segundo miembro la dimensión de una fuerza. Es decir:

$$[F] = MLT^{-2}$$

- Primera igualdad: $\left[\frac{mv^2}{r}\right] = ML^2T^{-2} \cdot L^{-1} = MLT^{-2}$ es correcta.
- Segunda igualdad: $\left[\frac{mv}{r}\right] = MLT^{-1} \cdot L^{-1} = MT^{-1}$ es falsa.

8. Admitiendo que la velocidad de propagación del sonido, *v*, en un gas depende de la presión, *p*, de la densidad, ρ, y de la masa molar, *M*, demuestra que la expresión $V = A\sqrt{\frac{p}{\rho}}$ es correcta si *A* es una constante sin dimensión.

La ecuación será correcta si la expresión $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$ tiene las dimensiones de una velocidad: $\left[\sqrt{\frac{p}{\rho}}\right] = LT^{-1}$;

$$\left[\sqrt{\frac{F \cdot V}{S \cdot m}}\right] = \left[\sqrt{\frac{MLT^{-2} \cdot L^3}{L^2 \cdot M}}\right] = [\sqrt{T^{-2}\, L^2}] = LT^{-1}$$

La ecuación es correcta.

9. ¿En qué unidades del SI se mide la constante de la gravitación universal si su ecuación dimensional es: $[G] = L^3M^{-1}T^2$?

De acuerdo con la ecuación dimensional de G, esta constante se puede expresar en el SI en las siguientes unidades: $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

10. La energía mecánica de un satélite que gira en torno a la Tierra viene dada por $E = \frac{GM_Tm}{R_0}$, en donde M_T y m son las masas de la Tierra y del satélite y R_0 es el radio de la órbita que describe. Comprueba que la igualdad anterior es correcta utilizando las ecuaciones dimensionales.

Será correcta si $\frac{GM_Tm}{R_0}$ tiene las dimensiones de una energía mecánica:

$[F \cdot e] = ML^2T^{-2}$;

$$\left[G\,\frac{M_T \cdot m}{R_0}\right] = [G] \cdot M^2 \cdot L^{-1} = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M^2 \cdot L^{-1} = ML^2T^{-2}$$

Por tanto, la expresión anterior es correcta.

11. Demuestra que el «trinomio de Bernouilli» es homogéneo. El trinomio es: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + h\rho g = k$; siendo *p* = presión = fuerza/superficie, ρ = masa/volumen, *h* = altura y *g* = aceleración de la gravedad. ¿Qué dimensiones debe tener la constante *k*?

Será homogéneo si todos los términos de la igualdad tienen la misma dimensión:

$$[p] = [\rho v^2] = [h\rho g] = [k]$$

1.º $[p] = \left[\frac{F}{S}\right] = MLT^{-2} \cdot L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

2.º $\left[\frac{1}{2}\rho v^2\right] = ML^{-3} \cdot L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

3.º $[h\rho g] = L \cdot ML^{-3} \cdot LT^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

Los términos del primer miembro son homogéneos. Para que la igualdad sea homogénea la constante k ha de tener la dimensión:

$$[k] = ML^{-1}T^{-2}$$

12. Supongamos que el agua de un río se mueve con una velocidad que es directamente proporcional al desnivel de la corriente e inversamente proporcional a la densidad del agua. ¿Qué dimensiones tiene la constante de proporcionalidad?

Supongamos que la velocidad sea $v = k\,\dfrac{h}{\rho}$, siendo h el desnivel y ρ la densidad. La constante de proporcionalidad $k = \dfrac{\nu\rho}{h}$ tiene de ecuación dimensional:

$$[k] = \frac{[\nu]\cdot[\rho]}{[h]} = \frac{LT^{-1}\cdot ML^{-3}}{L} = ML^{-3}T^{-1}$$

13. Sea la expresión $ax + by = z$. Si z tiene las dimensiones de una velocidad, a es una constante adimensional, x una velocidad e y una aceleración. ¿Qué dimensión debe tener b para que la expresión anterior sea dimensionalmente correcta?

Si es correcta se debe cumplir: $[ax] = [by] = [z]$.

Si $[z] = LT^{-1}$ y $[a] = 1$ se deduce que $[x] = LT^{-1}$

$[y] = LT^{-2}$; por tanto, $[by] = [b]\cdot[y] = LT^{-1}$; $[b]\cdot LT^{-2} = LT^{-1}$

$$[b] = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}} = T$$

14. Una partícula se mueve en un plano de acuerdo con las ecuaciones $x = 2t$; $y = t^2$. Representa gráficamente la ecuación de la trayectoria. ¿De qué curva se trata?

La partícula se mueve en el plano xy. Las distintas posiciones de la partícula a lo largo del tiempo serán:

t	0	1	2	3
x	0	2	4	6
y	0	1	4	9

Al representar estos valores se obtiene la gráfica de la trayectoria. Se trata de una parábola.

15. Se ha medido la longitud de una mesa y se han obtenido los siguientes resultados: 1,81 m; 1,85 m; 1,83 m; 1,86 m y 1,85 m. ¿Qué longitud tiene la mesa? Calcula el error absoluto y el error relativo cometido en la medida más imprecisa.

Tomamos como valor verdadero la media aritmética de las medidas realizadas.

$$l = \frac{1{,}81\text{ m} + 1{,}85\text{ m} + 1{,}83\text{ m} + 1{,}86\text{ m} + 1{,}85\text{ m}}{5} = 1{,}84\text{ m}$$

La medida más imprecisa es 1,81 m. Los errores absoluto y relativo de esta medida son:

$$e_a = 1{,}84\text{ m} - 1{,}81\text{ m} = 0{,}03\text{ m}\ ;\ e_r = \frac{0{,}03\text{ m}}{1{,}84\text{ m}} = 1{,}8\ \%$$

16. Comprueba la homogeneidad de las siguientes ecuaciones:

$$F = \frac{mv^2}{R}\ ;\ e = \frac{V^2}{2\,g}$$

$$[F] = \left[\frac{m\nu^2}{R}\right] \Rightarrow MLT^{-2} = \frac{M\cdot L^2T^{-2}}{L} = MLT^{-2}$$

$$[e] = \left[\frac{\nu^2}{2g}\right] \Rightarrow L = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L$$

17. Supongamos que la frecuencia f con que oscila una gota de un líquido, cuando se la deforma, depende de la tensión superficial σ (en kg s^{-2}) del líquido, del radio r de la gota y de la densidad ρ del líquido. Utilizando el análisis dimensional, calcula la ecuación de la frecuencia de oscilación de la gota.

Supongamos que la ecuación es $f = k\cdot\sigma^\alpha\cdot\rho^\beta\cdot r^\gamma$

Si la ecuación es homogénea se cumple:

$[f] = k\,[\sigma]^\alpha\cdot[\rho]^\beta\cdot[r]^\gamma$; $T^{-1} = [MT^{-2}]^\alpha\cdot[ML^{-3}]^\beta\cdot L^\gamma =$
$= M^\alpha\cdot T^{-2\alpha}\cdot M^\beta\cdot L^{-3\beta}\cdot L^\gamma$

De donde se deduce que $\alpha \div \beta = 0$; $-1 = -2\alpha$;
$\alpha = 1/2$: $\beta = -1/2$; $-3\beta + \gamma = 0$; $\gamma = -3/2$

De acuerdo con estos resultados, la ecuación de la frecuencia de la gota viene dada por:

$$f = k\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}$$

18. Supongamos que un sistema de unidades utiliza el km como unidad de longitud, la tonelada (t) para expresar la masa y la hora (h) para medir el tiempo. ¿A cuántos julios equivale la unidad de trabajo de dicho sistema de unidades?

Para hallar la equivalencia expresamos el trabajo en unidades del sistema hipotético citado y en el SI utilizando su ecuación dimensional:

$[trabajo] = [F\cdot e] = ML^2T^{-2}$. Esta ecuación es válida para cualquier sistema de unidades y nos permite pasar de un sistema a otro. SI: 1 julio = 1kg $\cdot$ 1m^2 $\cdot$ 1 s^{-2}

Una unidad de trabajo (en el nuevo sistema) = 1 tonelada $\cdot$

$$\cdot\ (1\text{ km})^2\cdot(1\text{ hora})^{-2} = 1\,000\text{ kg}\cdot 10^6\text{ m}^2\cdot\frac{1}{(3\,600\text{ s})^2} = 77{,}16\text{ J}$$

Trabaja como un científico

1. El ángulo α de la Figura 1 relaciona la altura con la sombra del obelisco ¿mediante qué expresión matemática?

La función trigonométrica tangente:

$$tag\ \alpha = \frac{l\text{ (longitud – de – la – sombra)}}{h\text{ (altura – del – obelisco)}}$$

2. El ángulo α y el ángulo β (Fig. 2) formado por las verticales de Siena y Alejandría son iguales. ¿Por qué?

Tienen un lado común y los otros dos son paralelos entre sí. Son alternos internos.

3. En el método de Eratóstenes se cometen dos pequeños errores: suponer que las ciudades de Siena y Alejandría se encuentran sobre el mismo meridiano (hay 3o de diferencia en longitud entre ellas), y que los rayos solares son perpendiculares en Siena (esto sería cierto si esta ciudad estuviera exactamente situada en el trópico; la realidad es que se encuentra a 33′ latitud norte del Trópico de Cáncer). ¿Estos

errores son sistemáticos o aleatorios? ¿Influyen mucho en el resultado? Explica de qué manera.

Son sistemáticos. Influyen poco en el resultado.

4. Calcula el radio terrestre utilizando la definición del metro patrón.

El metro patrón se define como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre: la distancia que separa el polo de la línea del Ecuedor. Es decir, la longitud de un meridiano equivale a $4 \cdot 10^7$ m:

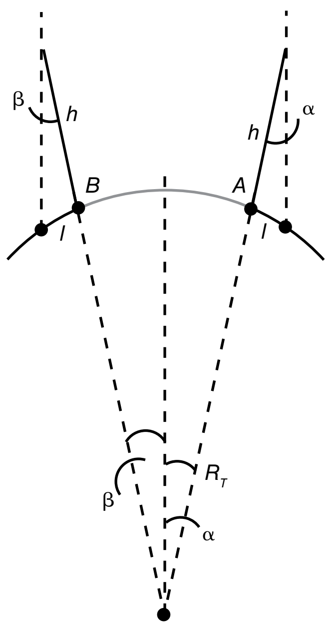
$$2\pi\ R_T = 4 \cdot 10^7 \text{ m};\ R_T = \frac{4 \cdot 10^7}{6{,}28} = 6{,}3694 \ .\ 10^6 \text{ m} = 6\,369{,}4 \text{ km}$$

5. Describe una forma de medición indirecta que te permita calcular la altura de una torre.

Solución abierta.

6. Dos grupos distintos de estudiantes de 2.º de Bachillerato, cuyos centros de estudios se encuentran en ciudades distintas, A y B, y que intercambian información por Internet, se proponen medir la distancia que separa ambas ciudades utilizando las ideas de Eratóstenes.

Para ello miden a las 12 horas del mismo día la sombra que proyecta un palo de un metro de longitud colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Los alumnos de la ciudad A observan que la longitud de la sombra es de 6 cm, mientras que la longitud de la sombra en la ciudad B es de 7 cm. Suponiendo que ambas ciudades se encuentran sobre el mismo meridiano, ayuda a dichos estudiantes a calcular la distancia que separa las ciudades citadas.



Ángulo que forma los rayos solares con la longitud del palo en dichas ciudades.

Ciudad A:

$$tag\ \alpha = \frac{l}{h} = \frac{6 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0{,}06 \Rightarrow \alpha = 3{,}43°$$

Ciudad B:

$$tag\ \beta = \frac{7 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0{,}07 \Rightarrow \beta = 4° \quad ; \quad \alpha + \beta = 7{,}43°$$

La distancia entre las ciudades A y B es la longitud de meridiano que corresponde a un ángulo central $\alpha + \beta$.

Si d es la distancia entre ambas ciudades, se cumple:

$$\frac{d}{\alpha + \beta} = \frac{2\pi R_T}{360°} \Rightarrow d = \frac{6{,}28 \cdot 6\,370 \text{ km} \cdot 7{,}43°}{360°} = 825{,}6 \text{ km}$$

Actividades

1. Enuncia la segunda ley de Kepler. Explica en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y en cuáles es mínima.

Según esta ley, la velocidad areolar del planeta es constante. El área barrida depende del radio vector (distancia del Sol al planeta) y del árco de órbita recorrido: son inversamente proporcionales. En una órbita elíptica el radio vector es mínimo cuando el planeta se encuentra en perihelio. En esa posición el arco recorrido es máximo, para un tiempo determinado. Por tanto, en esa posición la velocidad orbital es máxima. Por la misma razón, la velocidad será mínima cuando el planeta se encuentra en afelio.

$$A_1 = A_2 \; ; \; v_{\text{perihelio}} \cdot d_p = v_{\text{afelio}} \cdot d_a$$

En una órbita elíptica se cumple $d_p < d_a \Rightarrow v_p > v_a$

2. Enuncia la tercera ley de Kepler. Deduce la expresión de la constante de esta ley en el caso de órbitas circulares.

La tercera ley de Kepler dice que en una órbita elíptica el cuadrado del periodo es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de dicha órbita:

$$T^2 = KR^3$$

Según la 3.ª ley de Kepler se cumple

$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

Si la órbita es circular, la velocidad orbital es constante y se cumple que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GM_s m_p}{R^2} = m_p \frac{\nu^2}{R} \Rightarrow \nu^2 = \frac{GM_s}{R}$$

También sabemos que en un movimiento circular se cumple

$$T = \frac{2\pi R}{\nu} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\nu^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}$$

De donde se deduce el valor de la constante *k:*

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = k$$

3. Aplica la tercera ley de Kepler para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, con un radio medio de 1,49 · 10^8 km. Dato: constante G = 6,67 · 10^{−11} N m^2 kg^{−2}.

La 3.ª ley de Kepler permite calcular la masa del Sol. De

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

se obtiene

$$M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, (1{,}49 \,.\, 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot \text{kg}^{-2}\ (365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s})^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

4. La distancia media del Sol a Júpiter es 5,2 veces mayor que la distancia entre el Sol y la Tierra. ¿Cuál es el periodo de la órbita de Júpiter alrededor del Sol?

El periodo de cualquier planeta en función del radio de su órbita viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_o^3}{GM_s}}$$

Esta ecuación la aplicamos a Júpiter y a la Tierra:

$$\Rightarrow \frac{T_J}{T_T} = \sqrt{\frac{R_{oJ}^3}{R_{oT}^3}} = \sqrt{5{,}2^3}$$

$$T_J = \sqrt{5{,}2^3}\, T_T = 11{,}85 \cdot T_T = 11{,}85 \text{ años}$$

5. De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es siempre constante para cualquier planeta. ¿Es constante siempre la velocidad orbital? ¿En qué condiciones lo es? ¿Qué relación existiría entre ambas velocidades en el caso de que la órbita fuera circular?

La velocidad orbital depende de la distancia entre el Sol y el planeta. La velocidad orbital solamente será constante cuando se mantenga constante la distancia entre el Sol y el planeta. Esto ocurre si la órbita es circular.

Si la órbita es circular ambas velocidades están relacionadas:

$$\nu_a = \frac{\pi R_o^2}{T} \; ; \; \nu_0 = \frac{2\pi R_o}{T} \Rightarrow \frac{\nu_a}{\nu_o} = \frac{R_o}{2}$$

6. Calcula la velocidad areolar del planeta Urano, sabiendo que recorre una órbita circular de radio R = 2,87 · 10^{12} m en un tiempo de T = 2,66 · 10^9 s.

$$\nu_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (2{,}87 \,.\, 10^{12}\ \text{m})^2}{2{,}66 \cdot 10^9\ \text{s}} = 9{,}7 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

7. Aplicando las leyes de Kepler, calcula el periodo orbital de Urano si el radio orbital de la Tierra es 1,50 · 10^{11} m y el de Urano 2,87 · 10^{12} m.

$$\frac{T_U^2}{R_{oU}^3} = \frac{T_T^2}{R_{oT}^3} \; ; \; T_U^2 = \frac{T_T^2 \cdot R_{oU}^3}{R_{oT}^3} = \frac{T_T^2 \,.\, (2{,}87 \cdot 10^{12}\ \text{m})^3}{(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}$$

De donde

$$T_U = T_T \sqrt{(19{,}13)^3} = 83{,}68\ T_T$$

$$T_U = 83{,}\ 68 \text{ años} = 2{,}64 \cdot 10^9\ \text{s}$$

8. Calcula la velocidad orbital y la velocidad areolar de la Tierra sabiendo que nuestro planeta gira en torno al Sol siguiendo una órbita circular de radio 1,5 · 10^{11} m.

$$\nu_o = \frac{2\pi R}{T} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}} = 2{,}93 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

$$\nu_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{7{,}06 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}} = 2{,}24 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

9. Indica las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. Luego, explica en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual, y cuál sería su energía potencial.

- Es universal: existe para todos los cuerpos y no depende del medio en que se encuentren.

- La fuerza de interacción es central, de atracción y conservativa: está dirigida hacia el punto donde se encuentra la masa que la origina y solamente depende de la distancia.

Si las masas puntuales son iguales, el punto de equilibrio estaría situado en el punto medio del segmento que las une. Si las masas son distintas y están separadas una distancia *d,* el punto de equilibrio estaría a una distancia *r* de la masa mayor *M* tal que la fuerza de atracción resultante sobre la masa de prueba sea cero. Es decir, se cumple:

$$\frac{GMm'}{r^2} = \frac{GMm'}{(d-r)^2} = \frac{r^2}{(d-r)^2} = \frac{M}{m}$$

donde *r* es la distancia del punto de equilibrio a la masa mayor *M*. La energía potencial asociada al sistema *Mm* de dos partículas viene dada por:

$$-\frac{GMm}{d}$$

donde *d* es la distancia relativa entre ellas.

10. La velocidad orbital de un planeta depende del radio de la órbita que describe en torno al Sol.

Calcula la relación que existe entre las velocidades orbitales de la Tierra y Marte, sabiendo que los radios de las órbitas respectivas son: $r_T = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m; $r_M = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m.

La velocidad orbital se obtiene teniendo presente que la fuerza centrípeta a que está sometido un planeta es originada por la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre dicho planeta.

$$\frac{GMs \cdot m_T}{R^2_{oT}} = \frac{m_T v^2{}_T}{R_{oT}} \Rightarrow V^2_T = \frac{GM_s}{R_{oT}}$$

De la misma forma la velocidad de Marte sería:

$$v^2_M = \frac{GM_s}{R_{oM}}$$

Relación entre las velocidades de ambos planetas:

$$\frac{v^2_M}{v^2_T} = \frac{R_{oT}}{R_{oM}} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{11}}{2{,}28 \cdot 10^{11}} \Rightarrow v_M = 0{,}81\ v_T$$

11. Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km).

$$\frac{GM_T}{R_o} = v_2 = \frac{4\pi^2 R^2_o}{T^2}\ ;\ R^3_o = \frac{GM_T T_2}{4\pi^2}$$

$$R^3_o = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot (2 \cdot 3\,600\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 5{,}25 \cdot 10^{20}\ \text{m}^3$$

$$R_o = \sqrt[3]{524 \cdot 10^{18}} = 8{,}07 \cdot 10^6\ \text{m} = 8\,070\ \text{km}$$

$$h = R_o - R_T = 8\,070\ \text{km} - 6\,400\ \text{km} = 1\,670\ \text{km}$$

12. En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:

a) **La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite, de la Tierra y del radio de la órbita.**

b) **La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.**

a) La velocidad orbital viene dada por:

$$v_2 = \frac{GM_T}{R_o}$$

Obtenida igualando la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite con la fuerza centrípeta del satélite. La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{1}{2} m_s \frac{GM_T}{R_o} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m_s}{R_o}$$

b) Energía potencial gravitatoria asociada al sistema $M_T\ m_s$:

$$E_p = -\frac{GM_T m_s}{R_o}$$

Energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{R_o} + \left(-\frac{GM_T m_s}{R_o}\right) = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{R_o} = \frac{1}{2} E_p$$

13. Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km.)

Si el satélite tiene una órbita estable, se cumple que:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

de donde se deduce que el radio de la órbita vale:

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{GM}{v^2} \\ v = \dfrac{2\pi R}{T} \end{array}\right\}\quad R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (2 \cdot 3\,600\ \text{s})^2}{4 \cdot 9{,}85}} =$$

$= 7{,}9 \cdot 10^6$ m $= 7\,900$ km

Luego la altura será $h = 7\,900$ km $- 6\,400$ km $= 1\,500$ km.

14. Se coloca un satélite meteorológico de 1 000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina:

a) **La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.**

b) **El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.**

Datos: Radio medio de la Tierra, 6 370 km; $g_0 = 9{,}80$ m/s^2.

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra origina la fuerza centrípeta necesaria para que el satélite describa una órbita circular:

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

De donde se obtiene la velocidad lineal:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 7\,721{,}3\ \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta viene determinada por:

$$a = \frac{v^2}{R + h} = \frac{5{,}93 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2}{6{,}67 \cdot 10^6 \text{ m}} = 8{,}94 \text{ m/s}^2$$

15. La nave espacial *Discovery*, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km/s.

***a)* ¿A qué altura se encontraba?**

***b)* ¿Cuál era su periodo? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 h los astronautas que viajaban en el interior de la nave?**

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.

a) La velocidad de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}; \qquad R + h = \frac{GM}{v^2}$$

$$h = \frac{GM}{v^2} - R =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(7{,}62 \cdot 10^3)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2} - 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} =$$

$= 5{,}0 \cdot 10^5$ m

b) El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R + h)}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}62 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 5{,}66 \cdot 10^3 \text{ s} = 1{,}57 \text{ h}$$

En un día dan 15 vueltas a la Tierra:

$$n = \frac{24}{1{,}57} \simeq 15$$

16. Resuelve las siguientes cuestiones:

***a)* Explica qué se entiende por velocidad de escape y deduce razonadamente su expresión matemática.**

***b)* Razona qué energía habría que comunicar a un objeto de masa *M,* situado a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra, para que se alejase indefinidamente de ella.**

***c)* Si la masa de la Tierra se cuadruplica, manteniendo el radio, ¿cómo se modificaría la velocidad de escape?**

a) Velocidad de escape es la velocidad mínima con que se debe lanzar un cuerpo desde la superficie de la Tierra (o de cualquier planeta) para que «escape» de la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el cuerpo.

Supongamos que queremos lanzar al espacio un cohete desde la superficie terrestre. Se debe cumplir el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2} m\nu_e^2 + \left(-\frac{GM_T m}{R_T}\right) = 0 \Rightarrow \nu_e = \sqrt{\frac{2\,GM_T}{R_T}}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m\nu_e^2 + \left(-\frac{GM_T m}{R_T + h}\right) = 0 \Rightarrow \nu_e = \sqrt{\frac{2\,GM_T}{R_T + h}}$$

c) De acuerdo con la fórmula deducida en el apartado *a),* la velocidad de escape depende de la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra se cuadruplica, la velocidad de escape se duplica.

17. Considera dos satélites de masas iguales en órbitas circulares alrededor de la Tierra. Uno de ellos gira en una órbita de radio *r* y el otro en una órbita *2r.* Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

***a)* ¿Cuál de los dos se desplaza con mayor velocidad?**

***b)* ¿Cuál de los dos tiene mayor energía potencial?**

***c)* ¿Cuál de ellos tiene mayor energía mecánica?**

a) La velocidad orbital depende del radio de la órbita, como se deduce igualando la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre los satélites con la fuerza centrípeta que actúa sobre éstos en su movimiento circular:

$$\frac{GM_T m}{R_o^2} = m\,\frac{\nu_0^2}{R_o} \Rightarrow \nu_o = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}}$$

Aplicamos esta expresión a los dos satélites:

Satélite 1 y 2:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{o1}}}\ ;\ \nu_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{2R_{o1}}}$$

De donde se deduce:

$$\nu_1 = \sqrt{2}\,\nu_2$$

b) La energía potencial también depende del radio de la órbita:

$$E_p = -\frac{GM_T m}{R_o}$$

Energía potencial del primer satélite:

$$E_{p1} = -\frac{GM_T m}{R_o}$$

Energía potencial del segundo satélite:

$$E_{p2} = -\frac{GM_T m}{2R_o}$$

De donde se deduce la relación: $E_{p1} = 2\,E_{p2}$

c) Aplicando las relaciones anteriores obtenemos la relación de la energía mecánica:

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m\nu_1^2 + E_{p1} = \frac{1}{2} m(\sqrt{2}\,\nu_2)^2 + 2E_{p2} = 2\left(\frac{1}{2} m\nu_1^2 + E_{p2}\right) = E_{m2}$$

18. En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial, 12 J. En un instante posterior, t_2, la energía cinética de la partícula es 18 J.

***a)* Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante t_2?**

***b)* Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?**

a) Si solamente actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica permanece constante:

$$E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow 42 \text{ J} = 18 \text{ J} + E_p \Rightarrow E_p = 24 \text{ J}$$

b) Si la energía potencial en t_2 fuese 6 J no se cumple el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{mo} \neq E_{mf}\ ;\ 42\ \text{J} > 18\ \text{J} + 6\ \text{J}$$

La disminución de la energía mecánica se ha empleado en vencer las fuerzas no conservativas.

19. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

***a)* ¿A qué altura se encuentra el satélite?**

***b)* ¿Se trata de un satélite estacionario?**

a) La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, ya que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es conservativa.

Así, la velocidad de escape desde la superficie terrestre se obtiene igualando la energía mecánica inicial en la superficie a la final, en el infinito.

$$\frac{1}{2}\, m v_T^2 + \left(-G\, \frac{M_T m}{R_T}\right) = 0$$

Es decir:

$$v_T = \sqrt{\frac{2\,G M_T}{R_T}}$$

La velocidad de escape desde la órbita a una altura h sobre la superficie terrestre es análogamente:

$$v_h = \sqrt{\frac{2\,G M_T}{R_T + h}}$$

Como la relación entre las velocidades de escape es $v_h = 1/2 v_T$, resulta que:

$$v_h = \sqrt{\frac{2\,G M_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}\, v_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G M_T}{R_T}}$$

de donde podemos hallar la altura a la que está el satélite:

$$\frac{2\,G M_T}{R_T + h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\,G M_T}{R_T} \;\Rightarrow\; h = 3\,R_T$$

b) No, porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.

20. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa la mitad. Calcula la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta en función de sus correspondientes valores terrestres.

La intensidad del campo gravitatorio con la distancia se obtiene aplicando la Ley de la Dinámica.

El caso general para un cuerpo esférico uniforme de masa M y radio R la intensidad de campo gravitatorio en su superficie es:

$$g_P = G\, \frac{M_p}{R_P^2}$$

Según los datos del problema, $R_P = \frac{1}{3}\, R_T$ y $M_P = \frac{1}{2}\, M_T$, así que sustituyendo resulta:

$$g_P = G\, \frac{M_P}{R_P^2} = G\, \frac{\frac{1}{2}\, M_T}{\left(\frac{1}{3}\, R_T\right)^2} = \frac{9}{2}\, G\, \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{9}{2}\, g_0$$

La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, de donde se obtiene:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\,G M_P}{R_P}}$$

Sustituyendo la masa del planeta y su radio en función de los de la Tierra, la velocidad de escape es:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\,G\,\frac{1}{2}\, M_T}{\frac{1}{3}\, R_T}} = \sqrt{\frac{3\,G M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\;\, v_T$$

21. Dejamos caer un objeto desde la terraza de un edificio. Se trata de sistema dinámico.

***a)* Explica por qué es dinámico.**

***b)* ¿Es estable o inestable? Razona la respuesta.**

***c)* ¿Qué ley rige el proceso?**

***d)* Si el objeto es más pesado y lo dejamos caer desde una altura mayor ¿se modifica el estado final de equilibrio?**

a) Se trata de un sistema dinámico porque su estado evoluciona con el tiempo. El valor de las variables que definen el sistema (posición, velocidad, etc.) depende del tiempo.

b) Es un sistema dinámico estable porque pequeños cambios en las condiciones iniciales no producen grandes cambios en el proceso: no influyen significativamente en el estado final del sistema. Se puede predecir la evolución del sistema porque se realiza con una ley bien definida.

c) La ley de la dinámica de Newton.

d) No. El estado final será el mismo.

22. Cita ejemplos de sistemas dinámicos que evolucionan de forma caótica.

La velocidad del agua en un río. La trayectoria del humo que sale de una chimenea. Los atascos de coches en una carretera.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. La hipótesis de la materia oscura, ¿confirma, contradice o no tiene nada que ver con la ley de la gravitación universal?

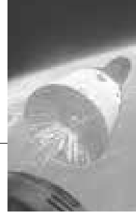
La hipótesis de la materia oscura se concibe para confirmar la ley de la gravitación universal.

2. ¿Es adecuado el calificativo de universal con que se conoce la ley de gravitación de Newton?

Sí. Por ahora la ley de Newton explica el movimiento de todos los cuerpos celestes del Universo.

3. ¿En qué consiste la materia oscura?

Es materia cuya existencia no se detecta porque no emite radiación electromagnética suficiente.



4. ¿Qué problema resuelve la existencia de la materia oscura?

La rotación de las galaxias.

5. Realiza un informe, junto con cuatro compañeros de clase, sobre el proyecto español «Método de multimensajeros para la detección de materia oscura». Utiliza Internet como fuente de información.

Actividad abierta.

6. Realiza un estudio comparativo entre materia oscura y antimateria.

Actividad abierta.

Problemas resueltos

Leyes de Kepler. Ley de gravitación universal

1. Si la Tierra describe una órbita de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m de radio, calcula la velocidad areolar (área barrida en un segundo) en m²/s del radio vector trazado desde el Sol a la Tierra.

La velocidad areolar, por definición, se obtiene de:

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{365 \cdot 86\,400\ \text{s}} = 2{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

2. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9 400 y 23 000 km, respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.

De la Tercera Ley de Kepler despejamos el periodo T_1:

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(7{,}7\ \text{h})^2 \cdot (23\,000\ \text{km})^3}{(9\,400\ \text{km})^3}} = 29{,}4\ \text{h}$$

3. La masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?

De la Ley de Newton despejamos la distancia:

$$r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}9 \cdot 10^{20}\ \text{N}} = 3{,}9 \cdot 10^8\ \text{m}$$

4. Si la Ley de la Gravitación variara *a*) $\frac{1}{r}$, *b*) $\frac{1}{r^3}$ en lugar de $\frac{1}{r^2}$, ¿cómo afectaría esto al peso de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra?

El peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra vale:

$$P = mg, \quad \text{siendo} \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

a) Si la Ley de la Gravitación dependiera de $\frac{1}{r}$, el valor de la gravedad y el peso serían:

$$g' = G\frac{M}{R}; \qquad P' = mg' = m\frac{GM}{R} = Rmg$$

Sería, por tanto, R veces mayor: $P' = RP$.

b) En este caso la gravedad y el peso serían:

$$g'' = G\frac{M}{R^3}; \qquad P'' = mg'' = \frac{1}{R}mg = \frac{P}{R}$$

El peso sería R veces menor.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Expresa la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa de este, de su radio y de la constante de gravitación universal G.

b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,81 m^{s-2}, calcula la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

a) De acuerdo con la ley de la gravitación universal, podemos expresar la aceleración de la gravedad en función de la masa y del radio de la Tierra:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}; \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

b) La gravedad en la superficie terrestre vale:

$$g_o = \frac{GM}{R_T^2} = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

y su valor a la altura $h = RT$ es:

$$g_h = \frac{GM}{(R_T + h)^2} = \frac{GM}{(R_T + R_T)^2} = \frac{GM}{4R_T^2} = \frac{1}{4}g_o = 2{,}45\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Fuerzas conservativas. Energía potencial gravitatoria

6. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, la altura máxima que alcanza. ¿Qué altura máxima alcanzará en el caso de que haya rozamiento y se pierda para vencerlo el 20 % de la energía de lanzamiento?

La energía mecánica en el suelo debe ser igual a la energía mecánica en el punto más alto.

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = mg\text{h} + 0$$

de donde se deduce que:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2\,500\ \text{m}^2/\text{s}^2}{19{,}6\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 128\ \text{m}$$

En el caso de que se pierda energía por causa del rozamiento:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = \frac{v^2 - 0{,}2v^2}{2g} = \frac{2\,500\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 0{,}2 \cdot 2\,500\ \text{m}^2}{19{,}6\ \text{m/s}^2} = 102\ \text{m}$$

7. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4 000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (Dato: R_T = 6 400 km.)

Para hallar la altura máxima alcanzada aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, puesto que el cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad, que es una fuerza conservativa.

$$-G\frac{Mm}{R_T}+\frac{1}{2}mv^2=-G\frac{Mm}{R_T+h}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{R_T}-\frac{GMm}{R_T+h}$$

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{GM}{R_T}\cdot\frac{h}{R_T+h}$$

Como no nos han dado el dato de la masa de la Tierra, expresamos la igualdad anterior en función de la gravedad, que suponemos conocida:

$$g=\frac{GM}{R_T^2}$$

Luego:

$$\frac{1}{2}v^2=R_Tg\frac{h}{R_T+h}$$

Despejando h tenemos:

$$h=\frac{0{,}5\,v^2R_T}{R_Tg-0{,}5\,v^2}=$$

$$=\frac{0{,}5\cdot 16\cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2\cdot 6{,}4\cdot 10^6\ \text{m}}{6{,}4\cdot 10^6\ \text{m}\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2-0{,}5\cdot 16\cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2}=9{,}4\cdot 10^5\ \text{m}$$

8. Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio r_0 = 2 R_T hasta otra de radio r_1 = 3 R_T. Datos: R_T = 6,4 · 10^6 m; g_0 = 9,8 m/s^2.

El trabajo necesario viene dado por el incremento de la energía mecánica del satélite al pasar de una órbita a la otra.

– Energía mecánica correspondiente a la órbita inicial:

$$E_1=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{2R}=-\frac{R}{4}mg$$

– Energía mecánica correspondiente a la órbita final:

$$E_2=-\frac{GMm}{6R}=-\frac{R}{6}mg$$

Trabajo realizado:

$$E_2-E_1=Rmg\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}Rmg=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 6{,}4\cdot 10^6\ \text{m}\cdot 500\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2=2{,}6\cdot 10^9\ \text{J}$$

9. Un cierto planeta esférico tiene una masa M = 1,25 · 1023 kg y un radio r = 1,5 · 106 m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de r/2. Despreciando el rozamiento, determina:

***a)* La velocidad con que fue lanzado el objeto.**

***b)* La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.**

Dato: constate de gravitación universal G = 6,67 · 10^{-11} N m^{2}kg^{-2}.

a) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{mo}=E_{mf}\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2-\frac{GM_pm}{R_p}=-\frac{GM_pm}{R_p+h}$$

De donde $v^2=\dfrac{2GM_p}{3R_p}$, para $h=\dfrac{R_p}{2}$

$$v^2=\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\cdot 1{,}25\cdot 10^{23}\ \text{kg}}{3\cdot 1{,}5\cdot 10^6\ \text{m}}=3{,}7\cdot 10^6\ \text{m}^2$$

$$v=\sqrt{3{,}7\cdot 10^6}\ \text{m}=1{,}925\cdot 10^3\ \text{m}$$

b) $$\frac{4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\cdot 1{,}25\cdot 10^{23}\ \text{kg}}{9\cdot 1{,}5^2\cdot 10^{12}\ \text{m}^2}=1{,}65\ \text{m/s}^2$$

10. Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determina:

***a)* La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.**

***b)* Los valores de ambas energías potencial y cinética.**

La energía potencial viene dada por: $E_p=-\dfrac{GMm}{R}$

Al ser circular la órbita se cumple que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o}.$$

De donde

$$E_p=-2\,E_c$$

$$Ec+Ep=-10^{-10}J\qquad E_c-2E_c=-10^{-10}\,J$$

De donde

$$E_c=10^{-10}J\ ;\ E_p=-2E_c=-2\cdot 10^{-10}\,J$$

Periodo de revolución y velocidad orbital

11. El satélite mayor de Saturno, Titán, describe una órbita de radio medio r = 1,222 · 10^6 km en un periodo de 15,945 días. Determina la masa del planeta Saturno y su densidad. (Radio de Saturno: 58 545 km.)

Igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\ \Rightarrow\ v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

siendo M la masa de Saturno, cuyo valor obtenemos a partir del periodo:

$$T=\frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$$

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}=\frac{4\cdot 9{,}86\cdot(1{,}222\cdot 10^9\ \text{m})^3}{(15{,}945\cdot 86\,400\ \text{s})^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}}=$$

$$=5{,}67\cdot 10^{26}\ \text{kg}$$

Densidad del planeta:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (5{,}85 \cdot 10^7\ \text{m})^3} = 677\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$$

12. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

Es cero en ambos casos.

a) Si la órbita es circular, la fuerza conservativa es perpendicular al desplazamiento en todo momento. Por tanto, el trabajo realizado por esta fuerza es cero.

b) Si la órbita es elíptica, el trabajo a lo largo de una órbita completa es cero, porque en un campo conservativo el trabajo a lo largo de una línea cerrada es nulo.

13. Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en el mismo plano, de radios $r_1 = 8\,000$ km y $r_2 = 9\,034$ km, respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado.

***a)* ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?**

***b)* ¿Qué relación existe entre los periodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado 6 vueltas, desde el instante inicial?**

a) Sean m_1, r_1 y v_1 la masa, el radio orbital y la velocidad del satélite S_1, y m_2, r_2 y v_2 las mismas magnitudes del satélite S_2.

De: $$G\,\frac{M_T m_1}{r_1^2} = m_1\,\frac{v_1^2}{r_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r_1}}$$

Lo mismo para el satélite S_2:

$$v_2 = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r_2}}$$

Relacionando estas velocidades, tenemos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 1{,}063; \qquad v_1 = 1{,}063\ v_2$$

b) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} = 1{,}2; \qquad T_2 = 1{,}2\ T_1$$

En el mismo tiempo que el satélite S_1 emplea en realizar $n_1 = 6$ vueltas, el satélite S_2 habrá realizado $n_2 = 5$ vueltas, como se deduce de:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{t}{n_1} \\ T_2 &= \frac{t}{n_2} \end{aligned}\right\} \quad n_2 = \frac{n_1 T_1}{T_2} = \frac{6\,T_1}{1{,}2\,T_2} = 5$$

14. El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:

***a)* La razón entre los radios de las respectivas órbitas.**

***b)* La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.**

a) De la Tercera Ley de Kepler se deduce la relación entre los radios de las dos órbitas:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2; \qquad R_1 = 5{,}2\,R_2$$

b) Para hallar la aceleración centrípeta de los dos planetas, igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

De acuerdo con esta igualdad, la aceleración centrípeta de cada planeta es:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2}$$

cuya relación viene dada por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}2^2\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04$$

$$a_1 = 0{,}04\,a_2$$

15. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averigua:

***a)* La velocidad del satélite.**

***b)* Su energía mecánica.**

Dato: radio medio de la Tierra, $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) El valor de la gravedad en función de la altura viene dado por:

$$g_h = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

En nuestro caso: $$\frac{1}{2}\,g_0 = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

de donde: $$R + h = \sqrt{2} \cdot R = 9{,}0 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Por otro lado, si la órbita del satélite es circular, se debe cumplir:

$$G\,\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\,\frac{v^2}{(R+h)}$$

de donde se obtiene la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{R^2 g}{R+h}} = \sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{9{,}0 \cdot 10^6\ \text{m}}} =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

b) La energía mecánica es igual a la mitad de la energía potencial:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{GMm}{(R+h)} = -\frac{1}{2}\,mg\,\frac{R^2}{R+h} =$$

$$= -0{,}5 \cdot 200\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{6{,}37^2 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2}{9{,}0 \cdot 10^6\ \text{m}} = -4{,}4 \cdot 10^9\ \text{J}$$

16. Un cuerpo esférico de densidad uniforme con diámetro $6{,}0 \cdot 10^5$ km presenta una aceleración de la gravedad sobre su superficie de 125 m s^{-2}. Determina:

***a)* La masa de dicho cuerpo.**

***b)* Si un objeto describe una órbita circular concéntrica con el cuerpo esférico y un periodo de 12 h, ¿cuál será el radio de dicha órbita?**

Dato: constante de gravitación universal G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) El radio del cuerpo será $R = 1/2\ d = 3,0 \cdot 10^8$ m

De la expresión $g = \frac{GM}{R^2}$ despejamos la masa del cuerpo:

$$m = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{125\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 9{,}0 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}} = 1{,}7 \cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) Al describir la órbita circular el objeto está sometido a una fuerza centrípeta originada por la fuerza gravitatoria:

$$\frac{GMm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o} \qquad v^2 = \frac{GM}{R_o} = \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2}$$

$$R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{29}\ \text{kg} \cdot (12 \cdot 3\,600)^2\ \text{s}^2}{4 \cdot 3{,}14^2}$$

$$R_o = 8{,}1 \cdot 10^8\ \text{m}$$

17. Un planeta de igual masa que la Tierra describe una órbita circular de radio *r* de un año terrestre de duración alrededor de una estrella de masa *M* tres veces superior a la del Sol.

***a)* Obtén la relación entre: el radio *r* de la órbita del planeta, su periodo de revolución *T*, la constante de gravitación universal *G* y la masa *M* de la estrella alrededor de la cual orbita.**

***b)* Calcula el cociente entre los radios de las órbitas de este planeta y de la Tierra.**

Sea *M* la masa de la estrella y *m* la masa del planeta

a) Igualando la fuerza centrípeta en la órbita circular con la fuerza gravitatoria tenemos:

$$G\,\frac{Mm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o} \Rightarrow V^2 = \frac{Gm}{R_o^2} = \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2}\text{; De donde } R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

Esta relación es la expresión matemática de la 3.ª ley de Kepler para órbitas circulares.

b) La 3.ª ley de Kepler también es válida para la Tierra:

Planeta : $R^3 = G\,\frac{3M_s \cdot T_p^2}{4\pi^2}$; Tierra : $R_o^3 = G\,\frac{M_s \cdot T_T^2}{4\pi^2}$ siendo $T_p = T_T$

De donde se obtiene:

$$\frac{R^3}{R_o^3} = 3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{3}\,R_o$$

18. Un planeta esférico tiene una densidad uniforme ρ = 1,33 g cm^{-3} y un radio de 71 500 km. Determina:

***a)* El valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.**

***b)* La velocidad de un satélite que orbita alrededor del planeta en una órbita circular con un periodo de 73 h.**

Dato: constante de gravitación universal *G* = 6,67 · 10^{-11} N m2 kg^{-2}.

a) La aceleración de la gravedad viene dada por:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = G\,\frac{V\rho}{R^2} = G\,\frac{4/3 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR = 26{,}57\ \text{m/s}^2$$

b) De la igualdad $G\,\frac{Mm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o}$ y de $V = \frac{2\pi R_o}{T}$ obtenemos la expresión matemática de la 3.ª ley de Kepler para órbitas circulares:

$$R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} = \frac{g_p \cdot R_p^2 \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_o = \sqrt[3]{\frac{26{,}57\ \text{m/s}^2 \cdot (715 \cdot 10^5)^2\ \text{m}^2 \cdot (73 \cdot 3\,600)^2\text{s}^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 6{,}19 \cdot 10^8\ \text{m}$$

$$v = \frac{2\pi R_o}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}19 \cdot 10^8\ \text{m}}{73 \cdot 3\,600\ \text{s}} = 1{,}48 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

19. Una nave espacial de 800 kg de masa realiza una órbita circular de 6 000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es E_m = –3,27 · 108 J, determina:

***a)* La masa del planeta.**

***b)* La velocidad angular de la nave en su órbita.**

Dato: constante *G* = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) Al ser la órbita circular se cumple $E_p = -\frac{GMm}{R} = 2E_m$

Por tanto,

$$M = \frac{2E_m R}{-Gm} = \frac{2 \cdot (-3{,}27 \cdot 10^8\ \text{J}) \cdot 6 \cdot 10^6\ \text{m}}{-6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 800\ \text{kg}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$$

b) La velocidad se puede calcular a partir del dato E_m, teniendo en cuenta que se cumple:

$$E_p = 2E_m = -E_c \Rightarrow E_c = -2E_m = -2(-3{,}27 \cdot 10^8\ \text{J}) = 6{,}54 \cdot 10^8\ \text{J}\ ;$$

De $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ tenemos

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}54 \cdot 10^8\ J}{800\ \text{kg}}} = 1\,278{,}67\ \text{m/s}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1\,278{,}67\ \text{m/s}}{6 \cdot 10^6\ \text{m/rad}} = 2{,}13 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

Velocidad de escape. Cambio de órbita

20. La nave espacial *Apolo VIII* estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie.

Calcula:

a) **El periodo de movimiento.**

b) **Las velocidades lineal y angular de la nave.**

c) **La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.**

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, $R_L = 1\,740$ km.

a) y *b)* La velocidad lineal de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)\ \text{m}}} = 1\,630\ \text{m/s}$$

La velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1{,}627 \cdot 10^3\ \text{m/s}}{1{,}853 \cdot 10^3\ \text{m}} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s}$$

El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R + h)}{v} = \frac{2\pi \cdot (1\,740 \cdot 10^3 + 133 \cdot 10^3)\ \text{m}}{1\,630\ \text{m/s}} = 7\,219\ \text{s}$$

c) La expresión de la velocidad de escape a la altura a la que se encuentra el *Apolo VIII* se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}853 \cdot 10^6}} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

21. Dos planetas, A y B, tienen el mismo radio. La aceleración gravitatoria en la superficie del planeta A es tres veces superior a la aceleración gravitatoria en la superficie del planeta B.

Calcula:

a) **La relación entre las densidades de los dos planetas.**

b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta B si se sabe que la velocidad de escape desde la superficie del planeta A es de 2 km/s.**

a) Partimos de la relación gravitatoria que indica el enunciado

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{GM_A/R_A^2}{GM_B/R_B^2} = \frac{M_A}{M_B} = 3$$

ya que $R_A = R_B$.

De la igualdad de los radios se deduce que los planetas tienen el mismo volumen:

$$V_A = V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{V_A\rho_A}{V_B\rho_B} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = 3$$

b) La energía mecánica en el punto de lanzamiento es igual a la energía mecánica en el infinito.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

de donde se deduce la velocidad de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

para cualquier planeta.

Para el planeta A:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{v_{eA}}{v_{eB}}\sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = \sqrt{3}$$

$$v_{eB} = v_{eA}\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\,000\sqrt{\frac{1}{3}} = 1\,155\ \text{m/s}$$

Para el planeta B:

$$v_{eB} = \sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}$$

22. El planeta A tiene tres veces más masa que el planeta B y cuatro veces su radio. Obtén:

a) **La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.**

b) **La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.**

a) $\dfrac{v_{eA}}{v_{eB}} = \sqrt{\dfrac{M_AR_B}{M_BR_A}} = \sqrt{\dfrac{3M_BR_B}{M_B4R_B}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

b) De $g_A = \dfrac{GM_A}{R_A^2}$ y de $g_B = \dfrac{GM_B}{R_B^2}$ obtenemos la relación:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_AR_B^2}{M_BR_A^2} = \frac{3M_BR_B^2}{M_B \cdot 16R_B^2} = \frac{3}{16}$$

23. Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio 5/2 r_T alrededor de la Tierra. Determina:

a) **El trabajo que hay que realizar para llevar el satélite desde la órbita de radio 5/2 r_T a otra órbita circular de radio 5 r_T y mantenerlo en dicha órbita.**

b) **El periodo de rotación del satélite en la órbita de radio 5 r_T.**

Datos: constante de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; masa de la Tierra, MT = 5,98 · 10²⁴ kg; radio de la Tierra, $r_T = 6{,}37 \cdot 106$ m.

a) El trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica entre ambas órbitas.

$$W_{A\text{–}B} = E_{mB} - E_{mA} = -\frac{GMm}{2R_B} + \frac{GMm}{2R_A} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) = \frac{GMm}{10R_T} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 400\ \text{kg}}{10 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\text{m}R_A} = 2{,}5 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Al ser la órbita circular se cumple:

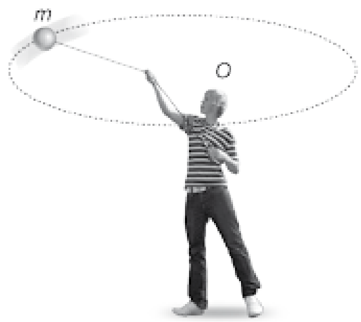
$$F_g = F_c \Rightarrow -\frac{GMm}{R_o^2} = \frac{mv^2}{R_o}\ ;\ \frac{(2\pi R_o)^2}{T^2} = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2R_o^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} =$$

$= 5{,}68 \cdot 10^4\ \text{s} = 16\ \text{h}$

Actividades

1. La masa *m* de la figura siguiente describe una trayectoria circular situada en un plano horizontal. ¿Cuántas fuerzas actúan sobre *m*? ¿Alguna de estas fuerzas es central? ¿Por qué? Calcula el momento de torsión de las fuerzas indicadas respecto de la mano *O* de la persona.



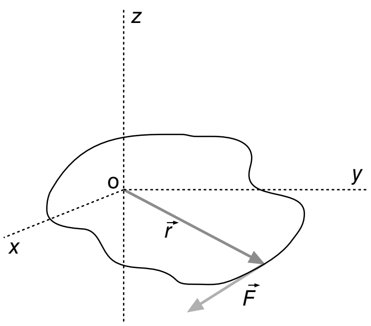
Sobre la masa *m* actúan dos fuerzas: su peso y la fuerza centrípeta que transmite la cuerda tensada. Esta última fuerza es central porque tiene la dirección de la cuerda que pasa por el punto *O*, cualquiera que sea la posición de la masa mientras gira.

El momento de torsión, respecto de *O*, de la fuerza centrípeta es nulo porque $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos.

El momento de torsión del peso respecto de *O* sería:

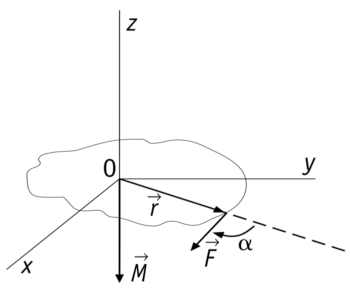
$$M = m g r$$

2. Dibuja el vector momento de la fuerza representada en la figura siguiente. ¿El giro que produce *F* es positivo o negativo?



Si hacemos girar el vector $\vec{r}$ para que coincida con el vector $\vec{F}$ siguiendo el camino indicado por el ángulo alfa, el vector momento tiene la dirección del eje *0z* con sentido negativo.

Se puede representar por $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -|\vec{M}|\ \vec{u}_z$



3. ¿Cuánto vale el momento de torsión de una fuerza si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos? ¿Cómo deben ser $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para que el momento de torsión sea máximo?

El momento de torsión de una fuerza respecto de un punto 0 viene definido por $|\vec{M}| = |\vec{F}| \times |\vec{R}|$ sen α siendo $\vec{r}$ el vector que une el punto 0 con el punto de aplicación de la fuerza y α es el ángulo que forman $\vec{F}$ y $\vec{r}$.

Si los vectores anteriores son paralelos sen $\alpha = 0$ y el momento de torsión también sería nulo.

El momento de torsión será máximo cuando los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ sean perpendiculares.

4. Una partícula se mueve en el eje *OX* por la acción de una fuerza constante que se aleja del origen de coordenadas. ¿Cómo varía con el tiempo el momento angular de la partícula con respecto a dicho punto?

El momento angular de la partícula viene definido por la expresión $L = x \cdot m \cdot v \cdot$ sen α.

L, x, v son los módulos de los vectores: momento angular, vector de posición y vector velocidad, respectivamente; *m* es la masa de la partícula y α representa el ángulo formado por *x* y *v*. En este caso $\alpha = 0$. Aunque *x* y *v* varían con el tiempo, sen α es constante y vale 0. Por tanto, el momento angular es cero mientras se mantenga el movimiento rectilíneo de la partícula.

En general, si una partícula se mueve en línea recta su momento angular es nulo respecto de todos los puntos de su trayectoria, porque $\vec{v}$ y $\vec{r}$ tienen la misma dirección.

5. Una partícula con velocidad constante tiene momento angular nulo respecto de un punto. ¿Qué se deduce de esto?

Se deduce que el movimiento es rectilíneo, y que el punto citado forma parte de la trayectoria.

6. Un automóvil de 1 500 kg se mueve en una pista circular de 50 m de radio con una velocidad de 145 km/h. Calcula el momento angular del automóvil respecto del centro de la pista.

En este caso $\alpha = 90°$

$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\ \alpha = 1500\ \text{kg} \cdot 40{,}28\ \text{m/s} \cdot 50\ \text{m} \cdot 1 =$
$= 3{,}0 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Es un vector de dirección perpendicular a la pista.

7. Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcula el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

En primer lugar calculamos el radio de la órbita:

$R_o = R_T + h = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}655 \cdot 10^6\ \text{m} = 7{,}025 \cdot 10^6\ \text{m}$

Para calcular la velocidad del satélite tenemos en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre este es originada por la atracción gravitatoria que sobre él ejerce la Tierra. Es decir, se cumple:

$$\frac{GMm}{R_0^2} = m\frac{v^2}{R_0} \text{ de donde } v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}025 \cdot 10^{6}}} = 7{,}53 \cdot 10^{3} \text{ m/s}$$

En la órbita circular la velocidad y el radio son perpendiculares. Por tanto, sen $\alpha = 1$

El módulo del momento angular del satélite será;

$L = R_o \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha = 7{,}025 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 100 \text{ kg} \cdot 7{,}53 \cdot$
$\cdot\, 10^3 \text{ m/s} = 5{,}3 \cdot 10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

8. La masa de la Luna es 7,35 · 10^{22} kg y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna 3,84 · 10^8 m. Calcula el momento angular de la Luna respecto a la Tierra. Dato: la Luna tarda 27,32 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

Momento angular de la Luna respecto de la Tierra:

$$L = m r \omega = m r \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \frac{m r^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16} \text{ m}^2}{27{,}32 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/día}} = 2{,}88 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Observación: se ha despreciado el momento angular de rotación de la Luna sobre sí misma.

9. Define los conceptos de momento lineal y momento angular referidos a un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad *v*. ¿Qué relación matemática les une? Razona cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

***a)* El momento angular es nulo si el momento lineal también lo es.**

***b)* El momento lineal es nulo siempre que lo sea el momento angular.**

Momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$; Momento angular $\vec{l} = \vec{r} x \vec{p} = \vec{r} x m\vec{v}$;
$|l| = r \cdot mv \cdot \text{sen}\alpha$

a) Verdadero. El momento angular depende de tres factores: el vector de posición, el momento lineal del cuerpo y el ángulo que forma el vector de posición con el vector velocidad. El momento angular será nulo si uno de esos factores es nulo.

b) Falso. De la expresión $l = r \cdot p \cdot \text{sen}\,\alpha$ se deduce que el momento angular puede ser nulo sin que lo sea (necesariamente) el momento lineal.

10. Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella, cuando pasa por el periastro *P*, punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro *A*, punto más alejado, explica y justifica las siguientes afirmaciones:

***a)* Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente.**

***b)* Su energía mecánica es igual en ambos puntos.**

a) Tanto en el periastro como en el apoastro el momento angular es $L = m v r$, donde m es la masa del planeta, v su velocidad y r la distancia al punto respecto del que se calcula el momento angular.

Se cumple el Principio de Conservación del Momento Angular en el sistema planeta-estrella, así que la consecuencia es que en el periastro la velocidad angular es mayor que en el apoastro.

b) Al tratarse la atracción gravitatoria de una fuerza conservativa, la energía mecánica del sistema se mantiene constante en toda la trayectoria.

11. Un planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En perihelio dista del Sol 4,4 · 10^{12} m y en afelio se encuentra a 7,4 · 10^{12} m. Calcula la excentricidad de la órbita.

Semieje mayor: $a = \dfrac{4{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m} + 7{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2} = 5{,}9 \cdot 10^{12}$ m

Distancia focal: $c = 5{,}9 \cdot 10^{12} \text{ m} - 4{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{12}$ m

Excentricidad de la órbita: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{12} \text{ m}}{5{,}9 \cdot 10^{12} \text{ m}} = 0{,}25$

12. ¿Cómo puedes demostrar que un planeta en una órbita circular se desplaza con un movimiento circular uniforme?

Comprobando que la velocidad orbital es constante. Si la órbita es circular se cumple que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m \frac{v^2}{R_o} = \frac{GM}{R_o^2} \text{ de donde } v = \sqrt{\frac{G M_s}{R_o}} = cte$$

La velocidad depende de tres magnitudes constantes: La constante de gravitación, la masa del Sol y el radio de la órbita.

También se puede demostrar aplicando la 2.ª ley de Kepler.

13. ¿Hay algún instante en que un planeta con órbita elíptica esté exento de aceleración?

Cuando se encuentra en perihelio y en afelio.

14. Supón que repentinamente se duplica la atracción del Sol sobre la Tierra. ¿Qué puedes decir en este caso sobre la velocidad orbital de la Tierra y de la órbita que describe? ¿Se modificará el momento angular de la Tierra? ¿Cambiará el plano de su órbita? Razona tus respuestas.

Para que la Tierra describa la órbita se debe cumplir que:

$$E_c = F_g \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}$$

y la velocidad será: $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

Si se duplica la fuerza gravitatoria, se seguirá cumpliendo la condición de equilibrio (manteniendo la misma órbita):

$$m \frac{v^2}{R} = 2G \frac{Mm}{R^2}$$

en este caso la velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Por tanto, la velocidad orbital aumentará. Si admitimos que ese aumento de atracción es debido a que los dos astros están más próximos, el radio de la órbita es más pequeño. El momento angular de la Tierra no se modificaría, porque aunque la fuerza gravitatoria se duplicara, seguiría siendo una fuerza central y su momento de torsión seguiría siendo nulo. Si el momento angular permanece constante, también permanecerá constante el plano de la órbita, puesto que el vector que define el momento angular debe seguir siendo perpendicular a dicho plano.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. El origen y evolución de las estrellas se basa en el principio de conservación:

a) de la energía; b) del momento angular; c) del momento lineal.

b) Se basa en el principio de conservación del momento angular.

2. Una gigante roja de radio R = 10^6 km y de velocidad angular w evoluciona durante millones de años hasta convertirse en una enana blanca de R = 5 · 10^3 km . Señala la/s respuesta/s correcta/s:

a) Su densidad ha aumentado en 8 000 veces; b) Su velocidad angular se ha multiplicado por 40 000 ; c) El momento angular se ha dividido entre 19.

a) Su densidad ha aumentado en 8 000 veces.

3. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol: a) se conserva el momento angular y el momento lineal; b) se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza; c) varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

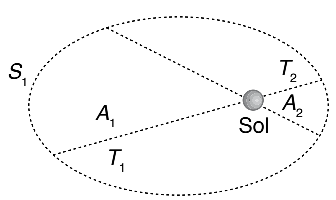
c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

4. Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica, ¿cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?: a) el momento angular; b) el momento lineal; c) la energía potencial.

a) El momento angular.

Problemas propuestos

1. Razona a partir de la segunda ley de Kepler cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.



De acuerdo con la ley de las áreas se cumple

$$A_1 = A_2 \quad \text{si} \quad t_1 = t_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} s_1 \cdot r_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 r_1 , \qquad A_2 = \frac{1}{2} s_2 \cdot r_2 = \frac{1}{2} v_2 t_2 r_2$$

Si $A_1 = A_2$ se cumple:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2 \Rightarrow v \cdot \text{r} = \text{cte}$$

La velocidad orbital es inversamente proporcional a la distancia entre el planeta y el Sol.

2. Una de las lunas de Júpiter, Ío, describe una órbita de radio medio 4,22 · 10^8 m y un periodo de 1,53 · 10^5 s.

a) Calcula el radio medio de otra de las lunas de Júpiter, Calixto, cuyo periodo es de 1,44 · 10^6 s.

b) Obtener la masa de Júpiter sabiendo que la constante de gravitación es: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) De la 3.ª ley de Kepler se deduce:

$$\frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 4{,}22 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1{,}44 \cdot 10^6 \text{ s}}{1{,}53 \cdot 10^5 \text{ s}}\right)^2} =$$

$$= 1{,}88 \cdot 10^9 \text{ m}$$

b) Para que la luna I$_o$ describa una órbita circular se debe cumplir $F_g = F_c$

$$\frac{GM_J}{R_o} = v^2 \Rightarrow M_J = \frac{v^2 R_o}{G} = \frac{4\pi^2 R_o^3}{T^2 G} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (4{,}22 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(1{,}53 \cdot 10^5 \, s)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}}$$

$$= 1{,}89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

3. ¿Cuánto vale en m^2/s la velocidad areolar de la Tierra? Datos: radio medio de la órbita terrestre, 1,5 · 10^{11} m.

La velocidad areolar de la Tierra en su órbita circular viene dada por:

$$v_a = \frac{S}{T} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2}{365 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/días}} = 2{,}2 \cdot 10^{15} \text{ m}^2\text{/s}$$

4. Calcula el momento angular orbital de la Tierra si describe una órbita circular alrededor del Sol de radio 1,5 · 10^{11} m.

Datos: M_T = 6,0 · 10^{24} kg.

El momento angular de la Tierra alrededor del Sol viene dado por:

$$L = m v r = m \omega r^2 =$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{365 \text{ días} \cdot 86\,400 \text{ s/día}} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

5. Indica sobre la trayectoria de un planeta con órbita elíptica alrededor del Sol, que ocupa uno de los focos, los puntos de máxima y mínima velocidad y los puntos de máxima y mínima energía potencial. Razona la respuesta.

De acuerdo con la 2.ª ley de kepler, el perihelio es el punto de máxima velocidad, y en el afelio la velocidad es mínima. La energía mecánica es constante. Por tanto, la energía potencial es máxima cuando la energía cinética es mínima (en afelio). Y será mínima en el perihelio.

6. Plutón recorre una órbita elíptica en torno al Sol situándose a una distancia r_p = 4,4 · 10^{12} m en perihelio y r_a = 7,4 · 10^{12} m en afelio. ¿En cuál de esos dos puntos será mayor la velocidad de Plutón? Razona la respuesta.

De acuerdo con la ley de las áreas se cumple:

$$v_p r_p = v_a r_a \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{7{,}4 \cdot 10^{12} \text{ m}}{4{,}43 \cdot 10^{12} \text{ m}} = 1{,}68$$

Por tanto, $v_p = 1{,}68 \, v_a$

7. Dos satélites absolutamente idénticos recorren órbitas alrededor de la Tierra. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor

velocidad, el de mayor o el de menor radio de órbita? Razona tu respuesta.

De acuerdo con la 2.ª ley de Kepler, $v \cdot r$ = cte. La velocidad será mayor para el satélite que tenga menor radio de órbita.

8. Explica por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen más velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.

Si se mueven bajo una fuerza central (es el caso de la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol) la velocidad es inversamente proporcional a la distancia al Sol (segunda ley de Kepler).

9. En su afelio, el planeta Mercurio está a $6{,}99 \cdot 10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio queda a $4{,}63 \cdot 10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3{,}88 \cdot 10^4$ m/s en el afelio. ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio? ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?

Aplicamos el Principio de Conservación del Momento Angular.

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p} = \frac{3{,}88 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 6{,}99 \cdot 10^{10} \text{ km}}{4{,}63 \cdot 10^{10} \text{ km}} = 5{,}86 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Semieje mayor de la elipse:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{(4{,}63 + 6{,}99) \cdot 10^{10} \text{ km}}{2} = 5{,}81 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

Distancia de un foco al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = (5{,}81 - 4{,}63) \cdot 10^{10} \text{ km}$$

por tanto, la excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1{,}18 \cdot 10^{10} \text{ km}}{5{,}81 \cdot 10^{10} \text{ km}} = 0{,}203$$

10. Considera una órbita elíptica alrededor de una estrella. La distancia desde la estrella hasta el punto más alejado de la órbita, llamado apoastro, es 1,2 veces la distancia al punto más cercano de la órbita, llamado periastro. Si la velocidad de un cuerpo en esta órbita es 25 km/s en el periastro, ¿cuál es su velocidad en el apoastro? Razona la respuesta.

Aplicamos la segunda ley de Kepler:

$$v_p r_p = v_a r_a \Rightarrow v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{25 \text{ km/s} \cdot r_p}{1{,}2 \cdot r_p} = 20{,}8 \text{ km/s}$$

11. Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explica en qué punto de su órbita, afelio o perihelio, tiene mayor valor: *a)* la velocidad; *b)* la energía mecánica; *c)* el momento angular.

De la 2.ª ley de Kepler se deduce que la velocidad orbital es inversamente proporcional a la distancia del cometa al Sol.

a) La velocidad es mayor en perihelio porque en ese punto la distancia es la menor posible.

b) La energía mecánica es constante porque el cometa se mueve bajo una fuerza conservativa. La energía mecánica, pues, es la misma en perihelio que en afelio.

c) El momento angular viene dado por $L = m \cdot r \cdot v$ sen α . En perihelio y en afelio sen $\alpha = 1$, y en todos los puntos de la trayectoria se cumple $v \cdot r$ = cte.

(2.ª ley de Kepler). Por tanto el momento angular vale lo mismo en perihelio que en afelio.

12. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios situados sobre el ecuador terrestre, y con periodo orbital de un día.

***a)* Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determina el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.**

***b)* Determina la energía mecánica de los satélites.**

Datos: radio terrestre = $6{,}37 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; constante de gravitación universal = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

De la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria se deduce:

$$v^2 = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R_o^3}{T^2} = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow$$

$$R_o = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Altura a que se encuentran los satélites:

$h = R_o - R_T = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m} - 6{,}7 \cdot 10^6 \text{ m} = 3{,}55 \cdot 10^7$ m

Velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{4{,}22 \cdot 10^7}} = 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

a) Módulo del momento angular:

$$|L| = m \cdot v \cdot R_o \cdot \text{sen } \alpha =$$

$$= 500 \text{ kg} \cdot 3{,}07 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 4{,}22 \,.\, 10^7 \text{ m} = 6{,}48 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

sen $\alpha = 1$ por ser órbita circular.

b) $$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R_o}\right) = -\frac{GMm}{2R_o} =$$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7} = -2{,}36 \cdot 10^9 \text{ J}$$

13. Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

***a)* El módulo del momento angular, respecto de la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el momento lineal.**

***b)* La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.**

a) Falso. El momento angular es constante en módulo, dirección y sentido, ya que la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central. El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio, ya que en estos puntos, al ser el vector de posición r y el momento lineal p perpendiculares, se cumple:

$r_a m v_a = r_p m v_p$ y dado que $r_a > r_p$ se debe cumplir que $v_p > v_a$.

b) Falso. La energía mecánica se conserva en toda la órbita, ya que solamente actúa la fuerza gravitatoria del Sol, que es conservativa. La energía potencial sí es mayor en el afelio que en el perihelio, ya que la distancia es mayor de acuerdo con la expresión $E_p = -\frac{GMm}{R}$, a valores mayores de R tendremos un valor negativo más pequeño, que implicará un valor mayor.

14. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa *M*. La masa del planeta es $m = 10^{24}$ kg y su órbita es circular, de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 3$ años terrestres. Determina:

a) La masa de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2r alrededor de la estrella.

Datos: constante de gravitación universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. Considera 1 año terrestre = 365 días.

a) Aplicaremos la 3.ª ley de Kepler para los datos del planeta, teniendo en cuenta, además, que la masa que aparece en la fórmula es la de la estrella respecto a la que se orbita. Por ser circular la órbita, se cumple $Fc = Fg$.

$$\frac{T^2}{R_3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (10^8 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 6,61 \cdot 10^{28} \text{ kg}$$

b) $$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R} =$$

$$= \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,61 \cdot 10^{28} \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^3} = -2,2 \cdot 10^{31}\ J$$

c) Modulo del momento angular: $|L| = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\ \alpha$

Al calcular el momento angular respecto del centro de la estrella para una órbita circular los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ son siempre perpendiculares. Por tanto, el módulo del momento angular será:

$$|L| = r \cdot m \cdot v = 10^{11} \cdot 10^{24} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,61 \cdot 10^{28}}{10^{11}}} =$$

$$= 6,64 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

d) La velocidad angular en función de la velocidad orbital viene dada por:

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}{r_2} = \sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,61 \cdot 10^{28}}{(2 \cdot 10^{11})^3}} =$$

$$= 2,35 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

15. Un satélite artificial de 500 kg gira en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcula:

a) Su velocidad.

b) Su energía total.

c) La energía necesaria para que, partiendo de esa órbita, se coloque en otra órbita circular a una altura de 10 000 km.

d) En el proceso, ¿cómo cambia su momento angular?

Datos: radio terrestre = $6,37 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra: $5,98 \cdot 10^{24}$ kg; constante $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

a) De la equivalencia entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria tenemos:

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,87 \cdot 10^6}} = 7\,620 \text{ m/s}$$

b) $$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{2(R+h)} =$$

$$= -\frac{6,67 \cdot 10^{11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 6,87 \cdot 10^6} = -1,45 \cdot 10^{-10}\ J$$

c) La energía necesaria será la diferencia entre energía mecánica final y la energía mecánica correspondiente a la órbita de partida.

$$\Delta E = E_{mf} - E_{mo} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{R+h_f} + \frac{1}{R+h_o}\right) \cdot GMm =$$

$$= \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R+h_o} - \frac{1}{R+h_f}\right) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 10^6} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6,87} + \frac{1}{16,37}\right) = 8,41 \cdot 10^9\ J$$

d) Hallamos la velocidad en la nueva órbita:

$$v_f = \sqrt{\frac{GM}{R+h_f}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{39,88 \cdot 10^{13}}{16,37 \cdot 10^6}} = 4\,936 \text{ m/s}$$

Variación del momento angular

$$\Delta L = m(r_f \cdot v_f - r_o \cdot v_o) = 500(16,37 \cdot 4,936 - 6,87 \cdot 7,62) \cdot$$
$$\cdot 10^9 = 1,43 \cdot 10^{13} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

16. Un satélite de 1 000 kg de masa describe una órbita circular de $1,2 \cdot 10^4$ km de radio alrededor de la Tierra. Calcula:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita? Explica por qué.

b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita. Datos: masa de la Tierra $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; constante de gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

a) Módulo del momento lineal y módulo del momento angular:

$$p = mv = m\sqrt{\frac{GM}{R_o}} = 1000 \cdot \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{1,2 \cdot 10^7}} =$$

$$= 5,76 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$L = mvR_o = 5,76 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^7 = 6,92 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

b) Período y energía mecánica:

$$T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}2 \cdot 10^7}{5{,}76 \cdot 10^3} = 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ s} = 3{,}63\ h$$

$$E_m = \frac{-GMm}{2R_o} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1\,000}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^7} =$$

$$= -1{,}66 \cdot 10^{10}\ J$$

17. Calcula el momento angular de Júpiter suponiendo que tiene una masa 315 veces la de la Tierra, que su radio de órbita es 5,2 veces mayor que el radio de la órbita terrestre y el periodo es 3,74 · 10⁸ s.

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,400$ km.

En el supuesto de que la órbita sea circular, el momento angular es máximo y viene determinado por:

$$L = (315\,M_T)\ r\ \frac{2\,\pi\,r}{T} = \frac{2\,\pi\ (315\,M_T)\ r^2}{T} =$$

$$= 2\,\pi\ (315\,M_T)\ \frac{(5{,}2\ r_T)^2}{T} = 6{,}28 \cdot (315 \cdot 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}) \cdot$$

$$\cdot \frac{27 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{22}\text{ m}^2}{3{,}74 \cdot 10^8\text{ s}} = 1{,}9 \cdot 10^{43}\text{ kg m}^2/\text{s}$$

18. Supongamos que por alguna razón la Tierra se contrae de modo que su radio se transforma en la mitad del que ahora tiene. ¿Cambiaría su velocidad de traslación alrededor del Sol?

Suponemos que la masa de la Tierra y el radio de la órbita que describe no han cambiado. Por tanto, su momento angular seguirá siendo el mismo: $L = m\,r\,v$ = cte.

De donde se deduce que la velocidad no debe cambiar.

También se puede llegar al mismo resultado aplicando la Ley de Gravitación. Si la Tierra se mantiene en su órbita, se cumple:

$$m\ \frac{v^2}{r} = G\ \frac{M\,m}{r^2}$$

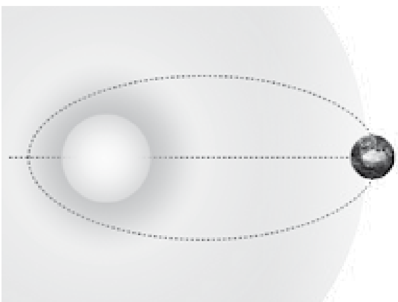
de donde se deduce que la velocidad orbital es $v = \sqrt{\dfrac{G\,m}{T}}$, que es constante si el radio de la órbita no varía.

19. La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1{,}521 \cdot 10^{11}$ m y su máxima aproximación es $1{,}471 \cdot 10^{11}$ m. La velocidad orbital de la Tierra en perihelio es $3{,}027 \cdot 10^4$ m/s (figura siguiente).

Calcula:

***a)* La velocidad orbital en el afelio.**

***b)* La excentricidad de la órbita de la Tierra.**



a) El momento angular de la Tierra permanece constante. Por tanto, se cumple $L_a = L_p$; $m\,v_a\,r_a = m\,v_p\,r_p$, porque en ambos puntos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Por tanto,

$$v_a = \frac{v_p\,r_p}{r_a} = \frac{3{,}027 \cdot 10^4\text{ m/s} \cdot 1{,}471 \cdot 10^{11}\text{ m}}{1{,}521 \cdot 10^{11}\text{ m}} =$$

$$= 2{,}927 \cdot 10^4\text{ m/s}$$

b) Por definición, la excentricidad de la órbita viene dada por $e = \dfrac{c}{a}$, siendo a el semieje mayor de la elipse.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\text{ m},$$

y c es la distancia de uno de los focos al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = 1{,}496 \cdot 10^{11}\text{ m} - 1{,}471 \cdot 10^{11}\text{ m} = 0{,}025 \cdot 10^{11}\text{ m}$$

De acuerdo con estos valores, la excentricidad de la órbita será:

$$e = \frac{a}{c} = \frac{0{,}025 \cdot 10^{11}\text{ m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\text{ m}} = 0{,}017$$

20. ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

No es constante, porque el movimiento de los planetas se rige por el Principio de Conservación del Momento Angular:

$$m\,r\,v = \text{cte.}$$

Si la órbita es elíptica, r no es constante. Por tanto, para que se cumpla dicho principio la velocidad debe variar. Sería constante en el caso de que la órbita fuera circular.

21. Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 3 200 km y 400 km, respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es 5 250 m/s, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento.

Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

Durante su recorrido el satélite mantiene constante el momento angular. Es decir, se cumple $r_1\,v_1 = r_2\,v_2$.

La velocidad máxima $v_1 = 5\,250$ m/s corresponde al punto de máximo acercamiento. La velocidad correspondiente a la posición más alejada será:

$$v_2 = \frac{v_1\,r_1}{r_2} = \frac{5\,250\text{ m/s} \cdot (6{,}4 \cdot 10^6\text{ m} + 0{,}4 \cdot 10^6\text{ m})}{6{,}4 \cdot 10^6\text{ m} + 3{,}2 \cdot 10^6\text{ m}} = 3\,719\text{ m/s}$$

22. Dibuja la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol y las fuerzas que intervienen en el movimiento de aquel, así como la velocidad del planeta en diversos puntos de su órbita.

Este ejercicio es de respuesta abierta.

23. Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio $1{,}00 \cdot 10^{11}$ m y periodo 2 años exactos. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1{,}8 \cdot 10^{11}$ m.

***a)* ¿Cuál es la masa de la estrella?**

***b)* Calcula el periodo de la órbita del planeta 2.**

c) **Utilizando los Principios de Conservación del Momento Angular y de la Energía Mecánica, halla la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.**

a) El planeta 1, al describir una órbita circular, está animado de una aceleración centrípeta constante que viene determinada por:

$$m\,\frac{v^2}{r} = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

De donde se obtiene el valor de la velocidad $v^2 = \dfrac{GM}{r}$; además, el periodo del planeta viene dado por $T = \dfrac{2\pi r}{v}$. De ambas ecuaciones se deduce la masa del planeta:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = \frac{4 \cdot 9{,}89 \cdot 10^{33}\ \text{m}^3}{3{,}978 \cdot 10^{15}\ \text{s}^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}} =$$

$$= 1{,}49 \cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) Para obtener el periodo del planeta 2 aplicamos la Segunda Ley de Kepler.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

siendo r_2 el semieje mayor de la elipse:

$$r_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m} + 10^{11}\ \text{m}}{2} = 1{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

El periodo del segundo planeta será:

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 T_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1{,}4 \cdot 10^{11}}{10^{11}}\right)^3 T_1^2} = 3{,}4\ \text{años}$$

c) La energía mecánica del planeta permanece constante porque se mueve en un campo conservativo.

$$E = \frac{1}{2}\,m v_1^2 + \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\,m v_2^2 + \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

De acuerdo con la conservación del momento angular se cumple:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2; \qquad v_1 = \frac{r_2}{r_1} v_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{10^{11}\ \text{m}} \cdot v_2$$

$$v_1 = 1{,}8\,v_2; \qquad v_1^2 - \frac{v_1^2}{1{,}8^2} = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{1}{1{,}8^2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2 \cdot \frac{2{,}24}{3{,}24}\ 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}49 \cdot$$

$$\cdot\, 10^{29}\ \text{kg} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}8 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}$$

$$v_1^2 = 1{,}27 \cdot 10^8\ \text{m}^2/\text{s}^2; \qquad v_1 = 1{,}16 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

24. Se ha lanzado un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de 66 700 km (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad tiene el satélite en esa posición?

Datos: R_T = 6,4 · 10⁶ m.

Una vez situado en la órbita, mantendrá constante su momento angular. Por tanto, se cumple:

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot (R_T + 500\ \text{km})}{66\,700\ \text{km}} =$$

$$= \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot 6\,900\ \text{km}}{66\,700\ \text{km}} = 3\,817\ \text{km/h}$$

25. ¿Qué puntos de la superficie terrestre tienen momento angular cero respecto del centro de la Tierra en el movimiento de rotación de esta?

El momento angular de la Tierra, tomada como un sólido rígido, referido a su movimiento de rotación, viene dado por $L = I\omega = \dfrac{2}{5}\,MR^2\omega$; siendo $I = \dfrac{2}{5}\,MR^2$ el momento de inercia de la Tierra respecto del eje de rotación. De la expresión anterior se deduce que el momento angular de la Tierra depende de su velocidad angular. Todos aquellos puntos que tengan velocidad angular cero tendrán momento angular nulo. Estos puntos son los del eje de rotación. De todos ellos, los polos N y S geográficos se encuentran sobre la superficie de la Tierra.

26. Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de 3,84 · 10⁵ km con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto del centro de la Tierra. Datos: M_T = 6,0 · 10²⁴ kg.

Momento angular de la Luna:

$$L = mrv = mr\,\frac{2\pi r}{T} = 2\pi\,\frac{mr^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot (0{,}012\,M_T) \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2}{27{,}3\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/día}} = 2{,}8 \cdot 10^{34}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

27. Durante el vuelo Apolo XI, el astronauta M. Collins giró en torno a la Luna, en un módulo de mando, sobre una órbita aproximadamente circular. Suponiendo que el periodo de este movimiento fuera de 90 minutos exactos y que su órbita estuviera a 100 km por encima de la superficie lunar, calcula:

a) **La velocidad con que recorría la órbita.**

b) **Su momento angular respecto del centro del satélite, suponiendo que la masa del astronauta fuera de 80,0 kg.**

Datos: R_L = 1,738 · 10⁶ m.

a) La velocidad sobre la órbita es:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{6{,}28 \cdot (1{,}738 \cdot 10^6 + 0{,}1 \cdot 10^6\ \text{m})}{5\,400\ \text{s}} =$$

$$= 2{,}139 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

b) Momento angular del astronauta:

$$L = mvr = 80{,}0\ \text{kg} \cdot 2{,}137 \cdot 10^3\ \text{m/s} \cdot 1{,}838 \cdot 10^6\ \text{m} =$$

$$= 3{,}13 \cdot 10^{11}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

28. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica cuya excentricidad es 0,2. Si en el perigeo dista del centro de la Tierra 7,2 · 10⁶ m, ¿a qué distancia estará en el apogeo?

De acuerdo con la expresión de la excentricidad, tenemos:

$$e = \frac{c}{a} = 0{,}2$$

Además, se cumple que: $a = c + r_p = c + 7{,}2 \cdot 10^6$ m

Del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c = 0{,}2\,a \\ a = c + 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} \end{array}\right\} \text{ se deduce que } a = 9{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La distancia en el apogeo se obtiene de:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$r_a = 2\,a - r_p = 18 \cdot 10^6 \text{ m} - 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} = 1{,}08 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Actividades

1. **¿Por qué introduce la Física el concepto de campo? ¿Qué otros campos de fuerzas utiliza la Física además del campo gravitatorio?**

La Física introduce el concepto de campo de fuerzas para explicar las interacciones a distancia entre dos cuerpos. Además del campo gravitatorio, se utilizan el campo electrostático y el campo electromagnético, que son objeto de estudio en las Unidades 6 y 7, respectivamente.

2. **El campo gravitatorio creado por dos masas, m_1 y m_2, que podemos considerar puntuales y separadas una distancia d, se anula a $d/3$ de la masa m_1. Cuánto vale la relación entre las masas m_1/m_2?**

En el punto en donde el campo resultante se anula, se cumple:

$$\frac{m_1}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = \frac{m_2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2}$$

De donde se deduce que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$

3. **La intensidad del campo gravitatorio de la Luna es 1,6 m/s². ¿Cuánto pesa en la Luna un individuo que en la Tierra pesa 689 N?**

La relación entre el peso en la Luna y el peso en la Tierra:

$$\frac{P_L}{P_T} = \frac{m \cdot g_L}{m \cdot g_T}$$

De donde $P_L = P_T \frac{g_L}{g_T} = 689\ N \cdot \frac{1{,}6\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 112\ N$

4. **La intensidad del campo gravitatorio de Marte es 3,7 m/s² y su radio es 3,4 · 10⁶ m. ¿Cuánto vale la masa de Marte?**

La intensidad del campo gravitatorio de Marte viene dada por:

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2}\ ;\ \ M_M = \frac{g_M \cdot R_M^2}{G} = \frac{3{,}7 \cdot (3{,}4 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}4 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

5. **De acuerdo con la variación de la gravedad en el interior de la Tierra, si esta estuviera atravesada por un túnel hasta las antípodas, ¿qué movimiento tendría un cuerpo que se dejase caer por dicho túnel? ¿Cuánto tiempo emplearía en ir de uno al otro extremo?**

Se trata de un movimiento armónico simple. Recuerda que todo m.a.s. viene definido por una fuerza recuperadora que es proporcional al desplazamiento: $F = k\ x$.

Si llamamos x a la distancia que hay desde el centro de la Tierra hasta la posición del cuerpo en cualquier instante, este estará sometido a una fuerza gravitatoria:

$$f = m\,g_x = m\,\frac{g_0}{R_T}\,x = k\ x$$

Esta fuerza, además de armónica, es conservativa. Cuando el cuerpo llega al centro de la Tierra, $x = 0$, la fuerza recuperadora será cero; pero por inercia y debido a la energía cinética, el cuerpo rebasa esa posición. Por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, el cuerpo llegará justamente hasta la otra boca del túnel e iniciará de nuevo el movimiento hacia el centro de la Tierra, repitiéndose indefinidamente. El tiempo que empleará en ir de un extremo a otro será medio periodo.

Para hallar el periodo de este movimiento, comparamos su constante recuperadora con la constante recuperadora de cualquier m.a.s. en general:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{m\,g_0}{R_T} \\ k &= m\,\omega^2 = m\,\frac{4\,\pi^2}{T^2} \end{aligned}\right\}\ \frac{g_0}{R_T} = \frac{4\,\pi^2}{T^2}$$

De donde se deduce que:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{s}$$

El tiempo empleado en ir de un extremo al otro es medio periodo; es decir, $t = 2{,}5 \cdot 10^3$ s.

6. **El potencial gravitatorio a 5 m de distancia de una masa M tiene un valor absoluto de 1,355 · 10⁻⁸ J/kg. ¿Cuál es el valor de la masa M?**

El potencial gravitatorio depende de la masa y de la distancia:

$V = -\frac{GM}{d}$. Del enunciado se deduce $\frac{GM}{d} = 1{,}355 \cdot 10^{-8}$ J/kg

$$M = -\frac{1{,}355 \cdot 10^{-8} \cdot 5}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 1\,000\ \text{kg}$$

Ciencias, tecnología y sociedad

1. **¿Un satélite LEO tiene un periodo de revolución mayor, menor o igual que un satélite MEO? ¿Por qué?**

Tiene un periodo menor. Porque, de acuerdo con la 3.ª ley de Kepler, el periodo es proporcional al radio de la órbita. El radio de la órbita de un satélite LEO es menor que la de un satélite MEO.

2. **Todo satélite geoestacionario es geosíncrono, ¿pero todo satélite síncrono es estacionario?**

No. Para que un satélite síncrono sea estacionario su órbita debe estar situada en el plano ecuatorial.

3. **Explica qué condiciones debe cumplir un satélite para que sea geoestacionario y qué ventajas tiene frente a otros satélites.**

Para que un satélite sea geoestacionario debe cumplir dos condiciones:

a) Su periodo de revolución coincida con el periodo de revolución de la Tierra: que sea geosíncrono.

b) Su órbita esté situada en el plano ecuatorial.

Estos satélites tienen las siguientes ventajas: No necesitan equipos especiales de rastreo. Las antenas se orientan directamente hacia la posición fija que ocupan en el espacio. Bastan tres satélite de este tipo para suministrar imágenes a toda la superficie de la Tierra.

4. **¿Para qué tipo de satélites está destinado principalmente el cementerio de satélites?**

Para satélites de órbitas bajas (LEO) y medias (MEO) principalmente.

5. El Hispasat es uno de los varios satélites que España ha lanzado al espacio. Haz un estudio sobre este satélite: qué función desempeña, qué cobertura tiene, qué tipo de órbita posee, etc. Para ello dispones de mucha información en Internet.

Actividad abierta.

Problemas propuestos

Intensidad del campo gravitatorio

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

***a)* ¿Cuál será el valor de g a una altura igual al radio de la Tierra?**

Datos: R_T = 6 370 km; g_0 = 9,8 m/s^2.

***b)* ¿Cuál será el periodo de un satélite artificial de la Tierra en una órbita circular a dicha altura?**

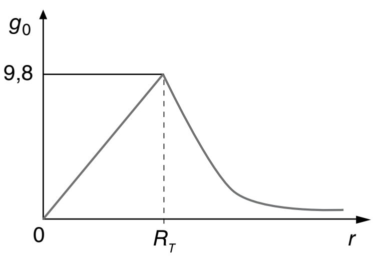
a) $g_h = \dfrac{GM}{(R_T + h)^2} = \dfrac{GM}{(2R_T)^2} = \dfrac{GM}{4R_T^2} = \dfrac{g_o}{4} = \dfrac{9{,}8}{4} = 2{,}45 \text{ m/s}^2$

b) Velocidad orbital a esa altura:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{12{,}74 \cdot 10^6}} = 5{,}6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 12{,}74 \cdot 10^6}{5{,}6 \cdot 10^3} = 14{,}287 \cdot 10^3\ s = 4\ h$$

2. Supongamos la Tierra como una esfera perfecta y homogénea de radio R, ¿cuál es la gráfica que mejor representa la variación de la gravedad *(g)* con la distancia al centro de la Tierra? Explica por qué.



El valor de la gravedad es cero en el centro de la Tierra. Aumenta medida que nos alejamos del centro del planeta, alcanzando su valor maximo en la superficie de la Tierra. Disminuye con la altura hasta el infinito, en donde su valor es cero. Por tanto, la gráfica *c)* es la que mejor representa la variación de la gravedad.

3. Indica si la siguiente frase es cierta o falsa y razona la respuesta: «La intensidad en un punto del campo gravitatorio terrestre es tanto mayor cuanto mayor es la masa que se coloque en dicho punto».

La intensidad del campo gravitatorio depende de la masa de la Tierra, de la distancia al centro de la Tierra del punto considerado y de la constante de gravitación, como se deduce de la expresión:

$$g_d = \frac{GM_T}{d^2}$$

Por tanto, la frase indicada es falsa.

4. ¿Cómo varían, con la distancia, la energía potencial gravitatoria y el campo gravitatorio debidos a una masa puntual? ¿Cuál sería el valor de *g* en la superficie de la Tierra si se duplicasen su masa y su radio?

La energía potencial gravitatoria en función de la distancia *d* viene dada por $E_p = -\dfrac{GM_m}{d}$. El valor absoluto disminuye con la distancia; pero al tratarse de una magnitud con valor negativo, su valor real aumenta al aumentar la distancia.

El valor de la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; por tanto, disminuye al aumentar la distancia.

5. Si la densidad de la Tierra fuese tres veces mayor, ¿cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no variara?

Valor de la gravedad en función del radio y de la densidad:

$$g_o = \frac{GM}{R_o^3} = \frac{GV_o\rho_o}{R_o^2} = \frac{G\,\frac{4}{3}\,\pi R_o^3\rho_o}{R_o^2} = \frac{4}{3}\,G\pi R_o\rho_o$$

Nuevo valor de la gravedad:

$$g' = \frac{4}{3}\,G\pi R' \cdot 3\rho_o$$

Si $g_o = g' \Rightarrow R_o = 3R' \Rightarrow R' = \dfrac{1}{3}\,R_o$

6. Si se redujese el volumen de la Tierra a la mitad y perdiera la mitad de su masa, ¿cómo variaría la aceleración de la gravedad?

Si la masa y el volumen se reduce a la mitad, la densidad permanece constante, $\rho_o = \rho'$; pero si cambia de valor:

$$\frac{V_o}{V'} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot R_o^3}{4/3 \cdot \pi \cdot R'^3};\ \frac{2V'}{V'} = \frac{R_o^3}{R'^3};\ R' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,R_o$$

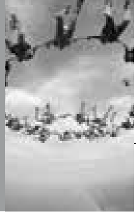
la gravedad, como hemos visto en el ejercicio anterior, depende del radio de la Tierra:

$$g_o = \frac{4}{3}\,\pi G R_o\ ;\ \frac{g'}{g_o} = \frac{R'}{R_o} = \frac{1/\sqrt[3]{2} \cdot R_o}{R_o} \Rightarrow g' = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot g_o$$

7. Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. ¿Cuál será el peso de este cuerpo en un planeta cuya masa es 10 veces inferior a la masa de la Tierra pero con igual tamaño que esta?

$$P = mg = \frac{mGM_p}{R_p^2} = \frac{mGM_T}{10 \cdot R_T^2} = \frac{mg}{10} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{10} = 9{,}8 \text{ N}$$

8. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 700 N, aterriza en el planeta Venus, mide de nuevo su peso y observa que después de efectuadas las correcciones correspondientes, pesa 600 N. Considerando que el diámetro de Venus es aproximadamente el mismo que el de la Tierra, calcula la masa del planeta Venus. Toma como masa de la Tierra el valor aproximado de 6 · 10^{24} kg.



Según la Ley de gravitación universal, el peso del astronauta en la Tierra es:

$$P = G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = g_0 m = 700\ \text{N}$$

En Venus, el peso es $P_V = G\,\frac{M_V m}{R_V^2}$. Según el enunciado, se cumple que $R_T = R_V$, así que:

$$G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = 700\ \text{N}; \qquad G\,\frac{M_V m}{R_T^2} = 600\ \text{N}$$

$$\frac{M_T}{M_V} = \frac{700}{600} \Rightarrow M_V = \frac{6}{7}\,M_T = \frac{6}{7} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} = 5{,}14 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

9. Ío, uno de los satélites de Júpiter, tiene una masa de 8,9 · 10 ^{22} kg, un periodo orbital de 1,77 días y un radio medio orbital de 4,22 · 10 ^{8} m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determina:

a) La masa de Júpiter.

b) La intensidad del campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Ío.

c) La energía cinética de Ío en su órbita.

d) El módulo del momento angular de Ío respecto al centro de su órbita.

a) Aplicando la 3.ª ley de Kepler al satélite Ío:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}\,;\ M_J = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (4{,}22 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}77 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

b) $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4{,}22 \cdot 10^8)^2} = 0{,}71\ \text{m/s}$

c) $E_c = \frac{1}{2}\,mv_2 = \frac{1}{2}\,m \cdot \frac{GM}{R_o} =$

$$= \frac{8{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^8} = 1{,}34 \cdot 10^{31}\ J$$

d) $L = \text{r} \cdot \text{m} \cdot \text{v} = 4{,}22 \cdot 10^8 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 17\,338 =$
$= 6{,}51 \cdot 10^{35}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

10. Un satélite artificial orbita en torno a la Tierra con un radio de órbita de 2 · 10^7 m. ¿Cuánto vale la intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite?

Datos: M_T = 6 · 10^{24} kg.

$$g = \frac{GM}{R_o^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 10^{14}} = 1\ \text{m/s}^2$$

11. Desde la superficie de la Tierra se pone en órbita un satélite, lanzándolo en dirección vertical con una velocidad inicial de 6000 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, determina:

a) La altura máxima que alcanza el satélite.

b) El valor de la gravedad a esa altura.

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}; M_T = 5,98 · 10^{24} kg; R_T = 6,37 · 10^6 m.

a) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{GMm}{R^T + h}$$

de donde h vale:

$$h = \frac{v^2 R_T^2}{2GM_T - v^2\,R_T} =$$

$$= \frac{36 \cdot 10^6\,(6{,}37 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 36 \cdot 10^6 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}$$

$= 2{,}6 \cdot 10^6$ m

b) $g = \frac{GM}{(R + h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 + 2{,}6)^2 \cdot 10^{12}} = 4{,}\ 97\ \text{m/s}^2$

12. Dos planetas *A* y *B* de masas M_A y M_B tienen la misma intensidad de la gravedad en su superficie. Determina la relación de sus radios y la relación de sus densidades sabiendo que M_A = 25 M_B.

Si partimos de la definición de intensidad de campo gravitatorio en la superficie de un planeta, tenemos, para los planetas *A* y *B*, las siguientes relaciones:

$$g_A = G\,\frac{M_A}{R_A^2}; \qquad g_B = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

Como $M_A = 25\,M_B$, y se cumple la condición $g_A = g_B$, resulta que:

$$g_A = g_B = G\,\frac{25\,M_B}{R_A^2} = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

de donde, $\frac{25\,M_B}{R_A^2} = \frac{M_B}{R_B^2} \Rightarrow R_A^2 = 25\,R_B^2 \Rightarrow R_A = 5\,R_B$

Para hallar la relación de densidades, basta con considerar la relación entre las masas y los radios de los planetas, así:

$$d_A = \frac{M_A}{V_A} = \frac{M_A}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_A^3}; \qquad d_B = \frac{M_B}{V_B} = \frac{M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_B^3}$$

$$d_A = \frac{25\,M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,(5\,R_B)^3} = \frac{25}{125} \cdot \frac{M_B}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_B^3} = \frac{1}{5}\,d_B$$

$$d_B = 5\,d_A$$

13. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Mercurio, si el radio de la Tierra es tres veces mayor que el de Mercurio, y la densidad de Mercurio es $\frac{3}{5}$ de la densidad media de la Tierra. Datos: g_0 = 9,8 m/s^2.

Valor de la gravedad en Mercurio en función de la densidad y del radio del planeta:

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M^3\,\rho_M}{R_M^2} = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M\,\rho_M$$

Y para la Tierra sería $g_T = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_T\,\rho_T$

Relacionando los dos valores, tenemos:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_M\,\rho_M}{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,R_T\,\rho_T} = \frac{R_M\,\frac{3}{5}\,\rho_T}{3\,R_M\,\rho_T} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, se cumple que:

$$g_M = \frac{g_T}{5} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{5} = 1{,}96\ \text{m/s}^2$$

14. Halla la aceleración de un cuerpo que cae libremente en la superficie de la Luna, sabiendo que el diámetro de la Luna es 1/4 del diámetro terrestre y la masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra.

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es $g_L = G\,\frac{M_L}{R_L^2}$, y en la de la Tierra $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0$.

Como se conoce el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, relacionamos los valores dato con este valor conocido.

$$M_L = \frac{1}{81}\,M_T; \qquad R_L = \frac{1}{4}\,R_T$$

Así:

$$g_L = G\,\frac{\frac{1}{81}\,M_T}{\left(\frac{1}{4}\,R_T\right)^2} = \frac{1}{81}\cdot 16 \cdot G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 0{,}19\ g_0 =$$

$$= 0{,}19 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

15. Si la densidad de la Tierra es $5{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, calcula:

a) **El valor de su radio sabiendo que $g = 9{,}8$ m/s^2.**

b) **El valor de g a una altura igual a dicho radio.**

Dato: constante de gravitación $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

a) La densidad media de la Tierra se obtiene mediante la expresión $d = \frac{M_T}{V_T}$.

Por otra parte, el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

Así, planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} g_0 = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \\[2ex] d = \dfrac{M_T}{V_T} = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\,\pi\,(R_T)^3} = 5{,}5 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, llegamos al valor:

$$R_T = \frac{3\ \cdot\ 9{,}8\ \text{m/s}^2}{4\pi \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5\,500\ \text{kg/m}^3} = 6\ 352 \cdot 10^3\ \text{m}$$

b) Para calcular g a una altura h de 6 350 km, acudimos a la expresión de la intensidad de campo gravitatorio $g_T = G\,\frac{MT}{(R+h)^2}$

Según el apartado *a*), la masa de la Tierra es de:

$$MT = \frac{R_T^2 g_0}{G} = \frac{(6\,350 \cdot 10^3\ \text{m})^2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{6{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}9 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Así que la gravedad a 6 350 km de la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{(R+h)^2} =$$

$$= 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg} \cdot \frac{5{,}9 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6\,350 \cdot 10^3\ \text{m} + 6\,350 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$$

16. Júpiter, el mayor de los planetas del sistema solar y cuya masa es 318,36 veces la de la Tierra, tiene orbitando 12 satélites. El mayor de ellos, Ganímedes (descubierto por Galileo), gira en una órbita circular de radio igual a 15 veces el radio de Júpiter y con un periodo de revolución de $6{,}2 \cdot 10^5$ s. Calcula:

a) **La densidad media de Júpiter.**

b) **El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Hallamos el radio de la órbita del satélite para obtener el radio de Júpiter. Para que el satélite se mantenga en la órbita se cumple:

$$F_c = F_g\ ;\ m\,\frac{v^2}{R_o} = \frac{GMm}{R_o^2}\ ;\ v^2 = \frac{GM}{R_o}\ ;\ \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2} = \frac{GM}{R_o}$$

$$R_o^3 = (15\ \cdot\ R_J)^3 = \frac{T^2 G M_J}{4\pi^2}\ ;\ R_J = \frac{1}{15}\cdot\sqrt{\frac{T^2\ \cdot\ G\ \cdot\ 318{,}36 M_T}{4\pi^2}} =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot\sqrt{\frac{6{,}22\ \cdot\ 10^{10}\ \cdot\ 6{,}67\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot\ 318{,}36\ \cdot\ 5{,}98\ \cdot\ 10^{24}}{4\ \cdot\ 3{,}14^2}} =$$

$$= 7{,}15\ \cdot\ 10^7\ \text{m}$$

$$\rho = \frac{M_J}{V_J} = \frac{M_J}{4/3\ \cdot\ \pi\ \cdot\ R_J^3} = \frac{3\ \cdot\ 318{,}36\ \cdot\ 5{,}98\ \cdot\ 10^{24}}{4\ \cdot\ 3{,}14\ \cdot\ 7{,}15^3\ \cdot\ 10^{21}} =$$

$$= 1{,}24\ \cdot\ 10^3\ \text{kg/m}^3$$

b) $$g_J = \frac{GM_J}{R_J^2} = \frac{6{,}67\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot\ 318{,}36\ \cdot\ 5{,}98\ \cdot\ 10^{24}}{7{,}15^2\ .10^{14}} =$$

$$= 24{,}8\ \text{m/s}^2$$

17. Si por una causa interna la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa:

a) **¿Cuál sería la intensidad de la gravedad en su nueva superficie?**

b) **¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor de su eje?**

c) **¿Cuál sería la nueva duración en horas del día?**

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8$ m/s^2. Si se reduce el radio a la mitad:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{\left(\frac{1}{2}\,R_T\right)^2} = 4g_0 = 39{,}2\ \text{m/s}^2$$

b) No.

c) El periodo de rotación en función de la intensidad de campo gravitatorio:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g_0}}$$

como el radio terrestre es ahora la mitad, el nuevo periodo de rotación será:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{R_T}{2}}{4g_0}} = T\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{T}{4} = 6 \text{ horas}$$

18. Júpiter tiene una masa 318 veces la masa terrestre, un radio 11,22 veces el de la Tierra y su distancia al Sol es 5,2 veces mayor que la distancia media de la Tierra al Sol. Determina:

a) **El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter en relación con su valor en la superficie de la Tierra y el periodo de rotación de Júpiter alrededor del Sol, sabiendo que el periodo terrestre es de 365 días y las órbitas de ambos planetas se consideran circulares.**

b) **El periodo y la velocidad media orbital de Calisto, su segunda mayor luna, sabiendo que describe una órbita circular de 1,88 · 10⁹ m.**

a) $\frac{g_1}{g_T} = \frac{M_J R_T^2}{M_T R_J^2} = \frac{318\ M_T R_T^2}{M_T \cdot (11{,}22)^2\ R_T^2} = 2{,}5\ ;\ g_J = 2{,}5\ g_T$

Para hallar el período aplicamos la 3.ª ley de Kepler:

$$\frac{T_J^2}{T_J^2} = \frac{R_{oJ}^3}{R_{oT}^3}\ ;\ T_J = T_T \cdot \sqrt{\frac{5{,}2^3 \cdot R_{oT}^3}{R_{oT}^3}} = 365 \cdot 11{,}85 = 4\,325 \text{ días}$$

b) $v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 318 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}88 \cdot 10^9}} =$

$= 8{,}21 \cdot 10^3$ m/s

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}88 \cdot 10^9}{8{,}21 \cdot 10^3} = 1{,}43 \cdot 10^6 \text{ s}$$

19. Un satélite artificial de 100 kg gira en una órbita circular de 9600 km de radio. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es 4/9 del valor que tiene en la superficie terrestre, calcula:

a) **La velocidad de traslación del satélite.**

b) **Su energía cinética.**

c) **Su periodo de revolución.**

a) $\frac{g_h}{g_o} = \frac{4}{9} = \frac{\frac{GM}{R_o^2}}{\frac{GM}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{R_o^2}\ ;\quad R_o = \frac{3}{2}R_T$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{3/2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}} = 6{,}46 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 50 \cdot (6{,}46 \cdot 10^3)^2 = 2{,}1 \cdot 10^9\ J$

c) $T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}46 \cdot 10^3} = 9{,}28 \cdot 10^3 \text{ s} = 2{,}58 \text{ h}$

20. Calcula:

a) **La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2 440 km y que tiene una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N/kg.**

b) **La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5 000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie. Dato: Constante *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻².**

a) $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3 \cdot g}{4\pi RG} =$

$$= \frac{3 \cdot 3{,}7}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}44 \cdot 10^6 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}43 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

b) $\Delta E_m = E_{mf} - E_{mo} =$

$$= -\frac{GMm}{2R_o} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \text{GMm}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R_o}\right)$$

Para hallar R_0 utilizamos el dato del valor de *g*.

$$\frac{GM}{R_o^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{GM}{R^2} \Rightarrow R_o = 2R$$

$$\Delta E_m = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{GMm}{R} = G\pi R^2\rho m =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}14 \cdot (2.44 \cdot 10^6)^2 \cdot 5{,}43 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 =$$

$$= 3{,}38 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

Potencial gravitatorio

21. Calcula:

a) **El potencial gravitatorio creado por una masa *m* = 5 000 kg en los puntos A y B situados a 10 m y 20 m, respectivamente, de m (considera la masa como una partícula).**

b) **El trabajo realizado para desplazar otra masa de 25 kg desde A hasta B (Dato: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻²).**

a) $V_A = -\frac{GM}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}{10} = -3{,}3 \cdot 10^{-8}$ J/kg

$V_B = -\frac{GM}{r_B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^3}{20} = -1{,}6 \cdot 10^{-8}$ J/kg

b) $W = (V_B - V_A) \cdot m = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ J/kg $\cdot$ 25 kg $= 4 \cdot 10^{-7}\ J$

22. Calcula la altura a la que se debe colocar un cuerpo para que pierda el 20 % de su peso.

a) **¿Cuánto vale el potencial gravitatorio terrestre en ese punto?**

b) **¿Qué diferencia de potencial existe entre ese punto y la posición inicial del cuerpo, la superficie terrestre?**

Datos: radio de la Tierra *R* = 6 370 km; masa de la Tierra *M* = 5,98 · 10²⁴ kg; constante de gravitación *G* = 6,57 · 10¹¹ N m² kg⁻².

a) $\frac{GMm}{(R+h)^2} = 0{,}8\ \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow R^2 = 0{,}8\ (R+h)^2\ ;$

$$h = \frac{R\ (1 - \sqrt{0{,}8})}{\sqrt{0{,}8}} = 752 \text{ km}$$

b) $V_h = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{7121{,}8 \cdot 10^3} = -5{,}6 \cdot 10^7$ J/kg

$$V_o = -\frac{GMm}{R_T} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6}} = -6{,}26 \cdot 10^{7}\ \text{J/kg}$$

$$V_h - V_o = (6{,}26 - 5{,}6) \cdot 10^{7} = 0{,}66 \cdot 10^{7}\ J/kg$$

Trabaja como un científico

1. La gráfica que has obtenido, ¿cumple la ley de las órbitas de Kepler?

Sí se cumple. La grafica obtenida es una elipse.

2. Dibuja una línea del Sol a la posición de Mercurio correspondiente al 20 de diciembre, por ejemplo, y otra correspondiente al 30 de diciembre. Las dos líneas y la órbita determinan un área barrida durante el intervalo de diez días. Sombrea ligeramente esta superficie. Calcula el área de esta superficie teniendo en cuenta que para una pequeña porción de elipse el área es aproximadamente:

$$\textit{área} = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$

donde *r* es el radio medio de la órbita (media aritmética del semieje mayor y el semieje menor). El ángulo *u* se obtiene hallando la diferencia en grados entre el 20 y el 30 de diciembre.

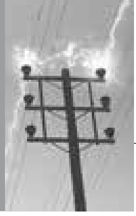
Respuesta abierta.

3. Selecciona otros dos periodos de 10 días en los meses de octubre y noviembre y repite las mismas operaciones que en el apartado anterior. ¿Se cumple la tercera ley de Kepler en la órbita que has obtenido?

Respuesta abierta.

4. Si no se cumple exactamente, ¿cuáles son las posibles causas de error?

La causa más importante de error está en la representación de las distancias entre Mercurio y el Sol. Se ha tomado unidad de estas distancia la UA. Hemos tomado como distancia entre dos círculos concéntricos un décimo de UA. No podemos representar con precisión la distancia en UA de las distintas posiciones situadas entre dos círculos concéntricos.



Actividades

1. Utilizando las ecuaciones dimensionales, indica las unidades en que se mide la constante *K*.

De la ley de Coulomb despejamos la constante *K:*

$$K = \frac{F \cdot r^2}{q_1 \cdot q_2} \;;\; [K] = [F] \,.\, [r]^2 \,.\, [q]^{-2} = M \cdot L^3 \cdot T^{-2} \,.\, [It]^{-2}$$

$$= ML^3I^{-2}T^{-4}$$

De acuerdo con estas dimensiones la constante *K* se mediría en $kg \cdot m^3 \cdot A^{-2} \cdot t^{-4}$

2. Un cuerpo electrizado se ha cargado con +2 μC. Este cuerpo:

a) **Ha ganado protones.**

b) **Ha perdido protones.**

c) **Ha perdido electrones.**

Señala la afirmación correcta, razonando la respuesta.

Responde a las mismas cuestiones en el caso de que la carga fuera −2 μC.

La electrización consiste en una pérdida o ganancia de electrones. El electrón tiene carga negativa. Por tanto, si un cuerpo al electrizarse pierde electrones quedará cargado positivamente, y quedará cargado con carga negativa si gana electrones. Por tanto ha perdido electrones (respuesta c)) en el primer caso. Y ha ganado electrones en el segundo caso.

3. Dos cuerpos electrizados se repelen con una fuerza de $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N cuando están separados por una distancia de 2 m. ¿Qué relación existe entre la carga de ambos cuerpos?

De la ley den Coulomb despejamos las cargas:

$$Q_1 \cdot Q_2 = \frac{F \cdot r^2}{K} = \frac{2{,}25 \,.\, 10^{-5} \,.\, 4}{9 \cdot 10^9} = 10^{-14}\, C^2$$

4. Completa en tu cuaderno: la intensidad de un campo eléctrico depende de la carga *Q* que lo crea y de la distancia.

a) **Si la carga se duplica el campo se…**

b) **Si la distancia se duplica el campo se…**

c) **Si la carga y la distancia se duplican el campo se…**

a) Se duplica: $E_1 = 2E$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{K \cdot 2Q/r^2}{K \cdot Q/r^2} = 2$$

b) Se reduce a la cuarta parte: $E_1 = E/4$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{KQ/(2r)^2}{KQ/r^2} = \frac{1}{4}$$

c) Se reduce a la mitad: $E_1 = E/2$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{K \cdot 2Q/4r^2}{K \cdot Q/r^2} = \frac{1}{2}$$

5. Dibuja aproximadamente las líneas de campo eléctrico contenidas en un plano en el cual hay dos cargas eléctricas, de valor *Q* y −2*Q*, respectivamente.

Actividad de respuesta abierta.

6. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Explica la relación entre campo y potencial eléctricos.**

b) **Una partícula cargada se mueve espontáneamente hacia puntos en los que el potencial electrostático es mayor. Razona si de este comportamiento puede deducirse el signo de la carga.**

a) De $E = \frac{KQ}{r^2}$ y $V = \frac{KQ}{r^2}$ se obtiene la relación $V = E \cdot r$

b) Sí: la carga negativa se mueve hacia los potenciales más altos.

7. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **En un relámpago típico, la diferencia de potencial entre la nube y la Tierra es 10^9 V y la cantidad de carga transferida vale 30 C. ¿Cuánta energía se libera?**

b) **Suponiendo que el campo eléctrico entre la nube y la Tierra es uniforme y perpendicular a la Tierra y que la nube se encuentra a 500 m sobre el suelo, calcula la intensidad del campo eléctrico.**

a) $W = (V_B - V_A) \,.\, q = 10^9 V \cdot 30C = 3 \cdot 10^{10}\, J$

b) $E = \frac{V}{r} = \frac{10^9 V}{500 \text{ m}} = 2.\, 10^6\, N/C$

8. Un protón se acelera desde el reposo bajo la acción de un campo eléctrico uniforme *E* = 640 N/C. Calcula el tiempo que tarda en alcanzar una velocidad de $1{,}2 \cdot 10^6$ m/s. Datos: carga del protón: $1,\, 6 \cdot 10^{-19}$ C; m = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{F/m} = \frac{v \cdot m}{E \cdot q} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{640 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$

$$= 1{,}96 \cdot 10^{-5}\, s$$

9. Si se libera un protón desde el reposo en un campo eléctrico uniforme, ¿aumenta o disminuye su potencial eléctrico? ¿Qué puedes decir acerca de su energía potencial?

Si un protón se abandona en un campo uniforme, estará sometido a una fuerza con la misma dirección y sentido que el campo. Por tanto, su potencial disminuye. Lo mismo ocurre con su energía potencial.

10. Para pasar del punto *A* al punto *B* de la Figura 5.9 se puede hacer por tramos horizontales y verticales. ¿Por qué en los tramos horizontales no se produce trabajo? Razona la respuesta.

El campo eléctrico en de la Figura 5.9 es uniforme. Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* depende exclusivamente de la distancia *d,* medida en la dirección del campo en este caso vertical. La distancia *d* es cero si los puntos *A* y *B* están en la misma horizontal. Y la diferencia de potencial entre dichos puntos también sería cero.

$V_B - V_A = E\, d = 0$ si A y B están en la misma horizontal. El trabajo también sería nulo.

$$W = (V_B - V_A)\, q = 0$$

11. ¿Cómo se modifica la capacidad si se modifica la diferencia de potencial de un condensador?

De la definición de capacidad se deduce que, para una carga dada, la capacidad es inversamente proporcional a la diferencia de potencial. $C\, V = Q$

12. La constante de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9$ N m²/C² se puede expresar en función de la constante ε_0 . Demuestra que esta constante se puede expresar en F/m.

$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{KQ/r} = \frac{r}{K}$; la constante K depende de la constante dieléctrica del medio. En el caso de vacío es $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$

$$C = 4\pi\varepsilon_o r \ ; \ \varepsilon_o = \frac{C}{4\pi/r} \text{ en } F/M$$

13. Un condensador relleno de aire se conecta a una batería para cargarlo. Después de quedar cargado, lo conectamos a un voltímetro. Explica la variación del potencial, de la capacidad y de la carga cuando se introduce un dieléctrico entre las placas del condensador.

El dieléctrico aumenta la capacidad del condensador. Si la carga con que se ha cargado no varía, el potencial disminuye.

14. ¿Por qué no es recomendable cobijarse bajo un árbol durante una tormenta?

Por el efecto punta: la probabilidad de que se produzca una descarga eléctrica entre una nube tormentosa y la Tierra es mayor en las zonas terminadas en punta, un árbol, por ejemplo.

15. Durante un terremoto, ¿dónde te sientes más seguro, en la calle o en el interior de tu casa? ¿Y durante una tormenta con mucha descarga eléctrica? Razona la respuesta.

Durante un terremoto el peligro está en el derrumbamiento de los edificios. Por esto se siente uno más seguro en la calle. En cambio, durante una tormenta con descarga eléctrica la seguridad es mayor en el interior la casa, porque hace de jaula de Faraday.

16. Los aviones vuelan a gran altura, atravesando nubes tormentosas. Sin embargo, es muy difícil que un avión sea derribado por un rayo. ¿Por qué?

El avión hace de efecto jaula frente a las descargas exteriores.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Cómo explica la Física moderna la interacción de dos cargas eléctricas?

Como un intercambio de fotones entre las cargas eléctricas que interactúan.

2. Se supone que la fuerza gravitatoria se transmite de unos cuerpos a otros mediante partículas portadoras. ¿Qué nombre reciben estas partículas?

Las hipotéticas partículas portadoras de la interacción gravitatoria reciben el nombre de gravitones.

3. ¿Por qué no se han detectado aún los bosones del campo gravitatorio?

Porque transportan una energía muy pequeña.

4. ¿Qué diferencias existen entre los fotones y los gravitones?

Los fotones no actúan directamente entre ellos, los gravitones sí.

Los fotones transportan una energía muy grande comparada con la energía que se supone poseen los gravitones.

Los fotones llevan asociadas ondas electromagnéticas detectables. Se especula que los gravitones llevan asociadas ondas gravitacionales, que no se han detectado hasta la fecha.

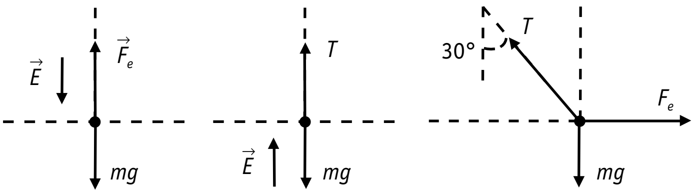
Problemas propuestos

Campo eléctrico: intensidad, potencial

1. Una pequeña esfera de masa m y carga q cuelga de un hilo de masa despreciable.

a) **Se aplica un campo eléctrico vertical. Cuando dicho campo va dirigido hacia arriba, la tensión soportada por el hilo es 0,03 N, mientras que cuando se dirige hacia abajo, la tensión es nula. Determina el signo de la carga q y calcula la masa de la esfera.**

b) **A continuación se aplica solamente un campo horizontal de valor E = 100 V/m y se observa que el hilo se desvía un ángulo α = 30° respecto de la vertical. Calcula el valor de la carga.**



a) La tensión de hilo será cero cuando $|m\vec{g}| = |\vec{F}_e|$: Es decir, se debe cumplir que la fuerza eléctrica $|\vec{E}_1| \cdot q$ tenga sentido contrario al campo eléctrico. Esto solamente es posible si la carga es negativa.

Si la tensión no es cero se cumple:

$$T = mg + Eq = 2\ mg\ ;\ m = \frac{T}{2g} = \frac{0{,}03\ N}{16{,}6\ m/s^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ kg$$

b) De la figura se deduce:

$$E \cdot q = T \cdot \text{sen } 30°\ ;\ mg = T \cdot \cos 30° \Rightarrow \text{tag } 30° = \frac{Eq}{mg}$$

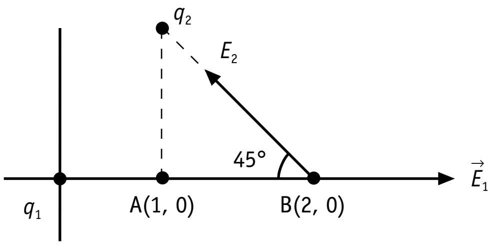
$$q = \frac{\text{tag } 30 \cdot m \cdot g}{E} = \frac{0{,}577 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{100} = 8{,}48 \cdot 10^{-5}\ C$$

2. Una carga de $3 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en el origen de coordenadas y otra carga de $-3 \cdot 10^{-6}$ C está situada en el punto (1, 1) m.

a) **Dibuja en un esquema el campo eléctrico en el punto *B* (2, 0) m y calcula su valor. ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto *B*?**

b) **Calcula el trabajo necesario para desplazar una carga de $10 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto *A* (1,0) m hasta el punto *B* (2,0).**

Dato: constante de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².



$a)$ $|\vec{E}_1| = \dfrac{Kq_1}{r^2} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{4} = 6{,}75 \cdot 10^3\ N/C$;

$\vec{E}_1 = 6{,}75 \cdot 10^3 \cdot \vec{i}\ N/C$

$\vec{E}_2 = \dfrac{Kq_2}{r^2} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{2} = 13{,}5 \cdot 10^3\ N/C$;

$|E_{2x}| = |E_{2y}| = 13{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}707 = 9{,}5 \cdot 10^3\ N/C$

$\Sigma E_x = E_1 - E_{2x} = 6{,}75 \cdot 10^3 - 9{,}5 \cdot 10^3 = -2{,}75 \cdot 10^3$

$\vec{E}_T = -2{,}75 \cdot 10^3\ \vec{i} + 9{,}5 \cdot 10^3\ \vec{j}$; $|\vec{E}_T| = 9{,}94 \cdot 10^3\ N/C$

$V_B = V_1 + V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5{,}6 \cdot 10^3\ V$

$b)$ $V_A = V_1 + V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{1}\right) = 0$

$W = (V_B - V_A) \cdot q = -5{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = -5{,}6 \cdot 10^{-2}\ J$

3. Una bolita de 1 g, cargada con +5 · 10^{-6} C, pende de un hilo que forma 60° con la vertical en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme en dirección horizontal.

a) **Explica, con ayuda de un esquema, qué fuerzas actúan sobre la bolita y calcula el valor del campo eléctrico.**

b) **Razona qué cambios experimentaría la situación de la bolita si: *i)* se duplicara el campo eléctrico; *ii)* se duplicara la masa de la bolita.**

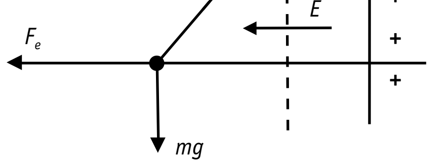
Dato: tomar g = 10 m/s².

a) Fuerzas que intervienen: El peso de la bola $\vec{P} = m\vec{g}$, la fuerza eléctrica que ejerce el campo y la tensión de hilo T.

En el equilibrio se cumple: $T \cdot \text{sen } 60° = E \cdot q$ y $T \cdot \cos 60° = \text{mg}$

$$\text{tag } 60° = \frac{E \cdot q}{m \cdot g} \ ; \ E = \frac{\text{tg } 60° \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{5 \cdot 10^{-6}} = 3{,}4 \cdot 10^3\ N/C$$

$b)$ $\text{tag } \alpha = \dfrac{2Eq}{mg} = \dfrac{2 \cdot 3{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{10^{-3} \cdot 9{,}8} = 3{,}469$; $\alpha = 74°$



Si se duplica la masa:

$$\text{tag } \alpha = \frac{E \cdot q}{2\ mg} = \frac{3{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 0{,}867 \ ; \ \alpha = 41°$$

4. Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje *X:* una de valor Q_1 en la posición (1, 0), y otra de valor Q_2 en (–1, 0). Sabiendo que todas las distancias están expresadas en metros, determina en los dos casos siguientes:

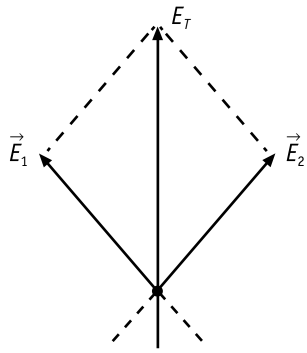
a) **Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0, 1) sea el vector $\vec{E} = 2 \cdot 10^5\ \vec{j}$ N/C, siendo $\vec{j}$ el vector unitario en el sentido del eje *Y*.**

b) **La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2, 0) sea cero.**

Dato: constante de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².

a) Para que el campo resultante tenga la dirección del eje *Y* con sentido positivo se ha de cumplir:

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \Rightarrow q_1^+ = q_2^+$



$$E_{Ty} = E_{1y} + E_{2y} = 2E_{1y} = 2|\vec{E}_1| \cdot \cos 45° = 2\,\frac{Kq_1}{r_1^2} \cos 45°$$

$$q_1 = \frac{E_{Ty} \cdot r_1^2}{2 \cdot K \cdot \cos 45°} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}707} = 3{,}1 \cdot 10^{-5}\ C$$

$b)$ $V_1 + V_2 = 0$; $\dfrac{Kq_1}{r_1} + \dfrac{Kq_2}{r_2} = 0$; $\dfrac{q_1}{1} + \dfrac{q_2}{3} = 0 \Rightarrow q_2 = -3q_1$

5. Si una carga puntual produce, a cierta distancia *r,* un potencial eléctrico de 10 V y un campo de módulo *E,* ¿cuánto vale el potencial en otro punto en el cual el campo es *E*/4?

Si $E = \dfrac{Kq}{r^2}$ y $E_1 = \dfrac{Kq}{r_1^2}$ se cumple $\dfrac{E}{E_1} = \dfrac{r_1^2}{r^2} \Rightarrow \dfrac{E}{E/4} = \left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2$

De donde se deduce $4 = \left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2 \Rightarrow r_1 = 2r$. De la definición de potencial tenemos $V = \dfrac{Kq}{r}$; $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{r}{r_1}$; $V_1 = \dfrac{V \cdot r}{r_1} = \dfrac{10r}{2r} = 5V$

6. Tres cargas puntuales de valores q_1 = +3 nC, q_2 = –5 nC y q_3 = +4 nC están situadas, respectivamente, en los puntos de coordenadas (0, 3), (4, 3) y (4, 0) en el plano XY.

Si las coordenadas están expresadas en metros, determina:

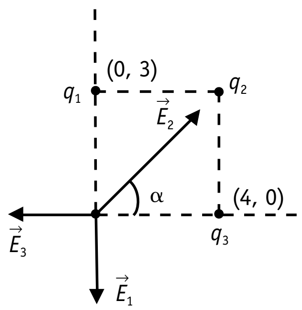
a) **La intensidad del campo eléctrico resultante en el origen de coordenadas.**

b) **El potencial eléctrico resultante en el origen de coordenadas.**

c) **La fuerza ejercida sobre una carga *q* = 1 nC que se sitúa en el origen de coordenadas.**

d) **La energía potencial electrostática del sistema formado por las tres cargas q_1, q_2, q_3.**

Dato: constante de ley de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².



a) De la figura se deduce:tag $\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$

$$E_{2x} = |\vec{E}_2| \cdot \cos\alpha = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{25} \cdot 0{,}8 = 1.44\ N/C$$

$$E_{2y} = |\vec{E}_2| \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{45}{25} \cdot 0{,}6 = 1{,}08\ N/C\ ;$$

$$E_1 = 9 \cdot 10^9\ \frac{3 \cdot 10^{-9}}{9} = 3\ N/C$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9\ \frac{4 \cdot 10^{-9}}{16} = 0{,}44\ N/C$$

$$\Sigma E_x = 1{,}44 - 0{,}44 = 1\ \text{N/C}\ ;\ \Sigma E_y = 1{,}08 - 3 = -1{,}92\ N/C$$

El campo resultante será: $|\vec{E}_T| = 2{,}16\ N/C$

b) $V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\dfrac{3 \cdot 10^{-9}}{3} - \dfrac{5 \cdot 10^{-9}}{5} + \right.$

$\left. + \dfrac{4 \cdot 10^{-9}}{4}\right) = 9V$

c) $|\vec{F}_T| = |\vec{E}_T| \cdot q = 2{,}16\ N/C \cdot 10^{-9}\ C = 2{,}16 \cdot 10^{-9}\ N$

d) La energía potencial del sistema es igual a la suma de la energía potencial asociada a cada par de cargas:

$$U = K\left(\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-18} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{-15}{4} + \frac{12}{5} + \frac{-20}{3}\right) = -7{,}2 \cdot 10^{-8}\ J$$

Campo eléctrico uniforme

7. En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -10^3\ \vec{i}$ N/C. Un protón penetra en dicha región con una velocidad $\vec{v} = 10^5\ \vec{i}$ m/s. Calcula:

a) Su posición 1 μs después de haber penetrado en esa región.

b) Su velocidad en ese instante.

Datos: carga del protón $q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Aplicamos la ley de la dinámica

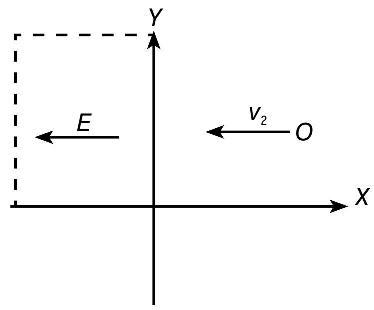
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{\vec{E}q}{m} = \frac{-10^3\ \vec{i} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = -9{,}58 \cdot 10^{10}\ m/s^2$$

a) $x = v_ot + \dfrac{1}{2}at^2 = 10^5 \cdot 10^{-6} - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}58 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-12} =$

$= 5{,}2 \cdot 10^{-2}$ m

b) $v = v_o + at = 10^5 - 9{,}58 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} = 4{,}2 \cdot 10^3\ m/s$

8. Un electrón se propaga en el plano *XY* con velocidad v_0 constante de 100 m/s en el sentido negativo del eje *X*. Cuando el electrón cruza el plano $x = 0$ se adentra en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme de $8 \cdot 10^{-9}$ N/C en el sentido negativo del eje *X*, tal como se indica en la figura.



a) Describe el tipo de movimiento que seguirá el electrón una vez se haya introducido en esa región del espacio. Discute cuál será la velocidad final del electrón.

b) Calcula la fuerza ejercida sobre el electrón así como la aceleración que este experimenta.

Datos: masa del electrón me = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón $q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Al ser negativa la carga del electrón la fuerza a que está sometido es opuesta al sentido del campo. Esta fuerza, pues, frena el movimiento del electrón hasta detenerlo. Luego será acelerado en sentido opuesto al que tenía, regresando a la posición X = 0 con el ismo módulo de velocidad. Por tanto, en ese punto se cumple:

$$\vec{v}_o = -100\ \vec{i}\ m/s\ ;\ \vec{v}_f = 100\ \vec{i}\ m/s$$

b) $\vec{F} = \vec{E}q = -8 \cdot 10^{-9}\ \vec{i} \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 1{,}28 \cdot 10^{-27}\ \vec{i}\ N$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1{,}28 \cdot 10^{-27}\ \vec{i}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1\,407\ m/s^2$$

9. Un electrón que se mueve con una velocidad $\vec{v} = 2 \cdot 10^6\ \vec{i}$ m/s penetra en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme. Debido a la acción del campo, la velocidad del electrón se anula cuando este ha recorrido 90 cm. Calcula, despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria:

a) El módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico existente en dicha región.

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico en el proceso de frenado del electrón.

Datos: masa y carga del electrón $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. $q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La fuerza está dirigida en sentido opuesto a la velocidad; por tanto, el movimiento es uniformemente retardado hasta que el electrón se detiene.

Hallamos la aceleración: $v^2 - v_o^2 = 2ax$

$$a = \frac{v_1 - v_o^2}{2x} = \frac{0 - 4 \cdot 10^{12}}{1{,}8} = -2{,}22 \cdot 10^{12}\ \text{m/s}^2$$

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (-2{,}22 \cdot 10^{12})}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 12{,}65\ N/C \text{ en}$$

dirección del eje *X* con sentido negativo.

b) $W = F \cdot x = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (-2{,}22 \cdot 10^{12}) \cdot 0{,}9 = -1{,}82 \cdot 10^{-18}\ J$

10. Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme normalmente a sus líneas de fuerza con una velocidad $v = 10^4$ m/s. La intensidad del campo es 10^5 V/m.

Calcula:

***a)* La aceleración que experimenta el electrón.**

***b)* La ecuación de la trayectoria que sigue el electrón.**

a) La fuerza sobre el electrón en el interior de un campo eléctrico es $F = qE$.

Por otra parte, se cumple la Segunda Ley de Newton, $F = ma$, así que:

$$F = qE = m_e a$$

$$a = \frac{qE}{m_e} = \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^5\ \text{V/M}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}76 \cdot 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

La dirección de la aceleración es la del campo, que suponemos la del eje Oy.

b) El electrón está sometido a dos movimientos: uno uniforme a lo largo del eje Ox y otro uniformemente acelerado según el eje Oy, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 t = 10^4\ t$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}76 \cdot 10^{16}\ t^2$$

Despreciamos los efectos gravitatorios. Eliminando el tiempo de las expresiones anteriores obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria:

$$y = 8{,}8 \cdot 10^7\ x^2$$

11. Un campo uniforme vale 6 000 N/C. Un protón (q = = 1,6 · 10^{-19} C; m = 1,67 · 10^{-27} kg) se libera en la placa positiva. ¿Con qué velocidad llega a la placa negativa, si la separación entre placas es 0,20 cm?

La fuerza sobre el protón será:

$$F = qE = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 6 \cdot 10^3\ \text{N/C} = 9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

Por tanto, experimentará una aceleración:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 5{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{m/s}^2$$

Para hallar la velocidad aplicamos la ecuación:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax = 2 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{m/s}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

de donde $v = 4{,}8 \cdot 10^4$ m/s.

12. Una esferita que porta una carga de +25 · 10^{-9} C está sostenida por un hilo entre dos placas paralelas horizontales que se encuentran a 3,0 cm de distancia entre sí.

***a)* Cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 6 000 V, la tensión del hilo es cero. ¿Cuál es la masa de la esfera?**

***b)* ¿Cuál es la tensión del hilo cuando se invierte la polaridad de las placas?**

a) Si el hilo no está tenso, se cumple que:

$$Eq = mg; \qquad \text{o} \qquad \frac{V}{d} q = mg$$

de donde:

$$m = \frac{Vq}{dg} = \frac{6\,000\ \text{V} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^{-2}\ \text{N}$$

b) Cuando existe tensión, se cumple:

$$T = mg + \frac{Vq}{d} =$$

$$= 50 \cdot 10^{-4}\ \text{N} + \frac{6\,000\ \text{V} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10^{-2}\ \text{kg}$$

13. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2,0 · 10^6 m/s paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme 200 V/m. Determina:

***a)* La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a 0,50 · 10^6 m/s.**

***b)* La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.**

a) Cuando el electrón se mueve en sentido contrario al campo es frenado por este con una fuerza $F = Eq$. El trabajo realizado por esta fuerza es igual a la disminución de la energía cinética:

$$Eqx = \frac{1}{2} m\,(v_0^2 - v_f^2)$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (4 - 0{,}25) \cdot 10^{12}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{200\ \text{V/m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 5{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

b) La variación de la energía potencial coincide con la disminución de la energía cinética por ser conservativo el campo eléctrico.

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} m\,(v_0^2 - v_f^2) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2/\text{s}^2 =$$

$$= 17{,}0 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 10{,}6\ \text{eV}$$

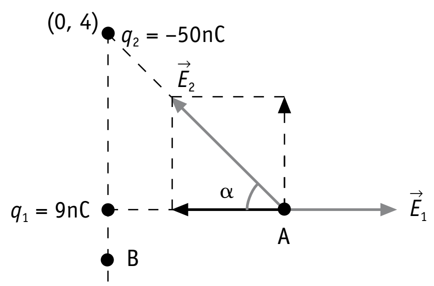
Potencial eléctrico. Energía potencial

14. Una carga puntual positiva de 9 nC está situada en el origen de coordenadas. Otra carga puntual de –50 nC está situada sobre el punto de coordenadas (0, 4). Determina:

***a)* El valor del campo eléctrico en el punto A de coordenadas (3, 0).**

Representa gráficamente el campo eléctrico debido a cada carga y el campo total en dicho punto.

***b)* El trabajo necesario para trasladar una carga puntual de 3 μC desde ese punto hasta el punto B de coordenadas (0, –1). Todas las distancias vienen dadas en metros.**



a) $|\vec{E}_1| = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{9 \cdot 10^{-9}}{9} = 9\ N/C$

$|\vec{E}_2| = 9 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{50 \cdot 10^{-9}}{25} = 18\ N/C;\ |\vec{E}_x| = |\vec{E}_1| - |E_{2x}| =$

$= 9 - 18 \cdot \cos\alpha = 9 - 18 \cdot \dfrac{3}{5} = -1{,}8\ N/C$;

$|\vec{E}_{2y}| = |\vec{E}_2| \cdot \operatorname{sen}\alpha = 18 \cdot \dfrac{4}{5} = 14{,}4\ N/C$

Por tanto, el campo resultante será: $\vec{E}_T = -1{,}8\ \vec{i} + 14{,}4\ \vec{j}$, cuyo módulo es:

$|\vec{E}_T| = 14{,}5\ N/C$

b) Hallamos el potencial resultante en los puntos *A* y *B*.

$$V_A = V_1 + V_2 = K \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{9}{3} - \frac{50}{5}\right) \cdot 10^{-9} =$$

$$= -63V$$

$$V_B = V_1 + V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{9}{1} - \frac{50}{5}\right) \cdot 10^{-9} = -9V$$

Trabajo necesario para trasladar la carga:

$$W = (V_B - V_A) \cdot q = (-9 + 63)\text{V} \cdot 3 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = 1{,}62 \cdot 10^{-7}\ J$$

15. Tres cargas positivas e iguales de valor $q = 2{,}0$ microculombios cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm. Determina:

***a)* El campo eléctrico en el centro del cuadrado.**

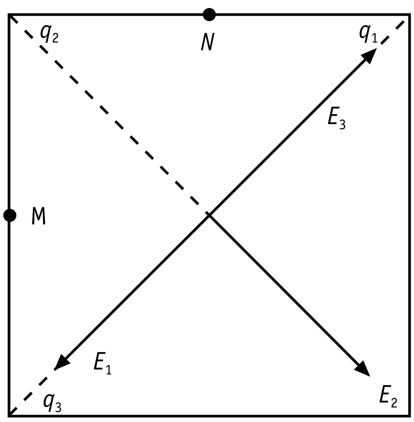
***b)* Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.**

a) De acuerdo con la figura que se muestra a continuación, los campos E_1, E_2 y E_3 tienen el mismo módulo. Por tanto, el campo resultante en el centro del cuadrado es igual a E_2, ya que E_1 y E_3 se anulan mutuamente. Se cumple, pues, que:

$$E_T = E_2 = K\,\frac{q_2}{r^2}$$

siendo: $\quad r^2 = \dfrac{l^2}{2} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$

$$E_T = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{N/C}$$



b) El potencial resultante es $V = V_1 + V_2 + V_3$ en cada uno de los puntos *M* y *N*.

$$V_M = V_1 + V_2 + V_3 = Kq\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$$

siendo $\quad r_1 = \sqrt{l^2 + \dfrac{l^2}{4}} = \sqrt{5}\,\dfrac{l}{2} = 1{,}118 \cdot 10^{-1}\ \text{m}$

$$r_2 = r_3 = \frac{l}{2} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Por tanto, el potencial será:

$$V_M = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} + \frac{1}{11{,}18 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}\right) = 8{,}8 \cdot 10^5\ \text{V}$$

En el punto *N* se cumple:

$$r_1 = r_2 = \frac{l}{2}; \qquad r_3 = \sqrt{\frac{5}{4}\,l}$$

por tanto, $V_M = V_N$. El trabajo realizado será cero:

$$W = q\,(V_M - V_N) = 0$$

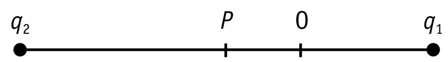
16. Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje *Ox*, $q_1 = -0{,}20 \cdot 10^{-6}$ C está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; $q_2 = +0{,}40 \cdot 10^{-6}$ C está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

***a)* ¿En qué puntos del eje *Ox* el potencial creado por las cargas es nulo?**

***b)* Si se coloca en el origen una carga $q = +0{,}40 \cdot 10^{-6}$ C, determina la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.**

Sea *P* el punto que se pide, situado sobre el eje *Ox* y a la derecha de q_2. El potencial creado por las cargas en ese punto viene dado por la expresión:

$$V = K\,\frac{q_1}{r_1} + K\,\frac{q_2}{r_2} = 0; \qquad \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} = 0$$



Si $|q_2| = 2\,|q_1|$, se debe cumplir que $|r_2| = 2\,|r_1|$.

a) Si el punto está entre q_2 y q_1, se debe cumplir también $|r_1| + |r_2| = 3$ m; del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = 2\,r_1 \\ r_1 + r_2 = 3\ \text{m} \end{array}\right\} \Rightarrow\ r_1 = 1\ \text{m}$$

Luego el origen de coordenadas cumple la condición del problema $V = 0$.

b) Si el punto está a la derecha de q_1, se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = 2\,r_1 \\ r_2 = r_1 + 3 \end{array}\right\} \ \text{de donde} \quad r_1 = 3\ \text{m}$$

El punto estará a la derecha del origen y distante 4 m de él.

La fuerza resultante sería:

$$|F| = |F_1| + |F_2| =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2} \cdot \left(\frac{0{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{1 \text{ m}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}4 - 10^{-6} \text{ C} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2^2 \text{ m}^2}\right) = 108 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

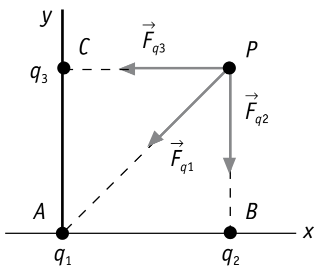
En forma vectorial, $\vec{F} = 108 \cdot 10^{-5}\, \vec{u}_x$ N.

17. Tres cargas puntuales $q_1 = 3$ μC, $q_2 = 1$ μC y una tercera carga desconocida q_3 se encuentran en el vacío colocadas en los puntos *A* (0, 0), *B* (3, 0) y *C* (0, 4), respectivamente. El potencial que crean las tres cargas en el punto *P* (3, 4) es 10,650 V. Calcula, teniendo en cuenta que las coordenadas vienen dadas en metros:

a) **El valor de la carga q_3.**

b) **La fuerza que experimentaría una carga de –7 μC colocada en el punto *P,* debido a la presencia de las otras tres.**

Datos: constante $K = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².



a) Aplicamos el principio de superposición del potencial: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 10\,650V$

De la figura se obtiene:

$$V_1 = K\frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5} = 5\,400V$$

$$V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}}{4} = 2\,250v$$

$$V_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_3}{3} = 3 \cdot 10^9\, q_3\ ;\ q_3 = \frac{10\,650 - 7\,650}{3 \cdot 10^9} =$$

$$= 10^{-6} \text{ C} = 1\mu\text{C}$$

b) Aplicamos el principio de superposición para hallar la fuerza total:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_{1x}| \cdot \vec{i} + |\vec{F}_{1y}| \cdot \vec{j} = |\vec{F}_1| \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{i} + |\vec{F}_1| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\, \frac{3 \cdot 10^{-16} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{25}\left(-\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) =$$

$$= -4{,}54 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} - 6{,}05 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_{2x}| \cdot \vec{i} + |\vec{F}_{2y}| \cdot \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + |\vec{F}_2| \cdot (-\vec{j}) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{16} \cdot (-\vec{j}) = -3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\ N/C$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_{3x}| \cdot \vec{i} + |\vec{F}_{3y}| \cdot \vec{j} = -|\vec{F}_3| \cdot \vec{i} = -9 \cdot 10^9 \cdot$$

$$\cdot \frac{10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{9} \cdot \vec{i} = -7 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}$$

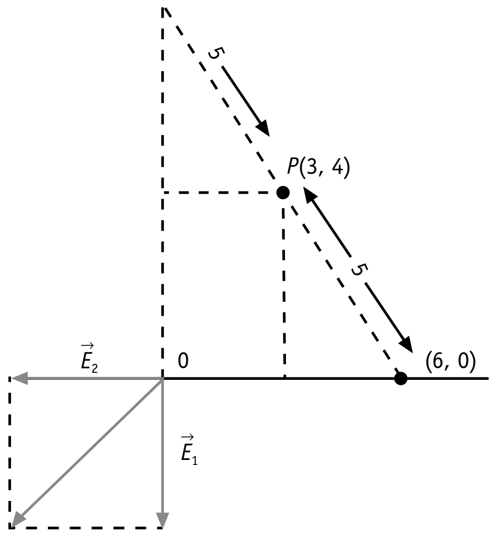
Fuerza resultante: $\vec{F}_T = -1{,}15 \cdot 10^{-2}\,\vec{i} - 1 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}$

18. Dos cargas puntuales iguales, de valor $2 \cdot 10^{-6}$ C, están situadas, respectivamente, en los puntos (0, 8) y (6, 0). Si las coordenadas están expresadas en metros, determina:

a) **La intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas (0, 0).**

b) **El trabajo que es necesario realizar para llevar una carga de $q = 3 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto *P* (3,4), punto medio del segmento que une ambas cargas, hasta el origen de coordenadas.**

Dato: constante de la ley de Coulomb $K = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².



a) Hallamos cada campo:

$$|\vec{E}_1| = \text{K}\,\frac{q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9\, \frac{2 \cdot 10^{-6}}{64} = 2{,}8 \cdot 10^2\ N/C$$

$$|\vec{E}_2| = 9 \cdot 10^9\, \frac{2 \cdot 10^{-6}}{36} = 5 \cdot 10^2\ N/C\ ;$$

Campo resultante: $\vec{E}_T = -5 \cdot 10^2\,\vec{i} - 2{,}8 \cdot 10^2\,\vec{j}$;

$|\vec{E}_T| = 5{,}73 \cdot 10^2$ N/C

b) Distancia entre ambas cargas $d = \sqrt{64 + 36} = 10$ m. El punto medio *P* dista 5 m de las cargas. Potencial en los puntos *O* y *P*.

$$V_O = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9\left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{8} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{5}\right) = 5\,250$$

$$V_P = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) = 7\,200V$$

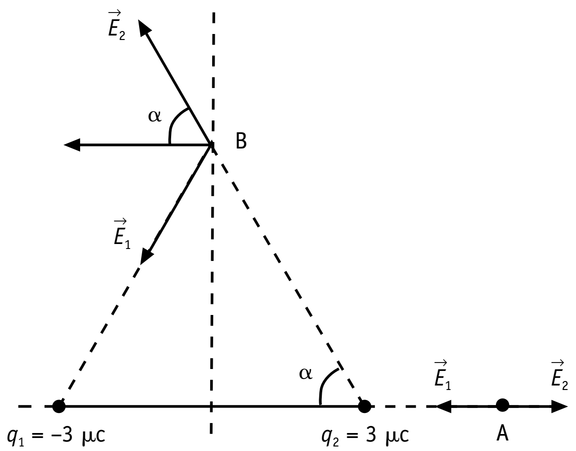
$$W_{PO} = (V_P - V_O) = (7\,200 - 5\,250) \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 5{,}85 \cdot 10^{-3}\ J$$

19. Dos cargas puntuales de –3 μC y +3 μC se encuentran situadas en el plano *XY,* en los puntos (–1, 0) y (1, 0), respectivamente. Determina el vector campo eléctrico:

a) **En el punto de coordenadas (10, 0).**

b) **En el punto de coordenadas (0, 10).**

(Las coordenadas vienen expresadas en metros).



Aplicamos el principio de superposición en los puntos *A* y *B*.

Punto *A* (10, 0). En este punto y tienen la dirección del eje *X*, pero sentido contrario. El campo resultante será:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = K\left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_2}{r_1}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}\left(\frac{3}{81} + \frac{1}{121}\right)\vec{i} =$$
$$= 110{,}2\,\vec{i}$$

Punto *B*. De la figura se deduce que:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{101} = 267{,}3\ N/C$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{10}{\sqrt{101}} = \frac{10}{10{,}04}\ ;\ \cos\alpha = \frac{1}{10{,}04}$$

$$\vec{E}_{xT} = -2 \cdot |\vec{E}_1| \cos\alpha \cdot \vec{i} = -2 \cdot 267{,}3 \cdot \frac{1}{10{,}04}\vec{i} = -53{,}24\,\vec{i}\ \text{N/C}\ ;$$
$$\vec{E}_{Ty} = 0$$

Por tanto, en el punto *B* el campo resultante es:

$$\vec{E}_B = -53{,}24\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

20. Una carga positiva de 6,0 microculombios se encuentra en el origen de coordenadas. Calcula:

a) **Cuál es el potencial a una distancia de 4 m.**

b) **Qué trabajo tenemos que hacer para traer otra carga positiva de 2,0 microculombios desde el infinito hasta esa distancia.**

c) **¿Cuál será la energía potencial de esa carga en dicha posición?**

a) En el punto que se indica, el potencial toma el valor:

$$V = K\frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V}$$

b) Teniendo en cuenta que el potencial representa el trabajo por unidad de carga, se cumple:

$$W = q\,V = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

c) La energía potencial vale:

$$E_p = K\frac{Qq}{r} =$$
$$= 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

21. Dos esferas metálicas de 6,0 y 9,0 cm de radio se cargan a 1,0 · 10^{-6} C cada una, y luego se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable. Calcula:

a) **El potencial de cada esfera después de la unión.**

b) **La carga de cada esfera después de la unión.**

De la expresión se deduce que el potencial de la primera esfera es mayor porque $r_1 < r_2$. Por tanto, si se ponen en contacto pasará una carga *q* de la primera esfera a la segunda hasta que se igualan los potenciales. En ese instante se cumple:

$$\frac{10^{-6} - q}{6 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-6} + q}{9 \cdot 10^{-2}}.\ \text{De donde se deduce que}\ q = \frac{1}{5} \cdot 10^{-6}\ C.$$

En el equilibrio electrostático el potencial común de ambas esferas será:

$$V_1 = V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-2}} = 9 \cdot 10^9\,\frac{10^{-6} + 0{,}2 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-2}} =$$
$$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} V$$

Carga de cada esfera en equilibrio electrostático:

sfera: $q_2 = 10^{-6} + 0{,}2 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ C$

22. Una carga positiva de 6,0 μC se encuentra en el origen de coordenadas.

Calcula:

a) **¿Cuál es el potencial a una distancia de 4 m?**

b) **¿Qué trabajo tenemos que hacer para traer otra carga positiva de 2,0 μC desde el infinito hasta esa distancia?**

c) **¿Cuál será la energía potencial de esa carga en dicha posición?**

a) En el punto que se indica, el potencial toma el valor:

$$V = K\frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6\ .\ 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V}$$

b) Teniendo en cuenta que el potencial representa el trabajo por unidad de carga, se cumple:

$$W = q\,V = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

c) La energía potencial vale:

$$E_p = K\frac{Qq}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} =$$
$$= 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

23. Una esfera metálica aislada de 10 cm de radio se carga a un potencial de 1000 V; se toca esta esfera con otra también aislada de 2 cm de diámetro que a continuación se descarga; se repite esta operación cinco veces. Determina:

a) **La carga de la esfera antes de ser tocada.**

b) **La carga de dicha esfera después de la 5.ª operación.**

c) **Su potencial en ese momento.**

a) Carga inicial de la primera esfera

$$Q = \frac{V \cdot r}{K} = \frac{1000 \cdot 0{,}1}{9 \cdot 10^9} = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\ C$$

Al poner en contacto las dos esferas pasar-a una carga q de la 1ª a la 2ª hasta que el potencial de las dos esferas es el mismo. Entonces se cumple:

$\frac{Q-q}{r_1} = \frac{q}{r_2}$; $r_2\ (Q - q) = qr_1$, de donde se deduce que la carga transmitida es

$$q = \frac{r_2 Q}{r_1 + r_2} = \frac{Q}{11}$$

b) Al cabo de la 5.ª operación la carga que pierde la 1.ª es $q = 5\ \frac{Q}{11}$ y la carga final será $Q - q_t = Q - \frac{5Q}{11} = \frac{6Q}{11} = $
$= \frac{6 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-8}}{11} = 6 \cdot 10^{-9}\ C$

c) Potencial final $V = K\frac{Q}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{0{,}1} = 600V$

Teorema de Gauss

24. Aplicando el teorema de Gauss, obtén razonadamente el flujo del campo eléctrico sobre la superficie de un cubo de lado a en los siguientes casos:

a) Una carga *q* se coloca en el centro del cubo.

b) La misma carga *q* se coloca en un punto fuera del cubo.

a) El flujo que atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga neta contenida en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío $\Phi = q/\varepsilon_0$, y es independiente de la forma que tenga la superficie citada.

b) Si la carga está fuera de la superficie, fuera del cubo en este caso; el flujo es cero (las líneas de campo que entran son iguales a las líneas que salen).

25. Si el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q/ε_0, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

***a)* Cero; *b)* $Q / 4\pi\varepsilon_0 r^2$; c) Q/ε_0. Razona la respuesta correcta.**

La esfera cargada se comporta como una carga puntual colocada en el centro. Para hallar el campo en un punto exterior que dista *r* del centro de la esfera cargada aplicamos la definición de flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana que pase por dicho punto:

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = E \cdot S\ ;\ E = \frac{q}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

26. Se tiene un plano infinito con una densidad de carga superficial positiva σ-.

a) Deduce, utilizando el teorema de Gauss, el vector campo eléctrico generado por la distribución.

b) Calcula la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, en el mismo semiespacio, separados una distancia d en la dirección perpendicular al plano cargado. Justifica si cambiaría su respuesta si la dirección fuera paralela al plano cargado.

Tomamos como superficie gaussiana dos planos paralelos que contenga el plano citado en el enunciado. De acuerdo con el teorema De Gauss el campo eléctrico viene dado por $|\vec{E}| = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} =$
$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. El campo es uniforme, por tanto, la diferencia de potencial es $V_1 - V_2 = E \cdot d = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d$. Los dos puntos estarían en la misma superficie equipotencial. Por tanto, $V_1 = V_2 \Rightarrow V_1 - V_2 = 0$.

27. Una superficie esférica de radio *R* tiene una carga eléctrica *Q* distribuida uniformemente en ella.

***a)* Deduce la expresión del módulo del vector campo eléctrico en un punto situado en el exterior de dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.**

***b)* ¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2\,R$ y $r_2 = 3\,R$?**

Utilizamos como superficie gaussiana otras esferas concéntricas con la esfera dada y cada una que pase por cada uno de los puntos citados. Aplicamos el teorema Gauss a cada esfera gaussiana.

$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi\ 4R^2}$; $E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi\ 9R^2}$. Entre ambos campos existe la relación siguiente:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{9}{4}$$

Capacidad. Condensadores

28. La carga de cada armadura de un condensador plano es de 53 μC. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las armaduras si la capacidad del condensador es $4 \cdot 10^{-9}$ F?

Aplicamos la definición de capacidad: $C = \frac{Q}{V}$. De donde se deduce el valor del potencia.

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{53 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-9}} = 1{,}3 \cdot 10^4 V$$

29. Dos conductores aislados se han cargado al transferir electrones del uno al otro. Después de transferir $1{,}6 \cdot 10^{12}$ electrones, la diferencia de potencial entre los conductores es 14 V. ¿Cuál es la capacidad del sistema? (carga de un electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{14} = 1{,}8 \cdot 10^{-18} F$$

30. Se desea construir un condensador plano de 1 F de capacidad con placas cuadradas separadas entre sí 1 cm y con el vacío entre ellas. ¿Qué longitud deben tener los lados de las placas?

La capacidad de un condensador plano viene dada por $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, siendo $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ la constante dieléctrica del vacío, *S* la superficie de las placas, en este caso $S = L^2$, y d es la distancia entre las placas. De la definición de capacidad del condensador despejamos la superficie de las placas.

$$S = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_o}\ ;\ L = \sqrt{\frac{C \cdot d}{\varepsilon_o}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}}} = 3{,}36 \cdot 10^4 \text{ m} =$$
$= 33{,}6$ km

Actividades

1. Indica si es falso o verdadero:

a) Un electrón en reposo crea un campo magnético.

b) Un electrón nunca crea un campo magnético.

c) Un electrón en movimiento crea dos campos: uno eléctrico y otro magnético.

d) Un electrón no crea ningún tipo de campo.

a) Falso. Porque un electrón en reposo solamente crea un campo eléctrico.

b) Falso. Porque un electrón crea un campo magnético si está en movimiento.

c) Verdadero. Como consecuencia de las afirmaciones anteriores.

d) Falso.

2. Cuando un imán de barra se rompe en varios pedazos, cada uno de estos se convierte en un imán con su polo Norte y su polo Sur. Explica este hecho utilizando la teoría de los dominios magnéticos.

La barra imantada está formada por dominios magnéticos con la misma orientación. Por tanto, si la barra se rompe, cada pedazo estará formado por dominios magnéticos con la misma orientación que tenía antes.

3. Si golpeas un imán con un martillo, el imán pierde su magnetismo. Lo mismo ocurre si lo calientas. Intenta explicar estos hechos con la teoría de los dominios magnéticos.

Al golpear o al calentar el imán, el movimiento de agitación de las moléculas hace que los dominios magnéticos pierdan la orientación común que poseían. En consecuencia, los dipolos magnéticos quedan desordenados y no originan un campo magnético resultante al exterior.

4. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Razona cómo podrías averiguar, con ayuda de una carga, si en una región del espacio existe un campo eléctrico o un campo magnético.

b) Un haz de protones atraviesa sin desviarse una zona en la que existe un campo eléctrico y otro magnético. Razona qué condiciones deben cumplir dichos campos.

a) El campo eléctrico actúa siempre sobre una carga eléctrica. Esté ésta en reposo o en movimiento. En cambio, un campo magnético solamente actúa sobre cargas en movimiento. Por tanto, para averiguar el tipo de campo que existe en esa región se coloca una carga Q en reposo; si la carga no se mueve bajo la acción del campo desconocido, este campo es magnético.

b) Si los protones no se desvían, ambos campos tienen la misma dirección: la dirección del movimiento: La fuerza eléctrica $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ tiene la misma dirección del campo. Y la fuerza magnética $\vec{F} = q\ (\vec{v} x \vec{B})$ es nula si el campo tiene la misma dirección que la velocidad.

5. Una partícula cargada se mueve en una región del espacio donde únicamente existe un campo magnético constante.

a) ¿Qué se puede afirmar del módulo de su velocidad? Razona la respuesta.

b) Razona en qué casos la fuerza sobre la partícula podría ser nula. Si la fuerza no es nula, ¿cuál es el ángulo que se forma entre la velocidad de la partícula y dicha fuerza?

a) La fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad. Por tanto, se trata de una fuerza centrípeta, no produce aceleración tangencial. El módulo de la velocidad permanece constante.

b) La fuerza es nula cuando se cumple uno de los siguientes casos: la velocidad es nula o es paralela al campo magnético, el campo magnético es nulo.

El ángulo viene dado por sen $\alpha = \dfrac{F}{q \cdot v \cdot B}$

6. En un instante dado, un protón se mueve sobre el eje *Ox* en sentido positivo, en una región en que existe un campo magnético en sentido negativo del eje *Oz*. ¿Cuál es la dirección y sentido de la fuerza magnética?

Según el producto vectorial $\vec{F} = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$, la fuerza tiene que ser perpendicular al plano $\vec{v}$, $\vec{B}$. En este caso, el plano definido por $\vec{v}$, $\vec{B}$ es el plano *xz*. Por tanto, la fuerza magnética tiene la dirección del eje *0y*.

7. Un electrón se mueve con una velocidad *v* paralela a la dirección de un campo magnético. ¿Qué fuerza experimenta este electrón?

Cuando una carga se mueve en un campo magnético, está sometida a una fuerza definida por la Ley de Lorentz: $\vec{F} = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$. Si la velocidad es paralela a la dirección del campo magnético el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ es nulo. Por tanto, el electrón no estaría sometido a ninguna fuerza.

8. De los tres vectores de la ecuación $\vec{F} = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$:

a) ¿Qué pares son siempre perpendiculares?

b) ¿Cuáles forman ángulos cualesquiera entre sí?

c) ¿En qué caso uno cualquiera de los tres vectores es perpendicular a los otros dos?

a) De la definición de producto vectorial, se deduce que el vector $\vec{F}$ es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Por tanto, los pares de vectores $\vec{F}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. Es decir:

$$\vec{F} \perp \vec{v}, \qquad \vec{F} \perp \vec{B}$$

b) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ pueden formar un ángulo cualquiera.

c) En el caso particular de que $\vec{v} \perp \vec{B}$, entonces cualquiera de los tres vectores es perpendicular a los otros dos.

9. Se proyectan dos partículas cargadas hacia una región en la que se tiene un campo magnético perpendicular a sus velocidades. Si las cargas se desvían en sentidos opuestos, ¿qué se puede decir acerca de ellas?

Las dos partículas se proyectan en la misma dirección y sentido, es decir, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos y el campo magnético es el mismo para las dos, para que se cumpla que ang. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 18°$:

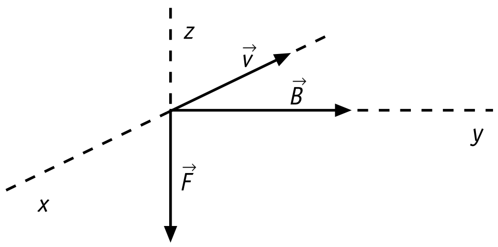
$-\vec{F}_1 = q\ (\vec{v}_1 \times \vec{B})$

$+\vec{F}_2 = q\ (\vec{v}_2 \times \vec{B})$

Para que se cumpla el sistema anterior, las cargas han de ser de signo opuesto.

10. Un protón se mueve a lo largo del eje *Ox* en sentido negativo, y experimenta una desviación de origen magnético en la dirección del eje *y* en sentido positivo. ¿Cuál es la dirección y sentido del campo magnético en esa región del espacio?

Si aplicamos la regla de la mano derecha, la fuerza definida por $\vec{F} = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$ tiene la dirección del eje *0z* y en sentido negativo, como se indica en la figura.



11. Si estás sentado en una habitación mirando de frente hacia una ventana, y un electrón penetra en la habitación por dicha ventana perpendicularmente a ella y es desviado hacia tu izquierda, ¿cuál es la dirección y sentido de la inducción magnética que existe en la habitación?

Para un electrón, los vectores fuerza, campo magnético y velocidad están relacionados por el producto vectorial $\vec{F} = -q\ (\vec{v} \times \vec{B})$, de donde se deduce que el vector campo $\vec{B}$ es perpendicular al suelo con el sentido techo-suelo.

12. Dos cargas eléctricas se mueven en el mismo sentido, de direcciones paralelas. ¿Cómo son las interacciones eléctricas y magnéticas entre ellas?

a) **Son del mismo signo.**

b) **Son de distinto signo.**

a) Si las cargas son del mismo signo:

La interacción eléctrica es de repulsión, de acuerdo con la Ley de Coulomb.

La interacción electromagnética sería de atracción. El campo magnético originado por las dos cargas sería perpendicular al plano del papel pero con sentido contrario, y aplicando la regla de la mano derecha, las fuerzas están dirigidas hacia las cargas.

b) Si las cargas son de signo contrario, la interacción sería de atracción, como se deduce de la Ley de Coulomb.

En cambio, la interacción electromagnética sería de repulsión.

13. Analiza si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) **Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme aumenta su velocidad cuando se desplaza en la misma dirección de las líneas del campo.**

b) **Una partícula cargada puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin experimentar ninguna fuerza.**

La fuerza magnética viene dada por $F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$ siendo α el ángulo que forma el campo magnético con la velocidad.

a) Afirmación falsa. Porque si el campo y la velocidad tienen la misma dirección $\alpha = 0$ y la fuerza sería nula.

b) Afirmación verdadera. Existe un caso en que la fuerza resultante es nula. Cuando se cumple: $v = E/B$

14. Se proyectan dos partículas cargadas hacia una región en la que se tiene un campo magnético perpendicular a sus velocidades. Si las cargas se desvían en sentidos opuestos, ¿qué se puede decir acerca de ellas?

Las cargas son de signo opuesto.

15. Un electrón se mueve con una velocidad *v* paralela a la dirección de un campo magnético. ¿Qué fuerza experimenta este electrón?

Una fuerza nula como se deduce de $F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\ 0° = 0$

16. Una corriente uniforme circula por una espira circular.

a) **Realiza un dibujo de las líneas del campo magnético generado por dicha corriente.**

b) **Indica a qué lado de la espira corresponde el polo norte y a qué lado el polo sur.**

Actividad abierta.

17. Demuestra que si una carga *q* penetra en un campo magnético uniforme *B* con una velocidad *v* perpendicular al campo, el periodo del movimiento circular que toma la carga es independiente de su velocidad.

La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad originando una aceleración centrípeta. Se cumple

$$F_m = F_c \Rightarrow q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R}\ ;\ v = \frac{q \cdot R \cdot B}{m}$$

$$\frac{2\pi R}{T} = \frac{qRB}{m}\ ;\ T = \frac{2\pi m}{qB}$$

18. Una partícula con carga +q y una masa m entra con velocidad v en una zona en la que existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al movimiento.

a) **En función del sentido del campo, dibuja la trayectoria descrita por la partícula.**

b) **Demuestra que la partícula describe un movimiento circular con frecuencia $f = \dfrac{q \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m}$**

a) La trayectoria es una circunferencia, El sentido de giro depende del sentido del campo magnético. Si el campo es perpendicular al plano del papel con sentido hacia dentro, la partícula giraría en sentido contrario a las agujas de un reloj. Si el sentido del campo es hacia afuera el giro sería dextrógiro (según las agujas del reloj).

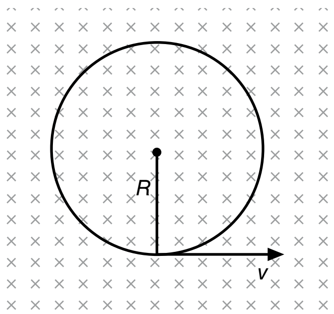
b) En la actividad hemos deducido el valor del periodo del movimiento circular que toma la partícula, Teniendo en cuenta que la frecuencia es el inverso del periodo, tenemos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{q \cdot B}{2\pi \cdot m}$$

19. Enuncia la ley de Lorentz y razona, a partir de ella, las características de la fuerza magnética sobre una carga.

Actividad abierta.

20. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme, vertical y dirigido hacia abajo. Se disparan horizontalmente un electrón y un protón con igual velocidad. Compara, con ayuda de un esquema, las trayectorias descritas por ambas partículas y razona cuáles son sus diferencias.



De acuerdo con la expresión $v = \dfrac{q \cdot R \cdot B}{m}$ la velocidad depende del valor y signo de la carga y de su masa. El protón describe la circunferencia en sentido positivo y el electrón lo hace en sentido negativo: el módulo de la velocidad depende de la relación $\dfrac{|q|}{m}$ de cada partícula. La velocidad del protón es menor que la del electrón al ser $m_p > m_c$; pero la circunferencia que describe es mayor que la del electrón.

21. Un protón y una partícula alfa se mueven en el mismo campo magnético y describen órbitas idénticas. ¿Qué relación existe entre sus velocidades?

Datos: $m_\alpha = 4\,m_p$; $q_\alpha = 2\,q_p$.

Tanto el protón como la partícula alfa están sometidos a una fuerza magnética que origina el movimiento circular. Por tanto, se cumple para ambas partículas:

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r},$$

de donde:

$$v = \frac{q\,B\,r}{m}$$

Por tanto, la velocidad de cada partícula depende de la masa y de la carga respectivas.

$$v_p = \frac{q_p\,B\,r}{m_p}; \qquad v_\alpha = \frac{q_\alpha\,B\,r}{m_\alpha}$$

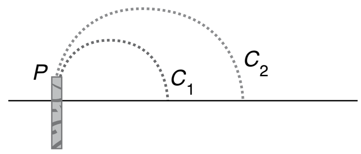
$$\frac{v_p}{v_\alpha} = \frac{m_\alpha\,q_p}{m_p\,q_\alpha} = \frac{4\,m_p\,q_p}{m_p\,2\,q_p} = 2; \qquad v_p = 2\,v_\alpha$$

El protón se moverá con doble velocidad que la partícula alfa.

22. Un protón y una partícula alfa se disparan desde el mismo punto *P* de la figura siguiente con la misma velocidad en un campo magnético uniforme de intensidad *B*.

***a)* ¿Qué partícula describe mayor órbita?**

***b)* ¿Qué relación existe entre sus radios?**



Aplicamos la expresión $q\,v\,B = m\,\dfrac{v^2}{r}$ y obtenemos el radio de la órbita que describen las partículas.

$$r = \frac{m\,v}{q\,B}$$

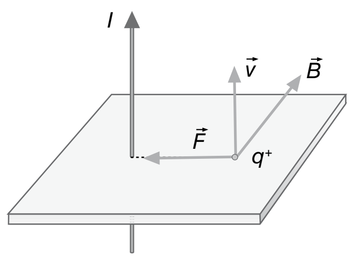
Para el protón: $r_p = \dfrac{m_p\,v}{q_p\,B}$

Para la partícula alfa: $r_\alpha = \dfrac{m_\alpha\,v}{q_\alpha\,B}$

$$\frac{r_p}{r_\alpha} = \frac{m_p\,q_\alpha}{m_\alpha\,q_p} = \frac{m_p\,2\,p_q}{4\,m_p\,q_p} = \frac{1}{2}; \; r_\alpha = 2\,r_p$$

Por tanto, la órbita descrita por la partícula alfa tiene doble radio que la órbita descrita por el protón.

23. Considera un conductor rectilíneo de longitud infinita por el que circula una corriente eléctrica. En las proximidades del conductor se mueve una carga eléctrica positiva cuyo vector velocidad tiene la misma dirección y sentido que la corriente sobre el conductor. Indica, mediante un ejemplo, la dirección y el sentido de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula.



El campo maGnético originado por la corriente es perpendicular a la dirección del conductor (y a la velocidad), con el sentido indicado en la figura, de acuerdo con la regla de la mano derecha. Según la Ley de Lorentz, la fuerza esta dirigida hacia el conductor.

24. Comenta razonadamente la veracidad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

***a)* La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos por los que circulan corrientes de diferente sentido es repulsiva.**

***b)* Si una partícula cargada en movimiento penetra en una región en la que existe campo magnético siempre actúa sobre ella una fuerza.**

a) Verdadera. La fuerza es de repulsión $F = I\ L\ B$, siendo B el campo magnético de cada conductor en el punto donde se encuentra el otro.

b) Falso. Si la partícula se mueve en dirección paralela al campo es nula.

25. Supón un campo magnético $\vec{B}$ a una distancia *d* de un conductor rectilíneo indefinido por el que circula una intensidad de corriente eléctrica *I*.

***a)* ¿Cómo varía d con *I*?**

***b)* Dibuja las líneas del campo magnético, indicando su sentido y una regla sencilla que permita determinarlo con facilidad.**

a) El campo magnético creado por la corriente viene dado por $B = \dfrac{\mu_o I}{2\pi d}$, cuyo valor depende de la relación $\dfrac{I}{d}$. Si el campo es constante, la relación anterior también lo es. Por tanto, la intensidad de l corriente y la distancia vrían en la misma proporción.

b) Respuesta abierta.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Cuál es la fuerza que desvía los electrones del ánodo del microondas?

***a)* eléctrica; *b)* magnética; *c)* electromagnética.**

c) Electromagnética.

2. ¿Cómo se llama la fuerza que actúa sobre los electrones en movimiento del microondas? a) de Foucault; b) de Lorentz; c) de Ampère.

b) De Lorentz.

Problemas propuestos

1. Calcula el campo magnético en un punto distante 4 cm de un largo conductor por el que circula una corriente de 6 A.

El campo magnético producido por un conductor rectilíneo en un punto distante *d* viene dado por la expresión:

$$B = \frac{2K'I}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1} \cdot 6\ \text{A}}{0{,}04\ \text{m}} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

2. ¿Cuál es el radio de una espira circular por la que pasa una corriente de 5 A si el campo magnético en su centro es $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ T?

El campo magnético en el centro de una espira viene dado por $B = \dfrac{\mu_0 I}{2r}$, siendo *R* el radio de la espira.

$$R = \frac{\mu_0 I}{2B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A} \cdot 5\ \text{A}}{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{T}} = 3{,}1\ \text{mm}$$

3. Un alambre recto y largo conduce una corriente de 5 A según el eje *Ox*. Calcula el valor y dirección de *B* en el punto (3, 2, 0) expresado en metros.

En este caso, el vector campo viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{2K'I}{d}(\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A} \cdot 5\text{A}}{2\ \text{m}}(\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = 5 \cdot 10^{-7}\ \vec{u}_z\ \text{T}$$

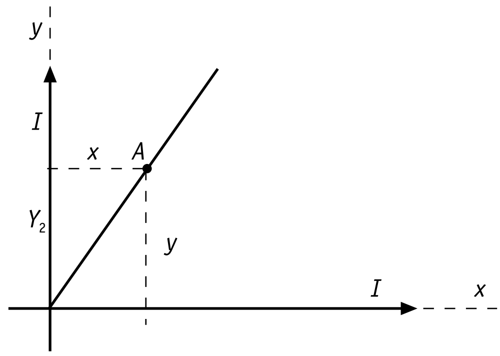
4. Calcula el campo magnético en un punto situado a 1,0 cm de un conductor rectilíneo por el que circula una corriente de 6,0 A.

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo en un punto viene dado por:

$$B = \frac{2K'I}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A} \cdot 6{,}0\ \text{A}}{10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

5. Un alambre recto y largo conduce una corriente *I* en el sentido +*x*, mientras que un segundo conductor transporta una corriente *I*/2 según el sentido +*y*. ¿En qué puntos el campo magnético resultante es nulo?

En los puntos situados en el primero y tercer cuadrante los campos magnéticos originados por las corrientes tienen sentido contrario. Sea *A* un punto en que, además de la condición anterior, también se cumple que $B_1 = B_2$.



Aplicamos a cada corriente la ecuación del campo magnético originado por un conductor rectilíneo:

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\frac{1}{2}I}{x}; \qquad xI = \frac{1}{2}yI$$

de donde: $y = 2x$.

Los puntos en los que el campo magnético resultante es cero están situados en la recta $y = 2x$.

6. Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de 12 A. El hilo está situado en el eje *Z* de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje *Y*, en el punto *P* de coordenadas (0, 20, 0) expresadas en centímetros. Determina el vector de aceleración del electrón en los siguientes casos:

***a)* El electrón se encuentra en reposo en la posición indicada.**

***b)* Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje *Y*.**

***c)* Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje *Z*.**

***d)* Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje *X*.**

Datos: permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}; masa del electrón $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) $a = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}{m} = 0$. Porque $v = 0$

b) El campo magnético que origina la corriente vale en el punto *P:*

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12}{2\pi \cdot 0{,}2} = 12 \cdot 10^{-6}\ T$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha, el campo es paralelo al eje *X* en sentido negativo: $\vec{B} = -1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}$

Fuerza que ejerce el campo magnético sobre el electrón:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ [\vec{j} x(-1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \vec{i})] =$$
$$= 1{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-24}\ \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1{,}92 \cdot 10^{-24}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}\ \vec{k} = -2{,}1 \cdot 10^{6}\ \vec{k} m/s^2$$

c) $\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot [\vec{k} x(-1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \vec{i})] = 1{,}92 \cdot 10{-}5\ \vec{j}$;

$\vec{a} = 2{,}1 \cdot 10^{6}\ \vec{j} m/s^2$

d) $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$; $a = 0\ m/s^2$

7. En una región del espacio existe un campo eléctrico de $3 \cdot 10^5$ N/C en el sentido positivo del eje *OZ* y un campo magnético de 0,6 T en el sentido positivo del eje *OX*.

***a)* Un protón se mueve en el sentido positivo del eje *OY*. Dibuja un esquema de las fuerzas que actúan sobre él y determina qué velocidad deberá tener para que no sea desviado de su trayectoria.**

***b)* Si en la misma región del espacio un electrón se moviera en sentido positivo del eje *OY* con una velocidad de 10^3 m/s, ¿en qué sentido sería desviado?**

Dato: valor absoluto de la carga del electrón y del protón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Para que el protón no se desvíe la fuerza neta que actúa sobre él ha de ser nula:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -q \cdot \vec{E}_e ; \vec{v} \cdot B \cdot \vec{k} = -E \cdot \vec{k} ;$$
$$|\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = |\vec{E}|$$

$$v = \frac{3 \cdot 10^5}{0{,}6} = 0{,}5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^5 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v} = 5 \cdot 10^5\ \vec{j}$$

b) El electrón estaría sometido a dos fuerzas $\vec{F}_m$ y $\vec{F}_e$ cuya resultante sería:

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e = q \cdot [(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}] = q(v \cdot B\vec{k} + E\vec{k}) =$$
$$= -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (10^3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 10^5)\ \vec{k} = -4{,}8 \cdot 10^{-14}\ \vec{k} N$$

$$a = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-4{,}8 \cdot 10^{-14}\ \vec{k}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = -5{,}2 \cdot 10^{16}\ \vec{k} m/s^2$$

El electrón tiene dos movimientos: Uno uniforme en la dirección del eje *OY* en sentido positivo. Y otro uniformemente acelerado en la dirección del eje *OZ* en sentido negativo. El movimiento resultante es parabólico hacia el sentido negativo del eje *OZ:*

$$x = v \cdot t \ ; \ z = \frac{1}{2}\ a \cdot t^2 = \frac{1}{2}\ a \cdot \frac{x^2}{v^2} = -2{,}6 \cdot 10^{10}\ x^2$$

8. Un protón y un electrón se mueven en un campo magnético uniforme B bajo la acción del mismo. Si la velocidad del electrón es ocho veces mayor que la del protón y ambas son perpendiculares a las líneas del campo magnético, deduce la relación numérica existente entre:

***a)* Los radios de las órbitas que describen.**

***b)* Los periodos orbitales de los mismos.**

Dato: se considera que la masa del protón es 1 836 veces la masa del electrón.

a) Si el campo magnético es perperdicular a la velocidad, de la ley de Lorentz se deduce que la fuerza magnética es perpendicular al movimiento de ambas partículas sin acelerarlas. Se trata de una fuerza centrípeta, haciendo que ambas partículas describan trayectorias circulares:

$$|q|\ v \cdot B = m\ \frac{v^2}{R} \ ; \ R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \ ; \ \frac{R_p}{R_o} = \frac{m_p \cdot v_p}{m_e \cdot 8v_p} = 229{,}5 \ ;$$
$$R_p = 229{,}5\ R_e$$

b) Al ser las órbitas circulares se cumple:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \ ; \ \frac{T_p}{T_e} = \frac{v_e \cdot R_p}{V_p \cdot R_e} = \frac{8v_p \cdot 22{,}5\ R_e}{V_p \cdot R_e} = 1836 \ ; \ T_P = 1836 T_e$$

9. Sobre un electrón que se mueve con una velocidad de 5 000 km/s actúa en dirección normal a su velocidad un campo magnético en el que $B = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$ T. Determina:

***a)* El valor de la fuerza que actúa sobre el electrón.**

***b)* El radio de la órbita que describe.**

Datos: $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) El electrón describe una circunferencia bajo la fuerza electromagnética, cuyo valor viene dado por la Ley de Lorentz.

$$F = qvB = 1{,}6 \cdot 10^{-19\ C} \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 6{,}4 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

b) Esta fuerza equivale a la fuerza centrípeta necesaria para que la órbita circular sea estable.

$$F_c = m\ \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{F_c} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 25 \cdot 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2}{6{,}4 \cdot 10^{-15} \text{ N}} = 3{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

10. Se acelera un protón a través de una diferencia de potencial de $1{,}0 \cdot 10^5$ V. Entonces el protón entra perpendicularmente a un campo magnético, recorriendo una trayectoria circular de 30 cm de radio. Calcula el valor del campo.

Datos: $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

El trabajo realizado por el campo para acelerar el protón se emplea en aumentar la energía cinética de este.

$$Vq = \frac{1}{2}\ mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^5 \text{ V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 4{,}4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Al penetrar con esta velocidad en el campo magnético, el protón describe una circunferencia en la que la fuerza centrípeta coincide con la fuerza magnética:

$$m\ \frac{v^2}{R} = qvB$$

de donde se deduce el valor del campo magnético:

$$B=\frac{m\,v}{R\,q}=\frac{1,67\cdot10^{-27}\text{ kg}\cdot4,4\cdot10^{6}\text{ m/s}}{0,3\text{ m}\cdot1,6\cdot10^{-19}\text{ C}}=0,15\text{ T}$$

11. Una partícula de masa m = 4 · 10^{-16} kg y carga *q* = −2,85 · 10^{-9} C, que se mueve según el sentido positivo del eje *X* con velocidad 2,25 · 10^6 m/s, penetra en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme de valor *B* = 0,9 T orientado según el sentido positivo del eje *Y*.

Determina:

***a)* La fuerza (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre la carga.**

***b)* El radio de la trayectoria seguida por la carga dentro del campo magnético.**

a) Si despreciamos la fuerza gravitatoria, la única fuerza que actúa sobre la partícula es la que ejerce el campo magnético, y que viene dada por la ley de Lorentz.

$$\vec F_m=q\cdot(\vec v\times\vec B)=q\cdot(v\vec i\times B\vec j)=qvB\vec k=-2,85\cdot10^{-9}\cdot$$
$$\cdot\,2,25\cdot10^{6}\cdot0,9\cdot\vec k=-5,77\cdot10^{-3}\,\vec k\,N$$

$|\vec F_m|=5,77\cdot10^{-3}$ N; con dirección del eje Z y sentido negativo.

b) Esta fuerza es centrípeta al ser siempre perpendicular al vector velocidad. Por tanto:

$$|qvB|=m\,\frac{v^2}{R}\ ;\ \ R=\frac{mv^2}{qvB}=\frac{4\cdot10^{-16}\cdot(2,25\cdot10^{6})^2}{5,77\cdot10^{-3}}=0,35\text{ m}$$

12. Dos partículas de idéntica carga describen órbitas circulares en el seno de un campo magnético bajo la acción del mismo. Ambas partículas poseen la misma energía cinética y la masa de una es el doble que la de la otra. Calcula la relación entre:

***a)* Los radios de las órbitas.**

***b)* Los periodos de las órbitas.**

a) Supomgamos que $m_2=2\,m_1$. La igualdad de la energía cinética implica:

$$\frac{1}{2}\,m_1v_1^2=\frac{1}{2}\,m_2v_2^2\Rightarrow m_1v_1^2=2m_1v_2^2\ \Rightarrow v_1=\sqrt{2}\ v_2$$

La fuerza magnética al ser perpendicular a la velocidad actúa como fuerza centrípeta.

El radio de la trayectoria circular viene dado por $R=\dfrac{mv}{qB}$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{m_1v_1}{m_2v_2}=\frac{m_1\cdot\sqrt{2}v_2}{2m_1\cdot v_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Periodo de revolución: $T=\dfrac{2\pi R}{v}$

$$T_1=\frac{2\pi R_1}{v_1}\ ;\ T_2=\frac{2\pi R_2}{v_2}\ ;\ \frac{T_1}{T_2}=\frac{R_1v_2}{R_2v_1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}R_2\cdot v_2}{R_2\cdot\sqrt{2}v_2}=\frac{1}{2}$$

13. Una carga *q* = −1 · 10^{-11} C de masa *m* = 5 · 10^{-21} kg se mueve en el plano *XY* con una velocidad *v* = 300 m/s en el seno de un campo magnético $\vec B=5\,\vec k\,\mu T$ describiendo una trayectoria circular. Determina:

***a)* El radio de giro de la carga y su periodo.**

***b)* El campo eléctrico que habría que aplicar para que la carga describiera una trayectoria rectilínea en el instante en el que su velocidad es paralela al eje *X* y con sentido positivo.**

a) Puesto que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, la partícula describe una órbita circular, siendo la fuerza magnética igual a la fuerza centrípeta:

$$qvB=\frac{m\,v^2}{R}\ ;\ R=\frac{m\,v}{qB}=\frac{5\cdot10^{-21}\cdot300}{1\cdot10^{-11}\cdot5\cdot10^{-6}}=0,03\ m$$

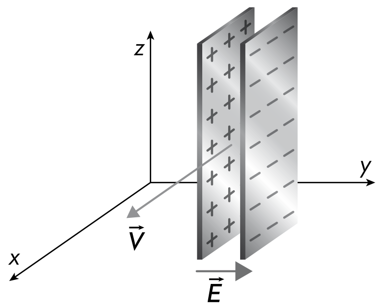
$$\text{Periodo } T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\cdot0,03}{300}=\ 2\pi\cdot10^{-6}\ s$$

b) Para que la carga no se desvíe la fuerza neta ha de ser cero: $\vec F_m+\vec F_e=0$

$$q\cdot(\vec v\times\vec B)=-q\,\vec E\Rightarrow(\vec v\cdot B)\cdot(\vec j)=-\vec E_e.\text{ Luego}$$

$$\vec E=vB\,\vec j=1,5\ .\ 10-3\,\vec j$$

14. Un electrón se lanza con una velocidad $\vec v=5\cdot10^6\,\vec i$ m/s entre las placas de un condensador plano vacío cargado, cuyas placas son planos paralelos al plano *XZ* que producen un campo eléctrico uniforme $\vec E=10^2\,\vec j$ N/C como indica la Figura.



Las placas tienen una anchura, ℓ = 10 cm. Si el electrón entra de forma que su distancia a cada una de las placas es de *d* = 1 cm, halla, suponiendo despreciable la fuerza gravitatoria:

***a)* La fuerza $\vec F$ y la aceleración $\vec a$ que actúa sobre el electrón.**

***b)* El vector de inducción magnética $\vec B$ necesario para que el electrón no desvíe su trayectoria.**

***c)* El vector de velocidad del electrón a la salida del condensador, en las circunstancias del apartado *b)*.**

***d)* Supón ahora que se descarga el condensador, de modo que se anula el campo eléctrico y tan solo tiene la inducción magnética hallada en el apartado *b)*. Calcula el radio de giro de la trayectoria del electrón.**

Datos: masa del electrón $m_e=9,11\cdot10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón *e* = 1,6 · 10^{-19} C.

a) $\vec F=\vec E\cdot q=10^2\,\vec j\cdot(-1,6\cdot10^{-19})=-1,6\cdot10^{-17}\,\vec j$ N

$$\vec a=\frac{\vec F}{m}=\frac{-1,6\cdot10^{-17}\,\vec j}{9,1\cdot10^{-31}}=-1,76\cdot10^{13}\,\vec k m/s^2$$

b) Para que el electrón no se desvíe neta que se ejerce obre él ha de ser nula:

$q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -q \cdot \vec{E}$; $\vec{v} \times \vec{B} = -E \cdot \vec{j}$; $v \cdot \vec{i} \times B \cdot \vec{k} = -E \cdot \vec{j}$.
El campo $\vec{B}$ debe tener la dirección del eje Z en sentido positivo para que se cumpla $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$. Por tanto,

$B = \dfrac{E}{v} = \dfrac{10^2}{5 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-5}\ T$. En forma vectorial:

$\vec{B} = 2 \cdot 10^{-5}\ \vec{k}\, T$

c) En las condiciones del apartado *b)* la fuerza es nula. Por tanto, el movimiento será rectilíneo y uniforme. Al salir del condensador lo hará con la misma velocidad que tenía $\vec{v} = 5 \cdot 10^6\ \vec{i}\ m/s$

d) La fuerza magnética, al ser perpendicular a la velocidad, hace que el electrón describa una circunferencia de radio:

$$R = \frac{m v}{qB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 5 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = 1,42\ m$$

15. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **¿Cuál es la velocidad de un electrón cuando se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo $E = 3,5 \cdot 10^5$ N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos mutuamente perpendiculares y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que este no se desvíe?**

b) **¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico?**

a) $q \cdot v \cdot B = q \cdot E \Rightarrow v = \dfrac{E}{B} = \dfrac{3,5 \cdot 10^5}{2} = 1,75 \cdot 10^5 m/s$

b) $R = \dfrac{mv}{qB} = \dfrac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,75 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2} = 5 \cdot 10^{-7}$ m

16. En una región del espacio hay un campo eléctrico $\vec{E} = 4 \cdot 10^3\ \vec{j}\ NC^{-1}$ y otro magnético $\vec{B} = 5\ \vec{i}\ T$. Si un protón penetra en esa región con una velocidad perpendicular al campo magnético:

a) **¿Cuál debe ser la velocidad del protón para que al atravesar esa región no se desvíe? Si se cancela el campo eléctrico y se mantiene el campo magnético.**

b) **Con la velocidad calculada en el apartado *a)*, ¿qué tipo de trayectoria describe? ¿Cuál es el radio de la trayectoria? Determina el trabajo realizado por la fuerza que soporta el protón y la energía cinética con la que el protón describe esa trayectoria.**

Datos: masa del protón = $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; carga del protón = $1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Para que el electrón no se desvíe se debe cumplir: $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}_e$

$$q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E} \Rightarrow v \cdot \vec{k} \times \vec{B} \cdot (-\vec{i}) = -E\,\vec{j} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V \cdot B = E$$

$$v = \frac{E}{B} = \frac{-4 \cdot 10^3}{0,5} = 8 \cdot 10^3\ m/s$$

b) Si se cancela el campo eléctrico, el campo magnético al ser perpendicular a la velocidad, la fuerza magnética es una fuerza centrípeta que hace que el electrón describa una circunferencia de radio:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5} = 1,67 \cdot 10^{-4}\ m$$

El trabajo realizado es cero, porque la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad en todo instante.

Energía cinética del protón:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 64 \cdot 10^6 = 5,3 \cdot 10^{-20}\ J$$

17. Dos partículas idénticas *A* y *B*, de cargas $3,2 \cdot 10^{-19}$ C y masas $6,4 \cdot 10^{-27}$ kg, se mueven en una región en la que existe un campo magnético uniforme de valor: $\vec{B}_0 = (\vec{i} + \vec{j})T$. En un instante dado, la partícula *A* se mueve con velocidad $\vec{v}_A = (-10^3\ \vec{i} + 10^3\ \vec{j})$ m/s y la partícula *B* con velocidad $\vec{v}_B = (-10^3\ \vec{i} - 10^3\ \vec{j})$ m/s.

a) **Calcula, en ese instante, la fuerza que actúa sobre cada partícula.**

b) **Una de ellas realiza un movimiento circular; calcula el radio de la trayectoria que describe y la frecuencia angular del movimiento.**

a) Sobre la partícula A:

$$\vec{F}_A = q \cdot (\vec{v}_A \times \vec{B}) = q \cdot [(-10^3\ \vec{i} + 10^3\ \vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j})] =$$
$$= q \cdot [-10^3\ (\vec{i} \times \vec{i}) - 10^3(\vec{i} \times \vec{j}) + 10^3\ (\vec{j} \times \vec{i}) + 10^3\ (\vec{j} \times \vec{j})] =$$
$$= -q \cdot 2 \cdot 10^3\ \vec{k} = -6,2 \cdot 10^{-16}\ \vec{k} N$$

Sobre la partícula B:

$$\vec{F}_B = q \cdot (\vec{v}_B \times \vec{B}) = q \cdot [-10^3\ (\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j})] =$$
$$= q(-10^3\ \vec{k} + 10^3\ \vec{k}) = 0$$

b) La partícula tiene movimiento circular con un radio :

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m \cdot \sqrt{10^6 + 10^6}}{q \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{6,4 \cdot 10^{-27} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2}}{q \cdot \sqrt{2}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10^3 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 10^{-5}} = 7 \cdot 10^7\ \text{rad/s}$$

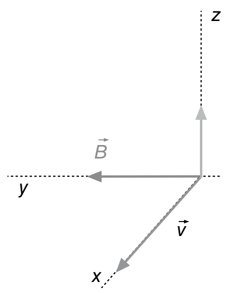
18. En un instante determinado un electrón que se mueve con una velocidad $\vec{v} = 4 \cdot 10^4\ \vec{i}$ m/s penetra en una región en la que existe un campo magnético de valor $\vec{B} = -0,8\ \vec{j}$ T, siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ los vectores unitarios en los sentidos positivos de los ejes X e Y, respectivamente.

Determina:

a) **El módulo, la dirección y el sentido de la aceleración adquirida por el electrón en ese instante, efectuando un esquema gráfico en la explicación.**

b) **La energía cinética del electrón y el radio de la órbita que describiría el electrón al moverse en el campo, justificando la respuesta.**

Datos: valor absoluto de la carga del electrón $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.



a) El electrón está sometido a la acción del campo magnético. La fuerza que este ejerce viene dada por la ley de Lorentz: $\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$. Para hallar la aceleración aplicamos la ley de Newton:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{|q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})|}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{4} \cdot 0{,}8}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} =$$
$$= 5{,}62 \cdot 10^{15} \text{ m/s}$$

Esta aceleración perpendicular a la velocidad en cualquier instante y sentido hacia el centro de la órbita. Se trata de una aceleración centrípeta.

b) $E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 16 \cdot 10^{8}\ 7{,}2 \cdot 10^{-22}\ J$

$$R = \frac{v^2}{a} = \frac{16 \cdot 10^{8}}{5{,}62 \cdot 10^{15}} = 2{,}85 \cdot 10^{-7}\ m$$

19. Una partícula de carga q y masa m tiene una cantidad de movimiento $p = m\, v$ y una energía cinética $E_c = 1/2\ m\ v^2$. Si se mueve en una órbita de radio R perpendicular a un campo magnético uniforme B, demuestra que:

a) $p = B\, q\, R$

b) $E_c = \dfrac{B^2 q^2 R^2}{2\ m}$

a) Si se mueve en una órbita circular con movimiento uniforme quiere decir que sobre la partícula actúa una fuerza centrípeta originada por el campo magnético:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow qB = \frac{mv}{R} \Rightarrow mv = Bqr \Rightarrow p = BqR$$

b) $E_c = \dfrac{1}{2} mv^2 = \dfrac{m^2v^2}{2\ m} = \dfrac{p^2}{2\ m} = \dfrac{B^2q^2R^2}{2\ m}$

20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Determina la masa de un ion de potasio, K^+, si cuando penetra con una velocidad $\vec{v} = 8 \cdot 10^4\ \vec{i}$ m/s en un campo magnético uniforme de intensidad $\vec{B} = 0{,}1\ \vec{k}$ T describe una trayectoria circular de 65 cm de diámetro.

b) Determina el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico que hay que aplicar en esa región para que el ion no se desvíe.

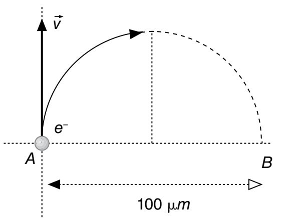
a) $|\vec{F}_m| = \dfrac{mv^2}{R}$; $q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow m = \dfrac{RqB}{v} =$

$$= \frac{32{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}1}{8 \cdot 10^{4}} = 6{,}5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

b) Si el ion no se desvía la fuerza neta que actúa sobre él es nula. Es decir, se cumple:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow q\ (\vec{v} \times \vec{B}) = -q\ \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) =$$
$$= -(8 \cdot 10^4\ \vec{i} \times 0{,}1\ \vec{k}) = 8 \cdot 10^3\ j\ N/C$$

21. Un electrón que se halla en el punto A de la figura tiene una velocidad $v = 1,\ 141 \cdot 10^{6}$ m/s.



a) Encuentra la magnitud y dirección del campo magnético que obliga al electrón a seguir la trayectoria semicircular de la figura.

b) Calcula el tiempo necesario para que el electrón se traslade desde A hasta B, sabiendo que la distancia recta entre ellos vale d_{AB} = 100 μ m.

Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Como la única fuerza que actúa sobre el electrón es la que ejerce el campo magnético que es perpendicular a la velocidad. Por tanto, se trata de una fuerza centrípeta que hace que el electrón describa una trayectoria circular.

$$q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R}\ ;\ B = \frac{mv}{qR} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}141 \cdot 10^{6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0{,}13T$$

De la figura se deduce: $\vec{v} = 1{,}141 \cdot 10^6\ \vec{i}$; $\vec{F}_m = \dfrac{mv}{R}\ \vec{j}$. Por tanto, la dirección del campo será la del eje OZ en sentido positivo $\vec{B} = 0{,}13\ \vec{k}\,T$

b) $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{3{,}14\ . \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{1{,}141 \cdot 10^{6}} = 1{,}37 \cdot 10^{-10}\ s$

22. Un electrón se mueve en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ con una velocidad perpendicular a dicho campo y de valor v = 20 000 km/s, describiendo un arco de circunferencia de radio R = 0,5 m.

a) Determina el valor del campo $\vec{B}$.

b) Si la velocidad del electrón formara un ángulo de 45° con B.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; me $= 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

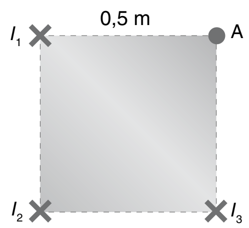
a) $qvB = \dfrac{mv^2}{R}$; $B = \dfrac{mv}{qR} = \dfrac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{7}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}5} = 2{,}27 \cdot 10^{-4}T$

b) $qvB \text{ . sen } 45° = \dfrac{mv^2}{R}$; $B = \dfrac{mv}{qR \cdot \text{sen } 45°} = \dfrac{2{,}27 \cdot 10^{-4}}{0{,}7} =$

$= 3{,}25 \cdot 10^{-4}T$

Fuerzas entre corrientes paralelas

23. Tres hilos infinitos y paralelos pasan por los vértices de un cuadrado de 50 cm de lado como se indica en la figura. Las tres corrientes I_1, I_2, I_3 circulan hacia dentro del papel.



a) Si $I_1 = I_2 = I_3$ = 10 mA, determina el campo magnético en el vértice A del cuadrado.

b) Si I_1 = 0; I_2 = 5mA; I_3 = 10mA, determina la fuerza por unidad de longitud entre los hilos recorridos por las corrientes.

Dato: permeabilidad magnética del vacío μo = 4 π · 10^{-7} N · A^{-2}

Tomamos como sistema de referencia: el origen de coordenadas en I_2 ; eje X el segmento que une I_2 con I_3; eje Y el segmento que une I_2 con I_1. El eje Z sería perpendicular al plano del papel con sentido hacia afuera.

Para hallar el campo magnético en el vértice A aplicamos el principio de superposición: $\vec{B}_T(A) = \vec{B}_1(A) + \vec{B}_2(A) + \vec{B}_3(A)$

a) Si las corrientes son iguales el campo magnético originado por I_1 e I_3 tiene el mismo módulo:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0{,}5} = 4 \cdot 10^{-9}\ T$$

Aplicando la regla de la mano derecha tenemos el campo magnético, con dirección y sentido, de cada corriente:

$\vec{B}_1 = -4 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}\ T$; $\vec{B}_3 = 4 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}\ N$

Hallamos el campo magnético creado por la corriente I_2 en el punto A.

Distancia de I_2 al punto A.

$d = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}$

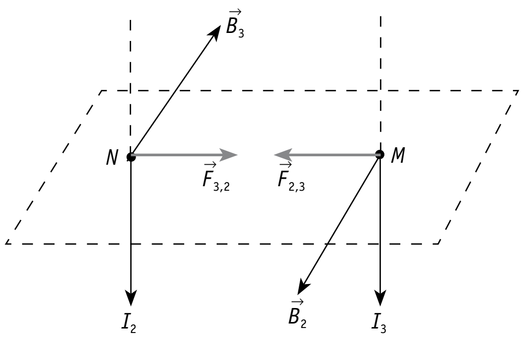
$$|\vec{B}_2| = \frac{\mu_o I_2}{2\pi d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\ .\ \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-9} T$$

$$\vec{B}_2 = |\vec{B}_2| \cos 45°\,\vec{i} - |\vec{B}_2| \operatorname{sen} 45°\,\vec{j} = |\vec{B}_2| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-9} \cdot (\vec{i} - \vec{j})\ T$$

Campo resultante: $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 6 \cdot 10^{-9}(-\vec{i}) - 6 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}$.
Su módulo es $|\vec{B}_T| = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9} T$

b)



Campo magnético de I_2 en el punto M:

$$|\vec{B}_2| = \frac{\mu_o I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0{,}5} = 2 \cdot 10^{-9} T$$

Campo magnético de I_3 en el punto N:

$$|\vec{B}_3| = \frac{\mu_o I_3}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 0{,}5} = 4 \cdot 10^{-9} T$$

Fuerza con que se atraen los conductores: $|\vec{F}_{2,3}| = |\vec{F}_{3,2}| = I_3 l_3 B_2 =$
$= I_2 l_2 B_3$

Fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o I_2 I_3}{2\pi d} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 0{,}5} = 2 \cdot 10^{-11}\ N/m$$

24. Un hilo conductor rectilíneo de longitud infinita está situado en el eje Z y transporta una corriente de 20 A en el sentido positivo de dicho eje. Un segundo hilo conductor, también infinitamente largo y paralelo al anterior, corta al eje *X* en el punto de coordenada *x* = 10 cm. Determina:

a) **La intensidad y el sentido de la corriente en el segundo hilo, sabiendo que el campo magnético resultante en el punto del eje *X* de coordenada *x* = 2 cm es nulo.**

b) **La fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor, explicando cuál es su dirección y sentido.**

Dato: permeabilidad magnética del vacío:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2}$$

a) De acuerdo con la regla de la mano derecha ocurre que $\vec{B} + \vec{B}_1 = 0 \Rightarrow |\vec{B}| = \vec{B}_1$.

La corriente en el segundo hilo ha de ser en el sentido positivo del eje Z.

$$\frac{\mu_o I}{2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = \frac{\mu_o \cdot 20}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow I = 80\ A$$

b) La fuerza por unidad de longitud tiene la dirección del eje X y es de atracción.

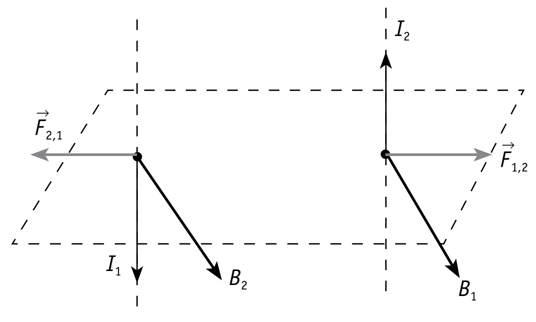
$$\frac{F}{l} = I \cdot I_1 \cdot \frac{\mu_o}{2\pi d} = \frac{20 \cdot 80 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ N/m$$

25. Dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, por los que circulan corrientes de igual intensidad, *I*, están separados una distancia de 0,12 m y se repelen con una fuerza por unidad de longitud de 6 · 10⁻⁹ N/m.

a) **Efectúa un esquema gráfico en el que se dibuje el campo magnético, la fuerza que actúa sobre cada conductor y el sentido de la corriente en cada uno de ellos.**

b) **Determina el valor de la intensidad de corriente *I*, que circula por cada conductor.**

Dato: permeabilidad magnética del vacío: $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^{-2}$



Para que la fuerza sea de repulsión las intensidades I_1 e I_2 han de tener sentido contrario.

$$\frac{F}{l} = I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{\mu_o}{2\pi d} \Rightarrow 6 \cdot 10^{-9} = I^2 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 0{,}12} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I^2 = 36 \cdot 10^{-4}$; $I = 6 \cdot 10^{-2}$ A

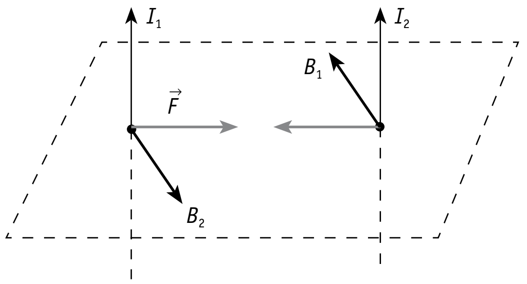
26. Por dos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos, separados 0,2 m, circulan corrientes de la misma intensidad y sentido.

a) **Razona qué fuerzas ejercen ambos conductores y determina el valor de la intensidad de corriente que debe**

circular por cada conductor para que la fuerza por unidad de longitud sea $2,25 \cdot 10^{-6}$ N/m.

b) **Razona cómo depende dicha fuerza de la distancia de separación de los conductores y del sentido de las corrientes.**

Datos: permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}.



a) De acuerdo con la figura si las corrientes tienen el mismo sentido las fuerzas son de atracción. Si, además, $I_1 = I_2$ se cumple: $\dfrac{F}{l} = I^2 \dfrac{\mu_o}{2\pi d}$

$$I^2 = \frac{2,25 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi d}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,25;\ I = 1,5 \text{ A}$$

b) La fuerza por unidad de longitud es inversamente proporcional a la distancia de separación y cambia de sentido si cambia el sentido de las corrientes.

27. Dos hilos conductores largos, rectilíneos y paralelos, separados una distancia d = 9 cm, transportan la misma intensidad de corriente en sentidos opuestos. La fuerza por unidad de longitud que se ejerce entre ambos conductores es $2 \cdot 10^{-5}$ N/m.

a) **Calcula la intensidad de la corriente que circula por los conductores.**

b) **Si en un punto que está en el mismo plano que los conductores y a igual distancia de ellos se lanza una partícula de carga *q* = 5 *mC* con una velocidad *v* = 100 m/s en dirección paralela a los conductores, ¿qué fuerza actuará sobre la partícula en ese instante?**

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}

a) La fuerza es de repulsión. La fuerza por unidad de longitud viene dada por $\dfrac{F}{l} = I_1 \cdot I_2 \dfrac{\mu_o}{2\pi d}$. Si $I_1 = I_2$ se cumple:

$$I^2 = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi \text{d}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 9\ ;\ I = 3 \text{ A}$$

b) En el punto medio de la distancia que separa los conductores el campo magnético vale $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_1$ al ser iguales las intensidades de corriente.

$$B = 2\,\frac{\text{I}\mu_o}{2\pi d} = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}} = 2,66 \cdot 10^{-5}\ T$$

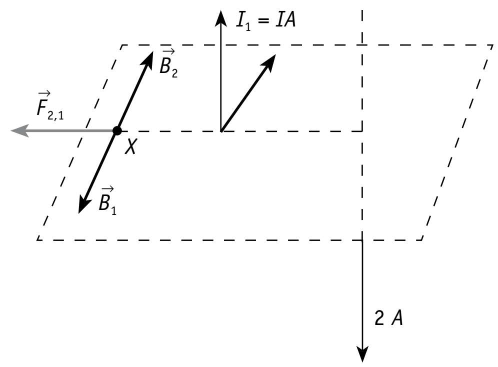
La fuerza que ejerce este campo sobre la carga móvil vale, de acuerdo con la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot v \cdot B = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{2} \cdot 2,66 \cdot 10^{-5} = 13,3 \cdot 10^{-9}\ N = 1,33 \cdot 10^{-8}\ N$$

28. Dos hilos conductores *A* y *B*, rectilíneos, indefinidos y paralelos se encuentran situados en el vacío separados entre sí 25 cm y por ellos circulan, en sentidos opuestos, corrientes de intensidades 1 A y 2 A, respectivamente. Calcula:

a) **La fuerza magnética que experimentan 2 m del hilo *A* debida a la presencia del otro conductor, indicando su sentido.**

b) **Los puntos del plano que contiene los hilos *A* y *B* en los que el campo magnético creado por ambos hilos es nulo.**



a) $|\vec{F}_{2,1}| = I_1 \cdot \text{I}_2 \dfrac{\mu_o}{2\pi d} \cdot l = 2 \cdot \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 0,25} = 2 = 3,2 \cdot 10^{-6}$ N

Según la figura tiene dirección del eje *X* con sentido negativo:

$$\vec{F}_{2,1} = 3,2 \cdot 10^{-6} -\vec{i} \text{ N} = -3,2 \cdot 10^{-6} -\vec{i} \text{ N}$$

b) El punto en donde el campo resultante es cero está situado a una distancia *x* a la izquierda del conductor 1. $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|$

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi \cdot x} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi \cdot (0,25 + x)} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{0,25 + x}\ ;\ x = 0,25 \text{ m}$$

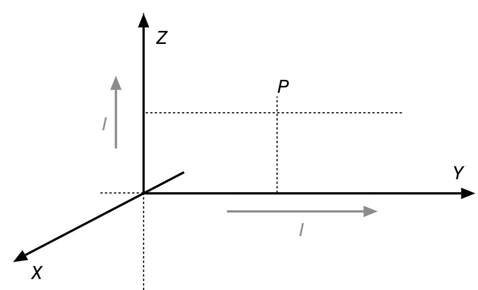
El punto en que el campo es nulo se encuentra a 0,25 m a la izquierda del conductor *A* y a 0,5 m a la izquierda del conductor *B*.

29. Por dos conductores rectilíneos e indefinidos que coinciden con los ejes *Y* y *Z* circulan corrientes de 2 A en el sentido positivo de dichos ejes (ver figura). Calcula:

a) **El campo magnético en el punto *P* de coordenadas (0, 2, 1).**

b) **La fuerza magnética sobre un electrón situado en el punto P que se mueve con velocidad $\vec{v} = 4 \cdot 10^4 \vec{j}$ m/s.**

Datos: permeabilidad del vacío: $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2}$ T m A^{-2}; carga del electrón *e* = $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.



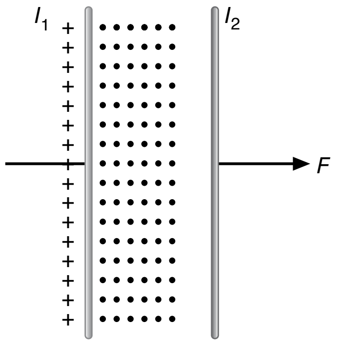
a) Aplicando la regla de la mano derecha los campos magnéticos en el punto P tienen la dirección del eje X pero tienen sentido opuesto. El campo resultante será:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_y + \vec{B}_x = \left(\frac{\mu_o I_y}{2\pi d_1} - \frac{\mu_o I_z}{2\pi d_2}\right) \cdot \vec{i} = 2 \cdot 10^{-5}\,\vec{i}$$

b) $\vec{F} = q(\vec{v}x\vec{B}) = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (10^4\,\vec{j}x2 \cdot 10^{-5}\,\vec{i}) =$

$= -3{,}2 \cdot 10^{-20}\,\vec{k}$

30. En la Figura se muestran dos conductores paralelos por los que circulan corrientes I1, I2. Si el campo magnético originado por I1 es el indicado en la figura, señala el sentido de I1 e I2 para que la fuerza entre los conductores sea de repulsión.



De acuerdo con la regla de la mano derecha, la corriente I_1 circula hacia abajo. Por tanto, la corriente I_2 debe circular hacia arriba para que las fuerzas sean de repulsión.

31. ¿A qué distancia entre sí deben estar dos conductores paralelos de 2 m de longitud que transportan una corriente de 10 A cada uno para que se repelan con una fuerza de 10^{-2} N?

La fuerza de repulsión entre dos conductores paralelos por los que circulan corrientes en sentido contrario viene dada por:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\ell$$

de donde se deduce:

$$d = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi F} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 10\ \text{A} \cdot 10\ \text{A} \cdot 2\ \text{m}}{2\pi \cdot 10^{-2}\ \text{N}} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Actividades

1. El plano de una espira circular de 20 cm de diámetro está situado perpendicularmente a un campo magnético de $2 \cdot 10^{-3}$ T de inducción. ¿Cuánto vale el flujo magnético que atraviesa el plano de la espira?

El flujo magnético viene dado por $\Phi = B \cdot S$; en este caso, $\alpha = 0$.

$$\Phi = B \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} = 6{,}28 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

2. Calcula el flujo de un campo magnético uniforme de 5 T a través de una espira cuadrada, de 1 m de lado, cuyo vector superficie sea:

a) **Perpendicular al campo magnético.**

b) **Paralelo al campo magnético.**

c) **Formando un ángulo de 30° con el campo magnético.**

a) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

b) $\Phi = 5 \cdot \cos 0° = 5$ W

c) $\Phi = 5 \cdot \cos 30° = 4{,}3$ W

3. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Define la magnitud flujo magnético. ¿Cuál es su unidad en el SI?**

b) **Una espira conductora plana se sitúa en el seno de un campo magnético uniforme de inducción magnética B. ¿Para qué orientación de la espira el flujo magnético a través de ella es máximo? ¿Para qué orientación el flujo es cero? Razona la respuesta.**

De $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$, será máximo cuando $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$, cuando el plano de la espira sea perpendicular al campo magnético. Será nulo cuando el plano de la espira sea paralelo al campo magnético.

4. Comprueba, utilizando las ecuaciones dimensionales, que la unidad de flujo magnético cumple la siguiente relación con las unidades fundamentales:

1 Weber = $\dfrac{1\ kg \cdot m^2}{s^2 \cdot A}$**, siendo A la unidad de corriente eléctrica: amperio.**

Hallamos la ecuación dimensional de $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$.

$[\phi] = [B] \cdot [S] \cdot [\cos\alpha]$. La ecuación dimensional de B la obtenemos la ley de Lorenz:

$B = \dfrac{F}{vq} \Rightarrow [B] = [F] \cdot [v \cdot q]^{-1} = MLT^{-2} \cdot L^{-1}T \cdot A^{-1}T^{-1} = M \cdot A^{-1} \cdot T^{-2}$;
$[S] = L^2$; $[\cos\alpha] = 1$

La ecuación del flujo será $[\Phi] = M \cdot A^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^2$. De acuerdo con esta ecuación, su unidad en SI se puede expresar en las siguientes unidades: kg m $^2 \cdot A^{-1} \cdot s^2$.

5. ¿De qué factores depende la fem inducida en un alambre que se desplaza en un campo magnético? ¿Cómo debe ser el desplazamiento para que no exista fem inducida en el alambre?

La fuerza electromotriz inducida viene dada $V = B\ \ell\ v$ sen α

Por tanto, depende de los siguientes factores:

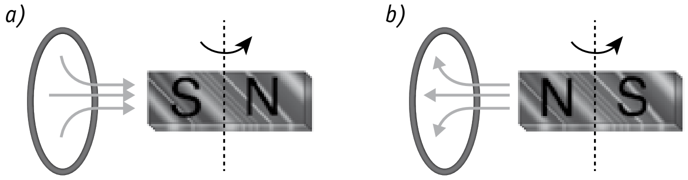
1. De la intensidad o inducción de campo magnético *(B)*
2. De la longitud del alambre *(ℓ)*
3. De la velocidad con que se desplaza el alambre en el campo magnético *(v)*
4. Del ángulo que forma la velocidad con el campo magnético (α)

No existirá fuerza electromotriz inducida si la velocidad de desplazamiento tiene la misma dirección que el campo: $\alpha = 0$

6. La espira de la figura tiene un radio de 5 cm. Inicialmente está sometida a un campo magnético de 0,2 T debido al imán cuyo eje es perpendicular al plano de la espira.

a) **Explica el sentido de la corriente inducida mientras gira hasta la posición final.**

b) **Calcula el valor de la fem media inducida si el giro anterior se realiza en una décima de segundo.**



a) Inicialmente el flujo es máximo. En la cara de la espira que está enfrente del imán aparece un N. De acuerdo con la ley de Lenz la corriente en la espira gira en sentido contrario a las agujas del reloj. La corriente disminuye y se anula cuando el eje del imán es paralelo al plano de la espira. El imán ha girado 90°. A partir de este instante la corriente cambia de sentido y aumenta de intensidad hasta la posición final. En ese instante la corriente en la espira es opuesta a la que tenía inicialmente.

b) Aplicamos la ley de Faraday:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi_f - \Phi_o}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 \cdot (B_f - B_o)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4}{0{,}1} = 3{,}14 \cdot 10^{-2} V$$

7. Por un hilo vertical indefinido circula una corriente eléctrica de intensidad *I*. Si dos espiras se mueven, una con velocidad paralela al hilo y otra con velocidad perpendicular, respectivamente, ¿se inducirá corriente eléctrica en alguna de ellas? Razona la respuesta.

Suponemos que es el plano de la espira el que se mueve respecto al conductor.

a) Si la espira se mueve en el plano *XY* perpendicular al conductor (eje *Z*) no se origina corriente en la espira porque el campo magnético originado por la corriente del hilo es paralelo al plano *XY*. Por tanto, no hay variación de flujo.

b) Si la espira se nueve en el plano *ZY* paralelo al eje del conductor, el campo magnético es perpendicular al plano de la espira, el flujo es máximo y va variando con el desplazamiento de la espira. En este caso hay corriente inducida en la espira.

8. **Responde a las siguientes cuestiones:**

   a) **Enuncia y comenta la ley de Faraday sobre la inducción electromagnética con la ayuda de la descripción de algún experimento sencillo. Comenta además alguna de sus aplicaciones.**

   b) **Una espira circular gira en un campo magnético uniforme. Razona si se induce fem en la espira si:**

   - **El campo magnético es paralelo al eje de rotación.**
   - **El campo magnético es perpendicular.**

   Existe fuerza electromotriz inducida en el caso de que el campo magnético sea perpendicular a la espira.

9. **¿Qué ventajas e inconvenientes, ecológicamente hablando, tiene una central hidroeléctrica?**

   Respuesta abierta.

10. **Establece un paralelismo entre las centrales térmicas y las nucleares.**

    Respuesta abierta.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. **¿Qué diferencias existen entre un acelerador lineal y u acelerador angular de partículas?**

   Un acelerador lineal emplea campos eléctricos. Un acelerador angular emplea campos eléctricos y campos magnéticos combinados. En un acelerador lineal las partículas se desplazan siguiendo una trayectoria rectilínea. En un acelerador angular la trayectoria es una línea curva.

2. **¿Dónde está ubicado el colisionador más potente del mundo?**

   Pertenece al CERN (Consejo Europeo de Investigación Nuclear) y está ubicado en Ginebra (Suiza).

3. **Cita alguna aplicación de los aceleradores lineales.**

   Medicina: radioterapia.

4. **¿En qué se diferencia un colisionador de un acelerador normal?**

   Un colisionador acelera partículas dirigidas en sentido contrario para que colisionen entre sí.

5. **Cuando un electrón es acelerado: *a)* gana energía; *b)* pierde energía; *c)* gana y pierde energía. Indica en tu cuaderno la respuesta correcta y razónala.**

   a) Gana energía si se acelera linealmente. El electrón aumenta la velocidad y, por tanto, su energía cinética hasta alcanzar velocidades próximas a la velocidad de la luz.

   c) Gana y pierde energía si la aceleración se hace con un acelerador angular. Las partículas eléctricas que se mueven a alta velocidad según una trayectoria curva emiten energía electromagnética: radiación sincrotrón.

Problemas propuestos

Inducción electromagnética. Leyes de Faraday

1. **Resuelve las siguientes actividades:**

   a) **Enuncia las leyes que rigen el fenómeno de la inducción electromagnética.**

   b) **El flujo magnético que atraviesa una espira varía con el tiempo de acuerdo con la expresión: $\Phi = 10 \cdot t^3 - 4 \cdot t^2 + t$ (SI). Deduce el valor de la fem inducida en $t = 2$ s.**

   $$e = \frac{d\Phi}{dt} = -(30 \cdot t^2 - 8t + 1) \text{ ; para } t = 2\text{s: } e_2 =$$

   $$= -(120 - 16 + 1) = -105\text{V}$$

2. **Una bobina cuadrada y plana de 25 cm² de superficie, construida con 5 espiras, está en el plano *XY*.**

   a) **Enuncia la ley de Faraday-Lenz.**

   b) **Calcula la fuerza electromotriz inducida si se modifica un campo magnético en dirección al eje *Z*, pasando de 0,5 T a 0,2 T en 0,1 s.**

   c) **Calcula la fem media inducida si el campo permanece constante, *B* = 0,5 T, y la bobina gira hasta colocarse en el plano *XZ* en 0,1 s.**

   a) Consultar libro de texto.

   b) $e = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} = NS\frac{\Delta B}{\Delta t} = NS\frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3}{0,1} =$
   $= 3,75 \cdot 10^{-2}V$

   c) $e = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = NS\frac{B_1 - B_2}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5}{0,1} = 6,25 \cdot 10^{-2}\text{ V}$

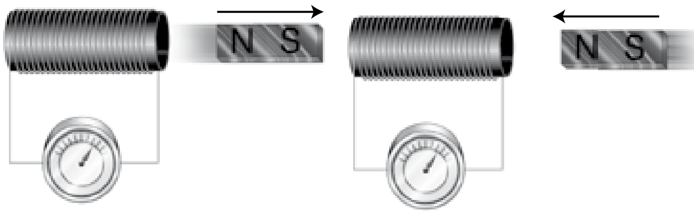
3. **El plano de una espira coincide con el plano *xy*. Calcula el flujo a través de ella si el campo magnético vale:**

   $$\vec{B} = 0,2\,\vec{u}_x + 0,01\,\vec{u}_y \text{ T}$$

   Si el plano de la espira coincide con el plano *xy*, el vector superficie se puede expresar $\vec{S} = S\vec{u}_z$ y el flujo será:

   $$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = (0,2\,\vec{u}_x + 0,01\,\vec{u}_y)\, S\vec{u}_z = 0$$

4. **Dibuja el sentido de la corriente inducida en las bobinas de la figura.**



   En el primer caso, la corriente circula de manera que llega por la derecha al galvanómetro. En el segundo caso, la corriente circula en sentido contrario.

5. **Una bobina de 100 espiras de 10 cm² cada una gira a 360 rpm alrededor de un eje situado en su plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,020 T. Calcula:**

a) **El flujo máximo que atraviesa la bobina.**

b) **La fem media inducida en la bobina.**

a) El flujo máximo que atraviesa la bobina es:

$\phi = BS = 0{,}020\ \text{T} \cdot 10 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb}$

Este flujo pasa de su valor máximo a valor nulo en un cuarto de periodo.

$t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{2\pi}{4\omega} = \dfrac{1}{24}\ \text{s}$

siendo: $\omega = \dfrac{360\ \text{rpm} \cdot 2\pi}{60\ \text{s}} = 12\pi\ \text{rad/s}$

b) La fem media inducida será:

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{100 \cdot (0 - 2 \cdot 10^{-5}\ \text{W}b)}{\frac{1}{24}\ \text{s}} = 0{,}048\ \text{V}$$

6. Una espira circular de 5 cm de radio, inicialmente horizontal, gira a 60 rpm en torno a uno de sus diámetros en un campo magnético vertical de 0,2 T.

a) **Dibuja en una gráfica el flujo magnético a través de la espira en función del tiempo entre los instantes *t* = 0 s y *T* = 2 s e indica el valor máximo de dicho flujo.**

b) **Escribe la expresión de la fem inducida en la espira en función del tiempo e indica su valor en el instante *t* = 1 s.**

En un cuarto de período el flujo pasa del valor máximo a cero:

$\Phi = S \cdot B \cdot \pi r^2 \cdot B \cdot \cos\alpha = \pi r^2 B \cdot \cos\omega t$, siendo

$\omega = \dfrac{60 \cdot 2\pi}{60} = 2\pi$ rad/s y $\Phi = SB \cdot \cos\omega t$;

$\Phi = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}2 \cdot \cos 2\pi t = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 2\pi t$

a) Para $t = 0$ $\quad \Phi_o = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \cos 2\pi \cdot 0 = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ W

Para $t = 2$ $\quad \Phi_o = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \cos 4\pi = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ W

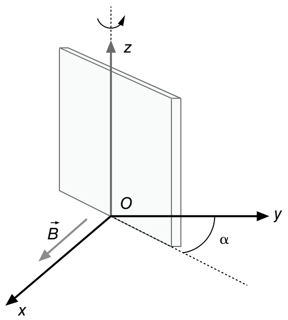
b) Fuerza electromotriz

c) $e = \dfrac{d\Phi}{dt} = SB\omega \cdot \text{sen}\,\omega t$; Para $t = 0$

$e_o = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}\,2\pi r \cdot 0 = 0$

Fuerza electromotriz inducida en una espira

7. Una espira cuadrada de 1,5 Ω de resistencia está inmersa en un campo magnético uniforme *B* = 0,03 T dirigido según el sentido positivo del eje *X*. La espira tiene 2 cm de lado y forma un ángulo α variable con el plano *YZ* como se muestra en la figura.



a) **Si se hace girar la espira alrededor del eje *Z* con una frecuencia de rotación de 60 Hz, siendo α = π/2 en el instante *t* = 0, obtén la expresión de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo.**

b) **¿Cuál debe ser la velocidad angular de la espira para que la corriente máxima que circule por ella sea 2 mA?**

a) $\Phi = BS \cdot \cos(\omega t + \alpha) = 0{,}03 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot \cos\left(2\pi f + \dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(120\pi \cdot t + \pi/2)$

$e = \dfrac{d\Phi}{dt} = -BS\omega \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha) = -4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot$

$\cdot\ \text{sen}(120\pi \cdot t + \pi/2)$

b) Fuerza electromotriz máxima $|e_m| = BS\omega$

$\omega = \dfrac{em}{BS} = \dfrac{I_m R}{BS} = \dfrac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{1}{4} = 250$ rad/s

8. Sea un campo magnético uniforme B dirigido en el sentido positivo del eje *Z*. El campo solo es distinto de cero en una región cilíndrica de radio 10 cm cuyo eje es el eje *Z* y aumenta en los puntos de esta región a un ritmo de 10^{-3} T/s.

Calcula la fuerza electromotriz inducida en una espira situada en plano XY y realiza un esquema gráfico indicando el sentido de la corriente inducida en los dos casos siguientes:

a) **Espira circular de 5 cm de radio centrada en el origen de coordenadas.**

b) **Espira cuadrada de 30 cm de lado centrada en el origen de coordenadas.**

a) $e = S\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi r^2 \dfrac{10^{-3}\ T}{1s} = 7{,}85 \cdot 10^{-6}$ V, sentido horario de la corriente inducida

b) Solamente hay variación de flujo en la superficie de espira contenida en el círculo de radio 1 cm (base del cilindro donde B ≠ 0). Por tanto,

$e = S\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = \pi r^2 \dfrac{10^{-3}\ T}{1s} = 3{,}14 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} = 3{,}14 \cdot 10^{-7}$ V, sentido horario de la corriente inducida.

9. En el plano *XY* se tiene una espira circular de radio *a* = 2 cm. Simultáneamente se tiene un campo magnético uniforme cuya dirección forma un ángulo de 30° con el semieje *Z* positivo y cuya intensidad es *B* = 3 t^2 T, donde t es el tiempo, expresado en segundos.

a) **Calcula el flujo del campo magnético en la espira, y su valor en *t* = 2 s.**

b) **Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira en *t* = 2 s.**

c) **Indica, mediante un dibujo, el sentido de la corriente inducida en la espira. Razona la respuesta.**

a) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = 3t^2 \cdot \pi r^2 \cdot \cos 30°$

Para $t = 2$ s ; $\Phi_2 = 3 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}866 = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ W

b) $e = \dfrac{d\Phi}{dt} = 6t \cdot \pi r^2 \cdot \cos 30° = 12 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot$

$\cdot\ 0{,}866 = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ V

10. Una bobina circular de 4 cm de radio y 30 vueltas se sitúa en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina cuyo módulo en función del tiempo es *B(t)* = = 0,01 *t* + 0,04 t^2, donde *t* está en segundos y *B* en teslas.

Determina:

***a)* El flujo magnético en la bobina en función del tiempo.**

***b)* La fuerza electromotriz inducida en el instante *t* = 5,00 s.**

a) $\Phi = NBS = 30 \cdot \pi r^2 \cdot (4t^2 + t) \cdot 10^{-2} = 30 \cdot 2{,}14 \cdot 16 \cdot 10^{-6} \cdot$

$\cdot\ (4t^2 + t) = 1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot (4t^2 + t)$

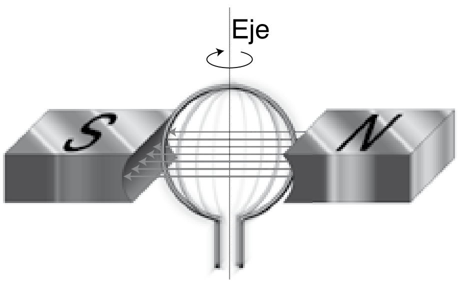
$$|e| = N\,\frac{d\Phi}{dt} = 1{,}51 \cdot 10^{-3} \cdot (8t + 1) = 6{,}18 \cdot 10^2 \text{ V}$$

11. Una bobina de 400 espiras y *r* = 10 cm de radio está situada con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme *B* = 0,8 T. Calcula la fem media inducida en la bobina si el campo se anula en 0,2 s.

Aplicamos la Ley de Faraday:

$$e = -N\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -NS\,\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{-400 \cdot \pi \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 \cdot (0 - 0{,}8\ \text{T})}{0{,}2\ \text{s}} = 50{,}2\ \text{V}$$

12. Una espira de 50,0 cm² gira alrededor de un eje de su plano con una velocidad de 100 rad/s dentro de un campo magnético de 0,50 T. Calcula la máxima fem inducida en la espira, si para *t* = 0 el flujo es máximo (ver figura).



De la Ley de Faraday se deduce:

$$e = -\frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = -\frac{S\,(B_1 - B_0)}{\frac{T}{4}} = \frac{4\,S\,B_0}{T} =$$

$$= \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5\ \text{T}}{0{,}02\ \text{s}} = 0{,}159\ \text{V}$$

13. Una bobina de 100 espiras tarda 0,05 s en pasar de un punto en donde el flujo magnético vale 2,0 · 10^{-5} Wb a un punto de flujo nulo. Halla la fem media inducida.

La fem inducida viene determinada por la Ley de Faraday.

$$e = -N\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -100{,}0 \cdot \frac{(0 - 2{,}0 \cdot 10^{-5})\ \text{Wb}}{0{,}05\ \text{s}} = 0{,}04\ \text{V}$$

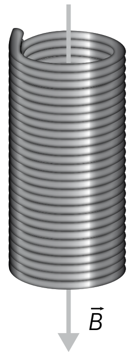
14. Una bobina de 300 espiras circulares de 5 cm de radio se halla inmersa en un campo magnético uniforme *B* = 0,08 T con la dirección del eje de la bobina como se indica en la figura. Determina la fuerza electromotriz inducida y el sentido de la corriente inducida, en Δ*t* = 0,05 s, si:

***a)* El campo magnético se anula.**

***b)* La bobina gira 90° en torno a un eje perpendicular al campo.**

***c)* La bobina gira 90° en torno a un eje paralelo al campo.**

d) El campo invierte su sentido.



$$\Phi = B \cdot S = 0{,}08 \cdot 3{,}14 \cdot 25\ 10^{-4} = 6{,}28 \cdot 10^{-4}\ \text{W}$$

a) $e = \dfrac{300 \cdot 6{,}28 \cdot 10^{-4}}{0{,}05} = 3{,}76$ V

b) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos 90° = 0$ W ; $e = N\,\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = 3{,}76$ V

c) $\Phi_o = B \cdot S$; $\Phi_f = B \cdot S \cdot \cos 0° = B \cdot S$; $\Delta\phi = 0$; $e = 0$ V

d) $\Delta\Phi = B \cdot S - (-B \cdot S) = 2B \cdot S$; e = $\dfrac{300 \cdot 2B \cdot S}{0{,}05} = 7{,}54$ V

Sentido de la corriente inducida: sentido horario.

15. Una espira circular de 10 cm de radio, situada inicialmente en el plano *XY*, gira a 50 rpm en torno a uno de sus diámetros bajo la presencia de un campo magnético $\vec{B} = 0{,}3\,\vec{k}$ T.

Determina:

***a)* El flujo magnético que atraviesa la espira en el instante *t* = 2 s.**

***b)* La expresión matemática de la fem inducida en la espira en función del tiempo.**

a) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \varphi_o) = B \cdot S \cdot \cos\omega t$ ya que $\varphi_o = 0$ para $t = 0$. El plano de la espira coincide con el plano *XY*.

$\Phi = 3\pi \cdot 10^{-3} \cdot \cos\dfrac{5\pi}{3}\,t$. Para $t = 2$ $\Phi_2 = 0{,}3 \cdot \pi \cdot$

$\cdot\ 10^{-2} \cos\dfrac{5\pi}{3} \cdot 2 = -4{,}7 \cdot 10^{-3}$ W

b) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\,\omega t = 4{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\,t$

16. Un solenoide de 200 vueltas y de sección circular de diámetro 8,0 cm está situado en un campo magnético uniforme de valor 0,50 T cuya dirección forma un ángulo de 60º con el eje del solenoide. Si en un tiempo de 100 ms disminuye el valor del campo magnético uniformemente a cero, determina:

***a)* El flujo magnético que atraviesa inicialmente el solenoide.**

***b)* La fuerza electromotriz inducida en dicho solenoide.**

a) El flujo magnético que atraviesa el solenoide viene determinado por:

$\phi = BS \cos\theta = 0{,}5\,T \cdot \pi\ (4 \cdot 10^{-2})2\ m^2 \cdot 0{,}5 =$

$= 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Wb

b) La fem inducida es:

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\Delta(BS\cos\theta)}{\Delta t} = -NS\cos\theta\,\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -200 \text{ esp.} \cdot \pi\ (4 \cdot 10^{-2})^2\ m^2/\text{esp} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{(0 - 0{,}5\ T)}{0{,}1\ s} = 2{,}5\ V$$

17. Una espira de 10 cm de radio se coloca en un campo magnético uniforme de 0,4 T y se le hace girar con una frecuencia de 20 Hz. En el instante inicial el plano de la espira es perpendicular al campo:

***a)* Escribe la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y determina el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida.**

***b)* Explica cómo cambiarían los valores máximos del flujo magnético y de la fem inducida si se duplicase el radio de la espira. ¿Y si se duplicara la frecuencia de giro?**

a) Expresión general del flujo: $\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\omega t + \varphi_o)$. Para $t = 0$ el ánulo φ_o vale cero, ya que el plano de la espira es perpendicular al campo magnético. Por tanto, los vectores $\vec{S}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección.

$\Phi = B \cdot S \cdot \cos 2\pi ft = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 40\pi t$. Fuerza electromotriz inducida:

$e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\,\omega t$. Valor máximo:

$e_m = B \cdot S \cdot \omega = 0{,}4 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \cdot 40\pi = 0{,}16 \cdot \pi^2 V$

b) Si se duplica el radio $\Phi_2 = 4\,\Phi_1$. El flujo máximo no depende de la frecuencia.

Fuerza electromotriz: $e_2 = 4e_1$ si se duplica el radio. $e_2 = 2e_1$ si se duplica la frecuencia.

18. Una espira circular de 2 cm de radio se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme *B* = 3,6 T paralelo al eje *Z*. Inicialmente la espira se encuentra contenida en el plano *XY*. En el instante *t* = 0 la espira empieza a rotar en torno a un eje diametral con una velocidad angular constante ω = 6 rad/s.

***a)* Si la resistencia total de la espira es de 3 Ω, determina la máxima corriente eléctrica inducida en la espira e indica para qué orientación de la espira se alcanza.**

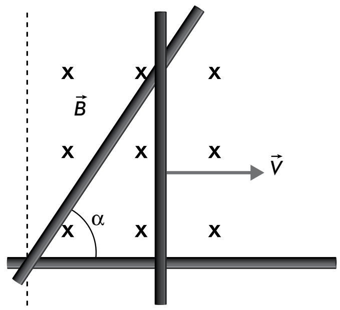
***b)* Obtén el valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante *t* = 3 s.**

a) $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\omega t$; $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \text{sen}\,\omega t$; $e_m = B \cdot S \cdot \omega$.

$$I_m = \frac{e_m}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} = \frac{3{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6}{3} = 9 \cdot 10^{-3}\ A$$

b) $e_3 = 3{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot \text{sen}\,18\text{rad} = -2{,}04 \cdot 10^{-2}$ V

19. Se tiene el circuito de la figura en forma de triángulo rectángulo, formado por una barra conductora vertical que se desliza horizontalmente hacia la derecha con velocidad constante v = 2,3 m/s sobre dos barras conductoras fijas que forman un ángulo α = 45°.



Perpendicular al plano del circuito hay un campo magnético uniforme y constante *B* = 0,5 T cuyo sentido es entrante en el plano del papel. Si en el instante inicial *t* = 0 la barra se encuentra en el vértice izquierdo del circuito:

***a)* Calcula la fuerza electromotriz inducida en el circuito en el instante de tiempo *t* = 15 s.**

***b)* Calcula la corriente eléctrica que circula por el circuito en el instante *t* = 15 s, si la resistencia eléctrica total del circuito en ese instante es 5 Ω. Indica el sentido en el que circula la corriente eléctrica.**

Hallamos la superficie del triángulo formado por las barras:

$$S = \frac{1}{2}x \cdot h = \frac{1}{2}x \cdot x \cdot \text{tag}\,45° = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}v^2t^2\ ;$$

$$\Phi = S \cdot B = \frac{1}{2}v^2t^2B$$

a) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}v^2t^2B\right) = -v^2tB = -2{,}3^2 \cdot 15 \cdot 0{,}5 =$
$= -39{,}68$ V

b) $I = \dfrac{e}{R} = \dfrac{-39{,}68}{5} = -7{,}94$ A, en sentido antihorario

20. Un electrón se lanza con una velocidad $\vec{v} = 5 \cdot 10^6\ \vec{i}$ m/s entre las placas de un condensador plano vacío cargado, cuyas placas son planos al plano *XY*, que produce un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 1 \cdot 10^2\ \vec{j}$ NC^{-1} (ver figura).

Las placas tienen una anchura *L* = 10 cm. Si el electrón entra de forma que su distancia a cada una de las placas es *d* = 1 cm, encuentra, suponiendo despreciable la fuerza gravitatoria:

***a)* La fuerza $\vec{F}$ y la aceleración $\vec{a}$ que actúan sobre el electrón.**

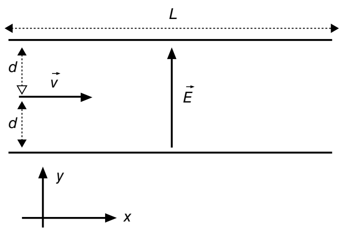
***b)* El vector inducción magnética $\vec{B}$ necesario para que el electrón no desvíe su trayectoria.**

***c)* El vector velocidad del electrón a la salida del condensador, en las circunstancias del apartado *b)*.**

***d)* Supón que ahora se descarga el condensador, de modo que se anula el campo eléctrico y solo tiene la inducción magnética hallada en el apartado *b)*. Calcula el radio de giro de la trayectoria del electrón.**

Datos: masa del electrón m = 9,11 · 10^{-31} kg. Valor absoluto de la carga del electrón:

$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C



a) $\vec{F} = q\vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\vec{j} = -1{,}6 \cdot 10^{-17}\,\vec{j}\ N$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-17}\,\vec{j}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} = -1{,}75 \cdot 10^{13}\,\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

b) $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0\ ;\ q \cdot \vec{v}x\vec{B} = -q \cdot \vec{E}\ ;\ \vec{B} = \dfrac{-10^2\,\vec{j}}{5 \cdot 10^6\,\vec{i}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \vec{k}\ T$

c) Si la fuerza neta es cero, el electrón de mueve con velocidad constante:

$\vec{v} = 5 \cdot 10^6\,\vec{i}$ m/s

d) La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad y hace que el electrón describa una trayectoria circular. La fuerza centrípeta es igual a la fuerza magnética.

$$m = \frac{v^2}{R} = qvB\ ;\ R = \frac{mv}{qB} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = 1{,}42\ \text{m}$$

21. Un campo magnético uniforme y constante de 0,01 T está dirigido a lo largo del eje *Oz*. Una espira circular se encuentra situada en el plano *xy*, centrada en el origen, y tiene un radio que varía en el tiempo según la función $r = 0{,}1 - 10\,t$ (en unidades del SI). Determina:

***a)* La expresión del flujo magnético a través de la espira.**

***b)* En qué instante de tiempo la fem inducida en la espira es 0,01 V.**

a) El flujo magnético a través de una espira viene dado por $\phi = BS\cos\alpha$. Si la espira se encuentra en el plano *xy* y el campo magnético está dirigido a lo largo del eje *Oz*, quiere decir, que el campo es paralelo a la normal de la espira. Por tanto, $\cos\alpha = 1$, y el flujo será máximo.

$\phi = BS = 0{,}01\ \text{T} \cdot \pi\,(0{,}1 - 10t)^2\ \text{m}^2 =$

$= 3{,}14 \cdot 10^{-4} - 6{,}28 \cdot 10^{-2}\,t + 3{,}14\,t^2$ Wb

b) La fem inducida en cualquier instante viene dada por la derivada del flujo:

$$e = \frac{d\phi}{dt} = 6{,}28\,t - 6{,}28 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

Para determinar el instante en que esta fem toma el valor de 0,01 V, resolvemos la ecuación $|6{,}28\,t - 6{,}28 \cdot 10^{-2}| = 0{,}01$

$$t = \frac{0{,}0628 - 0{,}01}{6{,}28} = 0{,}008\ \text{s}$$

22. Una espira circular de 2 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme de dirección normal al plano de la espira y de intensidad variable en el tiempo $B = 3\,t^2 + 4$ (SI):

***a)* Deduce la expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo.**

***b)* Representa gráficamente la fem inducida en función del tiempo y calcula su valor para $t = 2$ s.**

a) Partimos de la expresión de la variación de flujo para, integrando, hallar el flujo en función del tiempo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(BS\cos\theta)}{dt} = S\cos\theta\,\frac{dB}{dt} =$$

$= (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \pi \cdot \cos 2\pi \cdot 6t = 12\pi \cdot 10^{-4}\,t^2 + \text{cte.}$

Integrando resulta:

$\phi = 4\pi\,(3t^2) \cdot 10^{-4} + \text{cte. Wb}$

Para hallar la constante de integración, suponemos el cálculo en el instante $t = 0$ s. Si se cumple esa condición, $B = 4$ T. Sustituyendo $t = 0$ s en la expresión del flujo,

$\phi_{t=0\,s} = B_{t=0\,s}S\cos\theta = 4\pi\,(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 2\pi =$
$= 16\pi \cdot 10^{-4}$ Wb

$\phi_{t=0\,s} = 4\pi\,(3 \cdot 0^2) \cdot 10^{-4} + \text{cte. Wb}$

$\text{cte.} = 16 \cdot 10^{-4}$ Wb

Así, la expresión final del flujo es:

$\phi = 4\pi\,(3t^2 + 4) \cdot 10^{-4}$ Wb

b) Para representar la fem inducida en función del tiempo partimos de la expresión:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Delta(BS\cos\theta)}{\Delta t} = -S\cos\theta\,\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$= -\pi\,(2 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 0° \cdot 6t = -24\pi \cdot 10^{-4}\,t$ V,

que corresponde a una recta.

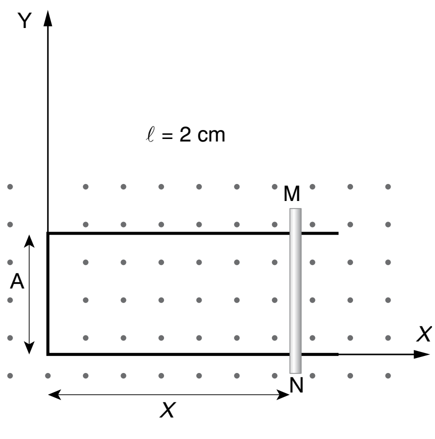
Para $t = 2$ s, el valor de la fem es:

$e = -48\pi \cdot 10^{-4}\ \text{V} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ V

23. Sobre un hilo conductor de resistencia despreciable, que tiene la forma que se indica en la figura, se puede deslizar una varilla *MN* de resistencia $R = 10\ \Omega$ en presencia de un campo magnético uniforme, $\vec{B}$ de valor 50 mT, perpendicularmente al plano del circuito. La varilla oscila en la dirección del eje *Ox* de acuerdo con la expresión $x = x_0 + A$ sen (ωt), siendo $x_0 = 10$ cm, $A = 5$ cm y el periodo de oscilación 10 s.

***a)* Calcula en función del tiempo el flujo magnético que atraviesa el circuito.**

***b)* Calcula en función del tiempo la corriente en el circuito.**



a) El flujo magnético que atraviesa el plano de la figura viene dado por:

$\phi = BS = B\ell x = B\ell\,(x_0 + A \text{ sen } \omega t) = B\ell x_0 + B\ell A \text{ sen } \omega t =$

$= 5 \cdot 10^{-4}\text{ T} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \cdot (10^{-1}\text{ m} + 5 \cdot 10^{-2} \text{ sen } \omega t) =$

$= \left[1 + 0{,}5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{5}\,t\right)\right] \cdot 10^{-6}\text{ Wb}$

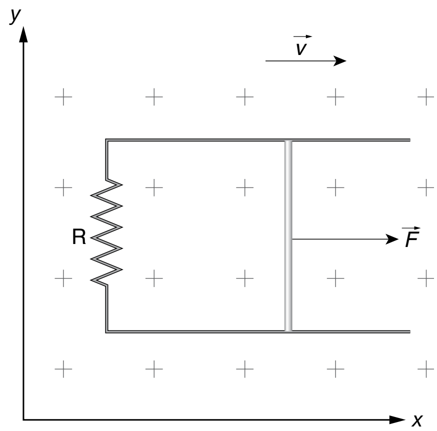
b) La fem que se induce en el circuito viene dada por la derivada de la función anterior:

$$e = \frac{d\phi}{dt} = 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}\,t = 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi}{5}\,t\text{V}$$

La intensidad de la corriente viene dada por la Ley de Ohm.

$$I = \frac{e}{R} = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi}{5}\,t}{10} = 3{,}14 \cdot 10^{-8} \cos \left(\frac{\pi}{5}\,\text{t}\right)\text{ A}$$

24. Un circuito situado en el plano *xy* consta de un conductor recto de 0,1 m de longitud que se desliza a lo largo de unos raíles conductores paralelos fijos (ver figura). La parte fija del circuito tiene una resistencia de 5 Ω. El circuito está sometido a la acción de un campo magnético $\vec{B} = -0{,}6\,\vec{u}_x$ T. Desplazamos el conductor hacia la derecha con velocidad $\vec{v} = 20\,\vec{u}_x$ m/s. Halla la fem inducida y la intensidad de la corriente inducida.



Por efecto del movimiento del conductor recto hacia la derecha se origina una fuerza magnética; esta produce una corriente eléctrica inducida. Al modificarse el área del circuito, el flujo magnético varía y se produce una fem inducida.

El flujo en cada instante es $\phi_m = Blx$.

Obtenemos la fem inducida a partir de la Ley de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi_m}{dt} = -Bl\,\frac{dx}{dt} = -Blv$$

expresión que, aplicada a nuestro problema toma la forma:

$e = -0{,}6\text{ T} \cdot 0{,}1\text{ m} \cdot 20\text{ m/s} = -1{,}2\text{ V}$

La intensidad de la corriente viene determinada mediante la Ley de Ohm.

$$I = \frac{|e|}{R} = \frac{1{,}2\text{ V}}{5\ \Omega} = 0{,}24\text{ A}$$

Transformación de la corriente alterna

25. La corriente producida en una central eléctrica se lleva al primario de un transformador y la corriente que sale del secundario se conduce, a través de la línea transmisora, hasta la estación eléctrica de un centro de consumo. Este transformador ¿deberá actuar como reductor o como elevador de tensión? Justifica la respuesta.

De conformidad con la contestación dada, ¿en qué arrollamiento del transformador debe haber más espiras? Justifica la respuesta.

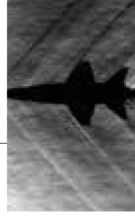
La corriente que envía la central a través de la línea transmisora debe ser de alta tensión, para que se pierda el mínimo de energía en la transmisión.

Por tanto, el transformador a la salida de la central debe ser elevador de tensión. Para hallar la relación del número de espiras entre primario y secundario aplicamos la relación $\frac{e_s}{e_p} = \frac{N_s}{N_p}$. En este caso si $e_s > e_p$ se cumple $N_s > N_p$. Por tanto, el secundario debe tener mayor número de espiras.

26. Halla el número de espiras que debe tener el primario de un transformador sabiendo que la tensión en la entrada es de 3 000 V y la tensión en la salida vale 125 V. El secundario está formado por 50 espiras.

Aplicamos la relación de transformación: $\frac{e_s}{e_p} = \frac{N_s}{N_p}$

$$N_p = \frac{e_p N_s}{e_s} = \frac{3\,000 \cdot 50}{125} = 1\,200 \text{ espiras}$$



Actividades

1. Explica mediante un ejemplo el transporte de energía en una onda. ¿Existe un transporte efectivo de masa? Razona la respuesta.

Respuesta abierta.

2. ¿El movimiento de una onda es uniforme o uniformemente acelerado? Razona la respuesta.

El movimiento de una onda es uniforme, porque al no existir masa que se mueva, no hay posibilidad de aceleración.

3. Una onda armónica transversal viaja por una cuerda con una velocidad de propagación v = 12 cm/s, una amplitud A = 1 cm y una longitud de onda λ = 6 cm. Determina la frecuencia y el número de onda.

La onda se propaga con movimiento rectilíneo y uniforme. No hay movimiento de materia. Aplicamos la ecuación del MRU.

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{12}{6} = 2 \text{ Hz} ; k = \frac{2\pi}{\lambda} = 105 \text{ rad/m}$$

4. Una onda transversal se propaga por un medio elástico con una velocidad v, una amplitud A_0 y una frecuencia f_0. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **Determina en qué proporción cambiarían la longitud de onda, la velocidad de propagación, el periodo y la amplitud si se actúa sobre el centro emisor de ondas reduciendo a la mitad la frecuencia de oscilación.**

b) **Sin alterar su frecuencia f_0, se modifica la amplitud de la onda haciendo que aumente al doble. ¿En qué proporción cambiarían la velocidad de la onda, la velocidad máxima de las partículas del medio y la longitud de onda?**

a) La longitud de onda se duplica, la velocidad no varía, el periodo se duplica y la amplitud no varía.

En efecto: Si $f_1 = \frac{f_o}{2}$ y las demás magnitudes no varían se cumple:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f_1} ; \lambda_o = \frac{v_o}{f_0} ; \frac{\lambda_1}{\lambda_o} = \frac{v_1 f_o}{v_o f_1} = 2 ; \lambda_1 = 2\lambda_o ; \frac{T_1}{T_o} = \frac{f_o}{f_1} =$$

$$= 2 \Rightarrow T_1 = 2T_o$$

b) La velocidad de la onda no varía, la velocidad de oscilación se duplica y la longitud de onda no varía.

La amplitud de la onda depende exclusivamente de la velocidad con que vibra la partícula que origina la onda: $v = A\omega \cdot \cos\omega t$. La velocidad máxima de vibración es directamente proporcional a la amplitud.

5. ¿Cómo debe aumentar la tensión en una cuerda para que la velocidad de propagación de una onda se duplique? ¿Influye la velocidad transversal de un punto de la cuerda en la velocidad de propagación?

La velocidad de propagación de una onda por una cuerda depende de la tensión de la cuerda, como indica la igualdad $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$; de acuerdo con ella, la tensión debe ser cuatro veces mayor para que la velocidad sea el doble.

La velocidad transversal de los puntos del medio no influye en la velocidad de propagación de la onda, que solamente depende de las características de la cuerda.

6. Cuando un músico tensa una cuerda de su instrumento, ¿cómo influye esta operación en las magnitudes que se indican?

a) **La velocidad de propagación de las ondas.**

b) **La frecuencia del sonido.**

a) y *b)* Cuando una cuerda se tensa, aumenta la velocidad de propagación de la onda, en cuanto a la frecuencia, se hará mayor, pues la longitud de onda resonante se mantiene pero la velocidad de propagación ha variado.

7. Una onda viene dada por la ecuación:

$$y\ (x, t) = 0{,}2 \cos\ (50\ t + x)$$

a) **¿En qué sentido se propaga?**

b) **¿Cuál es su longitud de onda?**

c) **¿Con qué velocidad se propaga?**

a) El signo (+) indica que la onda se propaga en sentido negativo del eje *0x*.

b) La longitud de onda se obtiene a partir del número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ m}$$

c) La velocidad de propagación será:

$$v = \lambda\, f = 2\pi \text{ m} \cdot \frac{50}{2\pi} = 50 \text{ m/s}$$

8. Una onda armónica que se propaga por un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de propagación de 350 m/s.

a) **¿Qué distancia mínima hay, en un cierto instante, entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60°?**

b) **¿Cuál es la diferencia de fase de oscilación, en un cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^{-3} s?**

a) Hallamos en primer lugar la longitud de onda y el número de onda

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{350}{500} = 0{,}7$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2{,}85\pi$$

Diferencia de fase en función de las distancias: $\delta = k(x_2 - x_1)$;

$$\frac{\pi}{3} = 2{,}85\pi(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{8{,}55} = 0{,}116$$

b) La diferencia de fase en función del tiempo viene dada por:

$$\delta = \omega(t_2 - t^1) = 2\pi f(t_2 - t_1) = 2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot 10^{-3}\ s = 180°$$

9. Un oscilador produce ondas circulares en un estanque a intervalos regulares de tiempo. Si hacemos que el oscilador produzca el triple número de ondas por segundo:

***a)* ¿Se triplica el periodo?**

***b)* ¿Se triplica la frecuencia?**

***c)* ¿Se triplica la longitud de onda?**

***d)* ¿Las ondas se propagan con triple velocidad?**

Si hacemos que el oscilador produzca triple número de ondas por segundo, estamos multiplicando por tres la frecuencia.

a) De $T = \frac{1}{f}$, se deduce que el periodo se reduce a la tercera parte cuando se triplica la frecuencia.

b) Se triplica la frecuencia: es un dato del problema.

c) La longitud de onda depende de la frecuencia $\lambda = \frac{v}{f}$. Por tanto, para un medio de propagación determinado, la longitud de onda disminuye en un tercio.

d) La velocidad de propagación no depende de la frecuencia, sino de las características del medio.

10. Considera la siguiente ecuación de una onda $y\ (x,\ t) = A$ sen $(b\ t - c\ x)$.

***a)* ¿Qué representan los coeficientes *A, b, c*? ¿Cuáles son sus unidades?**

***b)* ¿Qué interpretación tendría que la función fuera «coseno» en lugar de «seno»? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera + en lugar de −?**

a) La ecuación de una onda viene dada por $y(x,t) = A \cdot \text{sen}(2\pi f \cdot t - kx)$. A representa la amplitud en metros, b representa 2π veces la frecuencia s^{-1} y c representa el número de onda en m^{-1}.

b) La onda se puede expresar tanto en coseno como en seno: basta introducir un desfase de 90°. Si el signo es + quiere decir que la onda se propaga en sentido negativo: $v < 0$

11. De las propiedades estudiadas, ¿cuáles son específicas de las ondas? ¿Y cuáles se pueden aplicar tanto a las ondas como al movimiento de partículas materiales?

Las propiedades específicas de las ondas son la difracción, la polarización y las interferencias. En cambio, la reflexión y la refracción se pueden aplicar tanto a las ondas como a las partículas materiales. De hecho, el propio Newton explicó estas dos últimas propiedades aplicando su Teoría Corpuscular de la Luz.

12. ¿Se puede polarizar una onda sonora? ¿Por qué?

La polarización solamente es aplicable, por definición, a las ondas transversales. Por tanto, las ondas sonoras no se pueden polarizar porque son longitudinales.

13. ¿En una interferencia se destruye la energía que propagan las ondas?

En una interferencia no se destruye la energía. Solamente se produce una compensación de energía en el punto de interferencia si esta es destructiva.

14. ¿Cuándo tiene lugar una interferencia constructiva entre dos ondas idénticas? ¿Y cuándo es destructiva?

La interferencia es constructiva si las ondas llegan en fase al punto de interferencia. Esto ocurre cuando la diferencia entre las distancias recorridas por las ondas desde los centros emisores hasta el punto de interferencia es un múltiplo entero de longitudes de onda.

En cambio, la interferencia es destructiva cuando dicha diferencia es un múltiplo impar de semilongitudes de onda.

15. La intensidad y la amplitud de una onda disminuyen con la distancia. ¿Cuál de las dos lo hace más rápido?

De las relaciones $I\ r^2$ = cte. y $A\ r$ = cte., se deduce que la intensidad disminuye más rápidamente con la distancia, puesto que es inversamente proporcional al cuadrado de esta.

16. Cuando una onda se amortigua, ¿cambia su frecuencia? ¿Y su longitud de onda? ¿Y su amplitud?

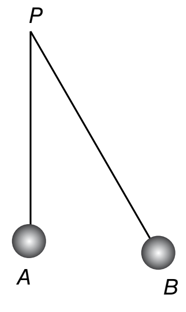
Para un medio determinado, la energía que transmite una onda solamente depende de la amplitud, como indica la fórmula $E = \frac{1}{2} k A^2$. Por tanto, cuando una onda se amortigua, solamente cambia su amplitud.

17. Dos ondas de igual amplitud se propagan con frecuencias 225 Hz y 450 Hz. ¿Cuál propaga más energía? ¿Cuál tiene mayor intensidad?

La energía transmitida por una onda es proporcional al cuadrado de la frecuencia. Por tanto, propaga cuatro veces más de energía la onda de 450 Hz. Lo mismo ocurre con la intensidad.

18. Dos altavoces que emiten sonidos con la misma frecuencia de 272 Hz y en concordancia de fase están situados en los puntos *A* y *B* de un auditorio, como se puede apreciar en la figura. Un espectador está situado en el punto *P*. ¿Podrá oír algo?

Datos: v = 340 m/s; AP = 50 m; BP = 75 m.



Oirá si los sonidos de los dos altavoces llegan al punto P en fase. Esto ocurre cuando la diferencia de distancias BP y AP es un número entero de longitudes de onda. Es decir, se cumple:

$$x_2 - x_1 = n\lambda\ ;\ n = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{v\ /\ f} = \frac{(x_2 - x_1)\ \cdot\ f}{v} = \frac{25\ \cdot\ 272}{340} = 20$$

19. Explica brevemente en qué consiste el fenómeno de la difracción de una onda. ¿Qué condición debe cumplirse para que se pueda observar la difracción de una onda a través de una rendija?

Respuesta abierta.

20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Explica brevemente qué es una onda estacionaria y cómo se forma.**

b) **¿Qué son los nodos de una onda estacionaria? ¿Qué son los vientres, crestas o antinodos?**

a) La onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos idénticas pero que se propagan el sentido contrario.

b) Nodos son los puntos en donde la amplitud resultante de la interferencia es cero. Los vientres son los puntos de máxima amplitud.

21. Responde a estas preguntas:

a) **Escribe la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos, y explica el significado físico de cada uno de los parámetros que aparecen en ella.**

b) **Explica qué puntos de la cuerda del apartado anterior permanecen en reposo. ¿Qué puntos oscilan con amplitud máxima?**

a) $y(x,t) = 2A \cdot \text{sen}(2\pi f \cdot t) \cdot \text{sen}(k \cdot x)$, donde A es la amplitud de las ondas que al interferir producen la onda estacionaria, f es la frecuencia y k el número de onda.

b) Los puntos en reposo y los que tienen la máxima oscilación dependen del valor de sen(kx). Permanecen en reposo los puntos nodales cuando sen$(kx) = 0$, los puntos que se encuentan a una distancia $x = \lambda/2$. Los puntos con la máxima oscilación son los vientres que cumplen la condición: sen$(kx) = 1$, es decir, para valores de $x = (2n + 1)\dfrac{\lambda}{4}$.

22. Calcula la ecuación de la onda estacionaria que resulta de la interferencia de las ondas: $y_1\ (x, t) = 0{,}5 \cos\ (50\ \pi \cdot t - \pi x)$ e $y_2\ (x, t) = -0{,}5 \cos\ (50\ \pi \cdot t - \pi \cdot x)$ expresadas en unidades del SI.

a) **¿Cuál es la amplitud máxima de la onda estacionaria?**

b) **¿Qué distancia hay entre dos nodos consecutivos?**

En general una onda estacionaria viene dada por $y(x,t) = 2A\text{sen}(kx) \cdot \text{sen}(2\pi f \cdot t)$

En este caso: $A = 0{,}5$ m la amplitud de las que interfieren; $2\pi f = 50\pi$ y $k = \pi$.

Por tanto la ecuación de la onda será:

$y\ (x, t) = \text{sen}\ (\pi \cdot x) \cdot \text{sen}\ (50\ \pi \cdot t)$;

a) Amplitud máxima: $Am = 2A = 1$ m;

b) La distancia entre dos nodos consecutivos es

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/k}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\pi} = 1\ m$$

23. Admitiendo que los factores que influyen en la velocidad del sonido son la temperatura y la densidad del medio, clasifica de mayor a menor la velocidad de propagación de una onda sonora en los siguientes medios a temperatura ambiente: aire, vidrio, agua, corcho.

La velocidad de propagación disminuye con la densidad. Por tanto, contando con su estado sólido, líquido o gaseoso, el orden será: vidrio, agua, corcho, aire.

24. Calcula la velocidad del sonido en el argón a 20,0 °C. (Coeficiente adiabático del argón: $\gamma = 1{,}67$; $M = 39{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.)

Aplicamos la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 8{,}31\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 293\ \text{K}}{39{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1}}} = 319\ \text{m/s}$$

25. La velocidad del sonido en un gas a 10 °C es de 200 m/s. ¿Cuál será la velocidad del sonido en dicho gas si la temperatura aumenta hasta 20 °C?

Si v_1 es la velocidad a 10 °C, se cumple:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma R \cdot 283\ \text{K}}{M}}$$

y si v_2 es la velocidad a 20 °C, tenemos:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\gamma R \cdot 293\ \text{K}}{M}}$$

Dividimos miembro a miembro y obtenemos la expresión:

$$\frac{200}{v_2} = \sqrt{\frac{283}{293}} = 0{,}98;\quad v_2 = \frac{200\ \text{m/s}}{0{,}98} = 204\ \text{m/s}$$

26. Si el sonido se propaga en un gas a 0 °C con una velocidad de 317 m/s, calcula la masa molar del gas. $\left(\textbf{Dato: } \gamma = \dfrac{7}{5}.\right)$

De la ecuación $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$ despejamos la masa molar:

$$M = \frac{\gamma RT}{v^2} = \frac{\frac{7}{5} \cdot 8{,}31\ \text{J mol}^{-1}\ K^{-1} \cdot 273\ \text{K}}{317^2\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}} = 32 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}$$

27. Un barco emite simultáneamente un sonido en el agua y otro sonido en el aire. Si otro barco alejado detecta ambos sonidos con una diferencia de 2 s, ¿a qué distancia están los barcos?

Datos: velocidad del sonido: en el aire 340 m/s; en el agua 1 500 m/s.

Supongamos que el sonido por el agua ha tardado t segundos y $t + 2$ s por el aire. Como la distancia x ha sido la misma, se cumple:

$340 \cdot (t + 2) = 1\,500\ t$; $t = \dfrac{68}{116} = 0{,}586$ s. La distancia será

$x = 1\,500 \cdot 0{,}586 = 879$ m

28. Un ultrasonido se propaga en el aire, $v = 340$ m/s, con una frecuencia de 25 000 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de este ultrasonido?

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} = \frac{340}{25\,000} = 1{,}36 \cdot 10^{-2}\ m$$

29. Si la velocidad del sonido en el aire es $v = 340$ m/s.

a) **¿Cuál es la longitud de onda de la voz de un bajo que canta a una frecuencia de 50 Hz?**

b) **¿Cuál es la frecuencia de la voz de una soprano que emite sonidos de longitud de onda $\lambda = 0{,}17$ m?**

a) Longitud de onda es la distancia que se propaga la onda en un periodo:

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} = \frac{340}{50} = 6{,}8\ \text{m}$$

b) Aplicamos la misma ecuación: $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{340}{0{,}17} = 2\,000$ Hz

30. Un automóvil que viaja hacia una montaña con una velocidad de 72 km/h hace sonar el claxon y recibe el eco a los 2 segundos. ¿A qué distancia está de la montaña cuando recibe el eco?

Supongamos que toca el claxon en el punto *A* y percibe el eco en el punto *B*. Si λ es la distancia entre *A* y *B* y llamamos *x* a la distancia entre el punto *B* y la montaña se cumple: $\lambda = 20\,t$ para el recorrido el automóvil, $\lambda + 2x = 340\,t$ para el recorrido del sonido. De las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$20t + 2x = 340t\ ;\ x = \frac{340t - 20t}{2} = 320 \text{ m}$$

31. Dos fuentes sonoras que están separadas por una pequeña distancia emiten ondas armónicas de igual amplitud en fase y de frecuencia 1 kHz. Estas ondas se transmiten en el medio a una velocidad de 340 m/s.

***a)* Calcula el número de onda, la longitud de onda y el periodo de la onda resultante de la interferencia entre ellas.**

***b)* Calcula la diferencia de fase en un punto situado a 1 024 m de una fuente y a 990 de la otra.**

En la interferencia solamente se modifica la amplitud. Por tanto, las demás magnitudes no varían.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \text{ s}\ ;\ \lambda = v \cdot T = 340\ m/s \cdot 10^{-3} \text{ s} =$$

$$= 0{,}34 \text{ m}\ ;\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6{,}28}{0{,}34} = 18{,}47 \text{ rad}$$

$$\delta = (x_2 - x_1) \cdot k = \frac{(x_2 - x_1) \cdot 2\pi}{\lambda} = \frac{34 \cdot 2\pi}{0{,}34} = 200\pi.$$ Llegan en fase.

32. Teniendo en cuenta los datos que se indican en la tabla, calcula la velocidad del sonido en una barra de acero.

Material	Módulo *J* (N m^{-2})	Densidad ρ (kg m^{-3})
Aluminio	$7 \cdot 10^{10}$	$2{,}7 \cdot 10^3$
Latón	$9 \cdot 10^{10}$	$8{,}7 \cdot 10^3$
Hierro	$9 \cdot 10^{10}$	$7{,}9 \cdot 10^3$
Acero	$20 \cdot 10^{10}$	$7{,}8 \cdot 10^3$
Vidrio	$5{,}4 \cdot 10^{10}$	$2{,}6 \cdot 10^3$

La velocidad del sonido en los sólidos depende del módulo de Young y de la densidad del material de acuerdo con la igualdad:

$$v = \sqrt{\frac{J}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{10}}{7{,}8 \cdot 10^3}} = 5{,}1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

33. ¿Dónde se propaga con más velocidad el sonido, en el agua del mar o en el agua dulce de una laguna? Razona la respuesta.

La velocidad del sonido en los líquidos depende del módulo volumétrico *B* del líquido (es el mismo para el agua dulce que para el agua salada) y de la densidad densidad de acuerdo con la igualdad:

$v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$ El agua del mar es más densa que el agua dulce. Por tanto, el sonido se propaga con más velocidad en el agua dulce.

34. Un foco emite ondas esféricas con potencia $P = 1 \cdot 10^{-3}$ W. Calcula la intensidad y el nivel de intensidad en los siguientes puntos:

***a)* A una distancia de 1 m del foco.**

***b)* A una distancia de 10 m del foco.**

Dato: intensidad umbral de audición: $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}

a) Intensidad: $I_1 = \dfrac{P}{S_1} = \dfrac{10^{-3}}{4\pi r_1^2} = 8 \cdot 10^{-5}$ W/m^2

Nivel de intensidad: $\beta_1 = 10 \cdot \log \dfrac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \log \dfrac{8 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} = 79$ dB

b) Intensidad: $I_2 = \dfrac{P}{S_2} = \dfrac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^2} = 8 \cdot 10^{-7}$ W/m^2

Nivel de intensidad: $\beta_2 = 10 \cdot \log \dfrac{8 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 59$ dB

35. Un búho que se encuentra en un árbol a una altura de 20 m emite un sonido cuya potencia sonora es de $3 \cdot 10^{-8}$ W. Si un ratón se acerca a las proximidades del árbol:

***a)* ¿A qué distancia del pie del árbol comenzará a oír el ratón al búho?**

***b)* Calcula el nivel de intensidad sonora percibido por el ratón cuando está junto al árbol. Nota: supón que la intensidad umbral de audición del ratón es $I_0 = 10^{-8}$ W m^{-2}.**

a) Cuando se encuentre a una distancia en que la intensidad sonora coincida con la intensidad umbral de audición: $I = I_0$

$I_o = \dfrac{3 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot r^2}$, $r = \sqrt{\dfrac{3\,.\,10^{-8}}{4\pi \cdot 10^{-12}}} = 48{,}86$ m. Este valor representa la distancia entre el ratón y la posición del búho. Esta distancia es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 20 m. La distancia del ratón al pie del árbol será: $d = \sqrt{48{,}86^2 - 20^2} = 44{,}58$ m

b) $I = \dfrac{3 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 400} = 6 \cdot 10^{-12}\ ;\ \beta = 10 \cdot \log \dfrac{6 \cdot 10^{-12}}{10^{-12}} =$
$= 10 \cdot \log 6 = 7{,}7$ dB

36. El sonido producido por la sirena de un barco alcanza un nivel de intensidad sonora de 80 dB a 10 m de distancia. Considerando la sirena como un foco sonoro puntual, calcula:

***a)* La intensidad de la onda sonora a esa distancia y la potencia de la sirena.**

***b)* El nivel de intensidad sonora a 500 m de distancia.**

a) $\beta = 10 \cdot \log \dfrac{I_1}{10^{-12}}\ ;\ 8 = \log \dfrac{I_1}{10^{-12}}\ ;\ 10^8 = \dfrac{I_1}{10^{-12}}\ ;$

$I_1 = 10^{-4}$W/m^2 $P = I_1 \cdot 4\pi r^2 = 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10^2 = 0{,}126$ W

b) Intensidad a 500 m:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi \cdot (500)^2} = \frac{126 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{4 \,.\, 10^{-8}}{10^{-12}} = 10 \cdot 4 \cdot \log 4 = 24 \text{ dB}$$

37. Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia d del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.

a) **Calcula las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.**

b) **Calcula la potencia sonora del foco. Dato: intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.**

$$10 = \log \frac{10^{12} \cdot P}{4\pi \cdot d^2} = 12\log P - (2\log d + \log 4\pi)$$

$$8 = \log \frac{10^{12} \cdot P}{4\pi \cdot (d + 100)^2} = 12\log P - (2\log (d + 100) + \log 4\pi)$$

De la primera ecuación tenemos: $10 + 2\log d = 12\log P - \log 4\pi$

Hacemos lo mismo con la segunda: $8 + 2\log (d + 100) = 12\log P - \log 4\pi$

Ambas ecuaciones tienen el segundo miembro común. Por tanto, se cumple:

$10 + 2\log d = 8 + \log(d + 100) \Rightarrow 5 + \log d =$

$= 4 + \log(d + 100)$; $1 = \log \dfrac{d + 100}{d}$; $10 = \dfrac{d + 100}{d}$;

$d = 11{,}1$ m; $d' = 111{,}1$ m

Hallamos la intensidad:

$$100 = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} \,;\; 10^{10} = \frac{I}{10^{-12}} \,;\; I = 10^{2} \text{ W/m}^2$$

Potencia: $P = I \cdot 4\pi d^2 = 10^{-2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 11{,}1^2 = 15{,}5$ W

38. Una persona situada entre dos montañas dispara una escopeta y oye el eco procedente de cada montaña al cabo de 2 s y 3,5 s.

a) **¿Cuál es la distancia entre las dos montañas?**

b) **Si la potencia sonora inicial producida en el disparo es de 75 W, y suponiendo que el sonido se transmite como una onda esférica sin fenómenos de atenuación o interferencia, calcula el nivel de intensidad sonora con el que la persona escuchará el eco del disparo procedente de la montaña más cercana.**

a) Tras el disparo el sonido se propaga hacia ambas montañas haciendo el recorrido e ida y vuelta en el tiempo indicado. Si llamamos d a la distancia entre las montañas, se cumple: $2d = 340 \cdot 2 + 340 \cdot 3{,}5$; $d = 935$ m

b) La montaña más próxima se encuentra a 340, pero el sonido recorre el doble de distancia hasta que se escucha el eco. Intensidad sonora que percibe la persona:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{75}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 640^2} = 1{,}46 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Nivel de intensidad $\beta = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_o} = 10 \log \dfrac{1{,}46 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} =$

$= 71{,}6$ dB

39. Un altavoz emite con una potencia de 80 W. Suponiendo que el altavoz es una fuente puntual y sabiendo que las ondas sonoras son esféricas, determina:

a) **La intensidad de la onda sonora a 10 m del altavoz.**

b) **¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 60 dB?**

a) $I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{80}{4\pi 10^2} = 6{,}37 \cdot 10^{-2}$ W/m^2

b) $60 = 10\log = \dfrac{I}{10^{-12}}$; $\dfrac{I}{10^{-12}} = 10^{6} \Rightarrow I = 10^{-6}$ W/m^2

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80}{4\pi \cdot 10^{-6}}} = 2\,523 \text{ m}$$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. Una fuente ultrasónica emite ondas de frecuencia 45 kHz. ¿En qué proporción ha de variar la energía de esa fuente para destruir unas bacterias a una frecuencia de 30 kHz?

a) **2,25.**

b) **0,44.**

c) **1,5.**

a) 2,25.

2. ¿A qué profundidad estará localizado un galeón si se envía un ultrasonido con módulo volumétrico $B = 0{,}22 \cdot 1\,010$ Nm^{-2} y densidad 1,030 g/cm^3 y tarda 3 s en recibirse la señal?

a) **4 450 m.**

b) **2 192 m.**

c) **4 384 m.**

b) 2 192 m.

3. Una onda presenta la siguiente ecuación de onda *y (x, t)* = 0,8 cos (2 000 *t* + *x*), ¿puede tratarse de un ultrasonido?

a) **Sí.**

b) **No.**

c) **Solo si interfiere con otra onda de *f* mayor.**

b) No. Recordar el orden de magnitud de las frecuencias de los ultrasonidos.

4. La reparación de una placa solar en la Estación Espacial Internacional precisa una soldadura. Una de las aplicaciones del ultrasonido es precisamente esa. ¿Qué frecuencia ultrasónica es la óptima para la reparación?

a) **50 kHz.**

b) **No se puede reparar con ultrasonido.**

c) **100 kHz.**

b) No se puede reparar con ultrasonido. El sonido no se transmite en el vacío, y la Estación Espacial Internacional está en él.

Problemas propuestos

Magnitudes características de una onda

1. Una antena emite una onda de radio de $6 \cdot 10^7$ Hz.

a) Explica las diferencias entre esta onda y una onda sonora de la misma longitud de onda, y determina la frecuencia de esta última.

b) La onda de radio penetra en un medio y su velocidad se reduce a 0,75 c. Determina su frecuencia y su longitud de onda en ese medio.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $v_s = 340$ m/s.

a) La onda de radio es electromagnética, se propaga en el vacío a la velocidad de la luz. La onda sonora es mecánica, y no se propaga en el vacío.

Onda de radio: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = 5$ m ; sonido $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{340}{5} = 68$ Hz

b) $v = 0{,}75 \cdot 3 \cdot 108 = 2{,}25 \cdot 10^8$ m/s ; $\lambda = \dfrac{2{,}25 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = 3{,}75$ m

La frecuencia no varía.

2. Uno de los extremos de una cuerda tensa, de 6 m de longitud, se hace oscilar armónicamente con una f = 60 Hz. Calcula la longitud de onda y el número de onda de las ondas de la cuerda.

Velocidad de propagación: $v = \dfrac{x}{t} = \dfrac{6\ \text{m}}{0{,}5\ \text{s}} = 12$ m/s

Longitud de onda: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{12\ \text{m/s}}{60\ \text{s}^{-1}} = 0{,}20$ m

Número de onda: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{6{,}28}{0{,}20} = 31{,}4\ \text{m}^{-1}$

3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es $y = 0{,}25 \cos (0{,}50\, t - 0{,}10\, x)$ en el SI. Calcula:

a) La frecuencia.

b) La longitud de onda.

c) La velocidad de propagación.

Comparamos la ecuación que se nos da con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y = A \cos (2\pi\, ft - kx)$$

De donde se deduce que:

a) $2\pi f = 0{,}50;\ \ f = \dfrac{0{,}50}{6{,}28} = 0{,}080$ Hz

b) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \dfrac{2\pi}{0{,}10} = 63$ m

c) $v = \lambda f = 63\ \text{m} \cdot 0{,}080\ \text{s}^{-1} = 5{,}0$ m/s

4. Una cuerda puesta en el eje *Ox* vibra según el eje *Oy* con movimiento ondulatorio de ecuación $y\ (x, t) = 0{,}002$ sen $(300\, t + 60\, x)$ en unidades del SI. Calcula:

a) El sentido y la velocidad con que se propaga la onda.

b) La longitud de onda y la frecuencia del movimiento.

a) y *b)* La onda se propaga en sentido negativo del eje *Ox*.

La frecuencia se deduce de:

$$2\pi f = 300;\quad f = \frac{300}{2\pi} = 47{,}7\ \text{Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{60} = 0{,}10\ \text{m}$$

$$v = \lambda f = 0{,}10\ \text{m} \cdot 47{,}7\ \text{s}^{-1} = 5{,}0\ \text{m/s}$$

5. Dos ondas $y_1 = 0{,}3 \cos (200\, t - 0{,}050\, x_1)$ e $y_2 = 0{,}3 \cos (200\, t - 0{,}050\, x_2)$ se propagan por el mismo medio.

a) ¿Con qué velocidad se propagan?

b) Si las ondas se anulan en un punto x_1, distante 10 m del centro emisor de la primera onda, calcula el valor más pequeño de x_2.

a) De la ecuación de las ondas se deduce que:

$$f = \frac{200}{2\pi}\ \text{Hz};\quad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}05}\ \text{m}$$

Por tanto, la velocidad de propagación será:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{0{,}05}\ \text{m} \cdot \frac{200}{2\pi}\ \text{s}^{-1} = 4\,000\ \text{m/s}$$

b) Si las ondas se anulan en el punto indicado, la interferencia es destructiva, y por tanto, la diferencia $x_2 - x_1$ es un múltiplo impar de semilongitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2};\quad x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{2} = 10\ \text{m} + 62{,}8\ \text{m} = 72{,}8\ \text{m}$$

6. La ecuación de una onda es:

$$y\ (x, t) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot \cos (1\,900\, t + 5{,}72\, x)$$

en unidades del SI. Calcula la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

De la ecuación de la onda, se deduce que:

$$1\,900 = 2\pi f;\quad f = \frac{1\,900}{6{,}28} = 302{,}5\ \text{Hz}$$

$$5{,}72 = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{5{,}72} = 1{,}10\ \text{m}$$

por tanto, la velocidad de propagación es:

$v = \lambda f = 1{,}10\ \text{m} \cdot 302{,}5\ \text{s}^{-1} = 333$ m/s en sentido negativo del eje *Ox*.

7. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es $y\ (x, t) = 0{,}20 \cos (0{,}50\, x - 200\, t)$, donde x e y se miden en metros y t en segundos. Calcula la velocidad de fase y la velocidad transversal de un punto de la cuerda en $x = 40{,}0$ m en el instante $t = 0{,}15$ s.

De la ecuación de la onda se obtienen directamente los valores de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$f = \frac{200}{2\pi};\quad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ \text{m}$$

por tanto, la velocidad de propagación será:

$$v = \lambda\, f = 4\pi \cdot \frac{200}{2\pi} = 400 \text{ m/s}$$

La velocidad transversal de las partículas del medio se obtiene derivando la ecuación de la onda:

$$v = \frac{dy}{dt} = -40 \text{ sen } (0{,}5\, x - 200\, t)$$

que en el punto indicado toma el valor:

$$v = -40 \text{ sen } (20 \text{ rad} - 30 \text{ rad}) = -22 \text{ m/s}$$

8. Se hace vibrar un extremo de una cuerda larga con un periodo de 2,0 s y una amplitud de 4,0 cm, con forma cosenoidal y sin fase inicial. La velocidad de las ondas es de 0,50 m/s. Calcula:

***a)* El desplazamiento de una partícula situada a 1,00 m del centro emisor en los tiempos *t* = 4,0 s, 4,5 s y 5,0 s.**

***b)* El desplazamiento de las partículas situadas a las distancias 0,25; 0,75 y 1,00 m del centro emisor para *t* = 2 s.**

Las partículas del medio están animadas de m.a.s. definido por la ecuación $y = A \cos(\omega\, t + \varphi)$.

En este caso, $A = 4{,}0 \text{ cm} = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}0 \text{ s}} = \pi$ rad/s; $\varphi = 0$, como indica el enunciado.

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{0{,}50} = 2\pi \text{ m}^{-1}$

Por tanto, la ecuación del movimiento es: $y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cos \pi t$

Este m.a.s. se transmite por el medio mediante una onda cuya ecuación es:

$$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cos(\pi\, t - 2\pi\, x)$$

a) La elongación de la partícula $x = 1{,}00$ m en los tiempos indicados es:

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\pi \cdot 4{,}0 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 2\pi = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\pi \cdot 4{,}5 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \frac{5}{2}\pi = 0$ m

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\pi \cdot 5{,}0 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 3\pi = -4{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

b) Aplicamos la misma ecuación para las partículas que se indican:

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - 2\pi \cdot 0{,}25) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ m

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - 2\pi \cdot 0{,}75) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ m

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - \pi) = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

9. Una onda armónica senoidal que se desplaza en el sentido positivo del eje *OX* tiene una amplitud de 10 cm, una longitud de onda de 60 cm y una frecuencia de 10 Hz. El desplazamiento transversal en *x* = 0 y *t* = 0 es 10 cm.

Calcula:

***a)* El número de onda.**

***b)* El periodo.**

***c)* La frecuencia angular.**

***d)* La velocidad de propagación.**

***e)* La función de onda.**

a) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-1}} = 10{,}5\ m^{-1}$

b) $T = \frac{1}{f} = 0{,}1\ s$

c) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 62{,}8$ rad/s

d) $v = \lambda f = 0{,}6 \cdot 10 = 6$ m/s

e) $y = A \cos(\omega t - kx) = 0{,}1 \cdot \cos\left(20\pi t - \frac{10\pi}{3}x\right)$

10. Cierta onda está descrita por la ecuación Ψ(x, t) = 0,02 sen (*t* – *x*/4), todo expresado en unidades del SI.

Determina:

***a)* La frecuencia de la onda y su velocidad de propagación.**

***b)* La distancia existente entre dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 120°.**

Comparando la ecuación dada con la ecuación general:

$\Psi = 0{,}02 \cdot sen\left(t - \frac{x}{4}\right)$ con $\Psi = Asen\left(2\pi ft - \frac{x}{k}\right)$ tenemos:

$2\pi f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}$ Hz ; $k = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = 8\pi$;

$v = \lambda \cdot f = 8\pi \cdot \frac{1}{2\pi} = 4$ m/s

$\delta = (x_2 - x_1)\, k \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{\delta}{k} = 4\delta = 4 \cdot \frac{2\pi}{3} = 8{,}3$ m

11. Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz, se propaga en el sentido positivo del eje *Ox*. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de 90°:

***a)* Determina el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.**

***b)* En un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?**

a) Sea $y = A \cos(2\pi f t - k\, x)$ la ecuación de onda. La diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 viene dada por:

$$\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x_1\right) - \left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x_2\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

En nuestro caso se cumple que $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (0{,}2 \text{ m})$.

De donde se deduce que la longitud de onda es $\lambda = 0{,}80$ m.

El periodo viene dado por el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\ \text{Hz}} = 0{,}020\ \text{s}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \lambda f = 0{,}80\ \text{m} \cdot 50\ \text{s}^{-1} = 40\ \text{m/s}$$

b) El desfase vale:

$$\delta = (2\pi f t_1 - k x) - (2\pi f t_2 - k x) = 2\pi f (t_1 - t_2) =$$

$$= 2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 0{,}01\ \text{s} = \pi\ \text{rad} = 180°$$

12. Una onda de frecuencia 500 Hz tiene una velocidad de fase de 300 m/s.

a) **¿Cuál es la separación entre dos puntos que tengan una diferencia de fase de 60°?**

b) **¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones en un mismo punto que estén separados por un intervalo de tiempo de una milésima de segundo?**

a) Hallamos en primer lugar la longitud de onda y el número de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3}{5}\ \text{m}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10}{3}\pi\,\text{m}$$

Diferencia de fase en función de las distancias:

$$\delta = k\,(x_2 - x_1)$$

En este caso será:

$$\frac{10}{3}\pi \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3}$$

de donde se deduce que $x_2 - x_1 = 0{,}1$ m.

b) La diferencia de fase en función de los tiempos viene dada por:

$$\delta = \omega\,(t_2 - t_1) = 2\pi f\,(t_2 - t_1) = 2\pi \cdot 500\ \text{Hz} \cdot 10^{-3}\ \text{s} = \pi = 180°$$

13. La ecuación de una onda es $y\,(x,t) = 25$ sen $(0{,}40\,t - 3{,}14\,x)$ expresada en unidades del SI. Calcula:

a) **Los puntos que están en fase y en oposición de fase.**

b) **¿Qué tiempo debe transcurrir para que un punto situado a 5,0 m del foco tenga velocidad máxima?**

a) En primer lugar hallamos la longitud de onda. De la ecuación que se nos da se deduce que:

$$f = \frac{0{,}40}{2\pi} = 0{,}064\ \text{Hz}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{3{,}14} = 2\ \text{m}$$

Estarán en fase todos aquellos puntos que disten entre sí $2n$ metros, como se deduce de la condición de interferencia constructiva: $d = x_2 - x_1 = n\,\lambda = 2n$.

Estarán en oposición de fase aquellos que cumplan la condición $d = x_2 - x_1 = (2n + 1)\,\dfrac{\lambda}{2}$

Es decir, en este caso todos aquellos que disten entre sí $(2n+1)$ metros.

b) La velocidad transversal de un punto del medio se obtiene derivando la ecuación del movimiento, $v = 10$ cos $(0{,}40\,t - 3{,}14\,x)$, cuyo valor máximo tiene lugar cuando se cumple que cos $(0{,}40\,t - 3{,}14\,x) = 1$; es decir, cuando la fase vale $0{,}40\,t - 3{,}14\,x = 0$.

De donde $t = \dfrac{3{,}14\,x}{0{,}40} = \dfrac{3{,}14 \cdot 5{,}0\ \text{m}}{0{,}40} = 39{,}3$ s

14. Por una cuerda tensa situada sobre el eje *X* se transmite una onda con una velocidad de 8 m/s. La ecuación de dicha onda viene dada por:

$y\ (x, t) = 0{,}2$ sen $(4\,\pi\,t + k\,x)$ (unidades SI).

a) **Determina el valor de *k* y el sentido del movimiento de la onda. Calcula el periodo y la longitud de onda y reescribe la ecuación de la onda en función de estos parámetros.**

b) **Determina la posición, la velocidad y la aceleración de un punto de la cuerda correspondiente a $x = 40$ cm en el instante $t = 2$ s.**

a) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi f}{v} = \dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}\ m^{-1}$; la onda se propaga en sentido negativo:

$\omega = 2\pi f = 4\pi \Rightarrow f = 2$ Hz ; $T = f^{-1} = 0{,}5$ s ; $\lambda = v \cdot T =$
$= 8 \,.\, 0{,}5 = 4$ m

$$y(x,t) = 0{,}2\text{sen}\left(4\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}x\right)$$

b) $y(0{,}4m,2s) = 0{,}2sen(8\pi + \pi \cdot 0{,}2) = 0{,}2sen36° = 0{,}12$ m

$v = \dfrac{dy}{dt} = 0{,}8\ \cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{2}x\right)$, $v(0{,}4m,2s) = 0{,}8\pi\cos 36° =$
$=2$ m/s

$a = \dfrac{dv}{dt} = -31{,}55 \cdot sen(8\pi + 0{,}2x) = -31{,}55sen36° =$
$= -18{,}5$ m/s^2

Ecuación de ondas armónicas

15. Una onda armónica se propaga por una cuerda de derecha a izquierda con una velocidad de 8 m/s. Su periodo es 0,5 s y su amplitud es de 0,3 m.

a) **Escribe la ecuación de la onda razonando cómo se obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.**

b) **Calcula la velocidad de una partícula de la cuerda en $x =$ 2 m en el instante $t = 1$ s.**

a) $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) = 0{,}3 \cdot \cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{2}x\right)$, ya que

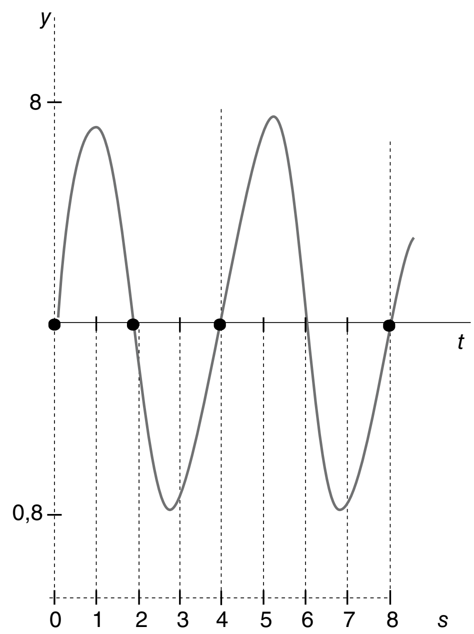
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi\ ;\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\pi}{2}$$

b) $v = \dfrac{dy}{dt} = -0{,}3sen(2\pi + \pi) = 0$

16. Una onda armónica transversal de longitud de onda $\lambda = 1$ m se desplaza en el sentido positivo del eje *X*. En la figura se muestra la elongación (y) del punto de coordenada x = 0 en función del tiempo. Determina:

a) **La velocidad de propagación de la onda.**

b) **La expresión matemática que describe esta onda.**



a) De la figura se deduce: $A = 0,8$ m; $T = 4$ s; $x = 0$ para $t = 0$

$v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ m/s ; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s ; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} =$
$= 2\pi\ \text{m}^{-1}$

b) De acuerdo con estos valores la ecuación de la onda será:

$$y(x,\ t) = A sen(\omega t - kx) = 0,8 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\,t - 2\pi x\right)$$

17. Una onda armónica transversal de amplitud 8 cm y una longitud de onda de 140 cm se propaga en una cuerda tensa orientada en el sentido positivo del eje *X* con una velocidad de 70 cm/s. El punto de la cuerda de coordenada $x = 0$ (origen de la perturbación) oscila en la dirección del eje *Y,* y tiene en el instante $t = 0$ una elongación de 4 cm y una velocidad de oscilación positiva. Determina:

a) Los valores de la frecuencia angular y del número de onda.

b) La expresión matemática de la onda.

c) La expresión matemática del movimiento del punto de la cuerda situado a 70 cm del origen.

d) La diferencia de fase de oscilación, en un mismo instante, entre dos puntos de la cuerda que distan entre sí 35 cm.

a) De acuerdo con el enunciado, expresamos las soluciones en cm y s. Del enunciado conocemos: $\lambda = 140$ cm ; $v = 70$ cm/s; $A = 8$ cm. Por tanto, el periodo será: $T = \dfrac{\lambda}{v} = \dfrac{140}{70} = 2$ s;

frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s; número de onda:

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{140} = \dfrac{\pi}{70} = \text{cm}^{-1}$ si para $t = 0$, $y = 4$ cm, $x = 0$

$y = 8 \cdot \text{sen}\left(\pi t - \dfrac{\pi x}{70} + \delta\right)$; $4 = 8\ \text{sen}\delta \Rightarrow \delta = \dfrac{\pi}{6}$

b) La ecuación de la onda será:

$$y = 8 \cdot \text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi x}{70} + \frac{\pi}{6}\right)$$

c) $v = \dfrac{dy}{dt} = 8\text{p} \cdot \cos\left(\pi t - \dfrac{\pi x}{70} + \dfrac{\pi}{6}\right)$. Para $x = 70$ cm la velocidad toma el valor:

$$v = 8\pi\cos\,(\pi t - \pi + \pi/6) = 8\pi\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right).$$

d) $\phi = (x_2 - x_1)\,\dfrac{\pi}{70} = 35 \cdot \dfrac{\pi}{70} = \dfrac{\pi}{2}$

18. Una onda transversal de amplitud $A = 5$ cm que se propaga por un medio material tarda 2 s en recorrer una distancia de 50 cm, y sus puntos más próximos de igual fase distan entre sí 25 cm. Determina:

a) La expresión matemática de la función de onda si en el instante $t = 0$ la elongación, $x = 0$, es nula.

b) La aceleración de un punto de la onda situado en $x = 25$ cm, en el instante $t = 1$ s.

Según el enunciado, $A = 0,05$ m; $T = 1$ s; $f = 1$ Hz; $\lambda = 0,25$ m;
$v = \dfrac{\lambda}{T} = 0,25$ m/s
Por tanto, $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 8\pi\ \text{m}^{-1}$

a) La ecuación de la onda será

$y(x,t) = \text{Asen}(\omega t - kx) = 0,05\ \text{sen}(2\pi t - 8\pi x)$

b) $a = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -0,05 \cdot 4 \cdot \pi^2 \text{sen}(2\pi t - 8\pi r)$ para t=1 s y x=0,25 m la aceleración toma el valor $a = 0$ m/s ^{2}

19. Una onda viene dada por la ecuación en el SI:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{x\,\pi}{0,80}\right)}$$

Calcula:

a) El carácter de la onda y su velocidad de propagación.

b) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.

c) La diferencia de fase en un instante dado de dos partículas separadas 120 cm en el sentido de avance de la onda.

a) Las partículas vibran paralelas al eje *Oy*, y la onda se propaga a lo largo del eje *Ox* en sentido negativo. Por tanto, se trata de una onda transversal, cuya frecuencia se obtiene de:

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{4}\ \text{Hz}$$

La velocidad con que se propaga es:

$$v = \lambda\, f = \frac{2\pi}{k} f = \frac{2\pi}{\pi/0,80} \cdot \frac{1}{4} = 0,4\ \text{m/s}$$

b) $\delta = \left(\dfrac{\pi}{2}\,t_1 + \dfrac{x\,\pi}{0,80}\right) - \left(\dfrac{\pi}{2}\,t_2 + \dfrac{x\,\pi}{0,80}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,(t_1 - t_2) = \pi = 180°$

c) $\delta = \left(\dfrac{\pi}{2}\,t + \dfrac{x_1\,\pi}{0,80}\right) - \left(\dfrac{\pi}{2}\,t + \dfrac{x_2\,\pi}{0,80}\right) = \dfrac{\pi}{0,80}\,(x_1 - x_2) =$

$= \dfrac{\pi}{0,80} \cdot 1,2 = 1,5\pi = 270°$

20. En una cuerda se genera una onda armónica transversal de 20 cm de amplitud, velocidad de propagación 5 m/s y frecuencia 30 Hz. La onda se desplaza en el sentido positivo del eje de las *X,* siendo en el instante inicial la elongación nula en la posición $x = 0$.

a) **Escribe la expresión matemática que describe dicha onda si en $t = 0$ y $x = 0$, y la velocidad de la elongación es positiva.**

b) **Calcula la velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda.**

Expresamos la ecuación en función coseno: $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \delta)$

Si para $t = 0$; $x = 0$, $y = 0$ el valor de δ será $\delta = \frac{\pi}{2}$ o $\delta = \frac{3\pi}{2}$.

Para averiguar cuál de los dos valores es el correcto, hallamos la expresión de la velocidad:

$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega sen(\omega t - kd + \delta)$ si para $t = 0$, $x = 0$, $v > 0$ se debe cumplir sen $\delta < 0$.

Por tanto, el valor correcto es sen $\delta = \frac{3\pi}{2}$. Del enunciado se deduce: $A = 0,2$ m; $f = 30$ Hz. Por tanto $\omega = 2\pi f = 60\pi$ rad/s;

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = 12\pi\ m^{-1}$

a) De acuerdo con estos valores, la ecuación de la onda será:

$$y(x,t) = 0,2\cos\left(60\pi t - 12\pi x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) $v_m = A\omega = 0,2 \cdot 60\pi = 12\pi$ m/s ;

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -0,2 \cdot 60^2 \cdot \pi^2\cos\left(60\pi t - 12\pi x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$a_m = 0,2 \cdot 3\,600 \cdot \pi^2 = 720\pi^2$ m/s^2

21. Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal en el sentido negativo del eje de las *X*, siendo 10 cm la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda está generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple de frecuencia 50 Hz y una amplitud de 4 cm, determina:

a) **La velocidad de propagación de la onda.**

b) **La expresión matemática de la onda si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas y en $t = 0$ la elongación es nula.**

c) **La velocidad máxima de oscilación de una partícula cualquiera de la cuerda.**

d) **La aceleración máxima de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda.**

De los datos se deduce: $\lambda = 0,1$m; $f = 50$ Hz; $A = 0,04$

Si la velocidad < 0 el producto $kx > 0$

a) $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 5$ m/s. Expresamos la onda en función seno.

b) $y(x,t) = A sen(\omega t + kx + \delta)$; Si para t = 0, x = 0, y = 0 se deduce que $\delta = 0$.

$\omega = 2\pi f = 100\pi$; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 20\pi$.

Por tanto $y(x,t) = 0,04 sen(100\pi t + 20\pi x)$

$v = \frac{dy}{dt} = 4\pi\cos(100\pi t + 20\pi x)$;

c) $v_m = 0,04 \cdot 100\pi = 4\pi$ m/s

$a = \frac{dv}{dt} = -0,04 \cdot 100^2 \cdot \pi^2 sen(100\pi t + 20\pi x)$;

d) $a_m = -400\pi^2$ m/s^2

22. Una onda transversal de amplitud $A = 5$ cm que se propaga por un medio material tarda 2 s en recorrer una distancia de 50 cm, y sus puntos más próximos de igual fase distan entre sí 25 cm. Determina:

a) **La expresión matemática de la función de onda si en el instante $t = 0$ la elongación en el origen, $x = 0$, es nula.**

b) **La aceleración de un punto de la onda situado en $x = 25$ cm, en el instante $t = 1$ s.**

Del enunciado se deduce:

$A = 0,05$ m; $\lambda = 0,25$ m; $v = \frac{0,5}{2} = 0,25$ m/s;

$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0,25}{0,25} = 1$ s; $f = 1$ Hz ; $\omega = 2\pi f = 2\pi$; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 8\pi$

Como no se especifica el sentido de la velocidad: $\pm kx$.

a) Expresamos la onda en coseno:

$y(x,t) = 0,05\cos(2\pi t \pm 8\pi x + \delta)$. Como para $t = 0$; $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow$; $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$y(x,t) = 0,05\cos\left(2\pi t \pm 8\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -0,05 \cdot 4^2 \cdot \pi^2\cos\left(2\pi t \pm 8\pi x + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Para $t = 1$ s ; $X = 025$ m

$a = -0,05 \cdot 4 \cdot \pi^2 = -1,97$ m/s^2

23. Escribe la ecuación que representa una onda electromagnética polarizada de 5 V/m de amplitud y 1 MHz de frecuencia. Toma el eje *Ox* como dirección de propagación y *Oy* como plano de polarización.

La ecuación es del tipo:

$$y = A\cos(2\pi f t - k x)$$

Para aplicarla a la onda del problema hallamos en primer lugar sus constantes:

$$A = 5\ V/m;\quad f = 10^6\ Hz;\quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{10^6\ Hz} = 300\ m$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{150}\ m^{-1}$$

De acuerdo con estos datos, la onda viene expresada por la siguiente ecuación:

$$y = 5\cos(2\pi \cdot 10^6\, t - 6,7 \cdot 10^{-3}\,\pi \cdot x)\ V/m$$

24. Una partícula de masa 5,0 g oscila con movimiento armónico simple, en torno a un punto *O*, con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 4 cm. En el instante inicial la elongación de la partícula es nula.

a) **Si dicha oscilación se propaga según una dirección que tomamos como eje *Ox*, con una velocidad de 6,0 m/s, es-**

cribe la ecuación que representa la onda unidimensional originada.

b) **Calcula la energía que transmite la onda generada por el oscilador.**

a) Las constantes del movimiento son:

$$\omega = 2\pi f = 24\pi \text{ Hz}; \quad A = 0{,}04 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{24\pi}{6{,}0 \text{ m/s}} = 4\pi$$

La onda se propaga de acuerdo con la ecuación:

$$y = A \cos (2\pi f t - k x) = 0{,}04 \cos (24\pi t - 4\pi x)$$

b) Energía transmitida:

$$E = \frac{1}{2} \text{ m } \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 5\,678 \text{ s}^{-2} \cdot (0{,}04 \text{ m})^2 =$$
$$= 2{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Interferencias. Ondas estacionarias

25. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Razona qué características deben tener dos ondas que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria.**

b) **Explica qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es *L*.**

a) Deben tener las mismas características siguientes: La misma amplitud, la misma longitud de onda, la misma frecuencia y que se propaguen en sentido contrario.

b) Si la cuerda tiene los dos extremos fijos, en ambos puntos la onda estacionaria debe tener nodos. La separación entre dos nodos consecutivos ha de ser media longitud de onda. Por tanto, *L* será un múltiplo entero de semilongitudes de onda. Es decir, se cumple $L = n \frac{\lambda}{2}$

26. Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación $y\ (x, t) = 0{,}2 \cos (200\ t - 0{,}10\ x)$ expresada en el SI. Calcula:

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**

b) **La onda estacionaria resultante de la interferencia de la onda anterior y otra igual que se propaga en sentido contrario.**

c) **La distancia entre dos nodos consecutivos.**

a) De la ecuación de la onda que se da en el enunciado se deduce que:

$$200 = 2\pi f; \quad f = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$$

$$0{,}1 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = 20\pi \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 20\pi \text{ m} \cdot \frac{100}{\pi} \text{ Hz} = 2\,000 \text{ m/s}$$

b) La onda estacionaria que resulta de la interferencia viene dada por la ecuación:

$$y = 0{,}4 \text{ sen } 200\ t \cdot \text{sen } 0{,}1\ x$$

o también: $y = 2A \cos 200\ t \cdot \cos 0{,}1\ x$

c) La distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, por definición.

Por tanto, $d = 10\pi$ m.

27. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda viene dada por $y\ (x, t) = 0{,}080 \cos \pi\ (100\ t - 0{,}80\ x)$ en unidades del SI. Calcula:

a) **La frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.**

b) **La máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.**

c) **La ecuación de la onda estacionaria que resultaría de la interferencia de la onda anterior con otra igual que se propagase en sentido contrario.**

a) De la ecuación se deduce que:

$f = 50$ Hz; $\lambda = 2{,}5$ m; $v = \lambda f = 2{,}5 \text{ m} \cdot 50 \text{ Hz} = 125$ m/s

b) La velocidad transversal de las partículas del medio es:

$$v = \frac{dy}{dt} = -8\pi \cdot \text{sen } \pi\ (100\ t - 0{,}80\ x)$$

Cuyo valor máximo es:

$$v_m = -8\pi = -25 \text{ m/s}$$

c) La ecuación de la onda estacionaria es del tipo:

$y = 2\ A \cos k\ x \cdot \cos 2\pi\ ft = 0{,}16 \cos 0{,}8\pi\ x \cdot \cos 100\pi\ t$

28. Una cuerda vibra según la ecuación en el SI:

$$y\ (x, t) = 10 \text{ sen } \frac{x\,\pi}{2} \text{ sen } 50\pi\ t$$

Calcula:

a) **La amplitud y la velocidad de las ondas cuya superposición da lugar a la onda anterior.**

b) **Distancia entre dos vientres consecutivos.**

a) Se trata de una onda estacionaria, cuya amplitud es el doble de las amplitudes de las ondas que interfieren. Por tanto, la amplitud de cada onda es $\frac{A}{2} = 5$ m. El número de onda y la frecuencia de la onda estacionaria coinciden con los valores de dichas magnitudes de las ondas concurrentes:

$$50\pi = 2\pi f; \quad f = 25 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = 4 \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad de la propagación es:

$$v = \lambda f = 100 \text{ m/s.}$$

b) La distancia entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda, $d = 2$ m.

29. Una onda viene dada por la ecuación:

$$y\ (x, t) = 0{,}2 \text{ sen } (\pi\ x) \cos (100\pi\ t) \text{ m}$$

en donde *x* está comprendida entre 0 y 6 m.

Calcula:

a) **La longitud de onda y la frecuencia de la onda.**

b) **El número de nodos, incluidos los extremos.**

c) **La velocidad de propagación de la onda.**

a) La ecuación general de una onda estacionaria puede presentarse así:

$$y\ (x,\ t) = A_r \text{ sen } (2\pi\ f t)$$

La amplitud resultante es, en este caso, $A_r = 0{,}2 \text{ sen } (\pi\ x)$, de donde podemos hallar la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi;\ \lambda = 2 \text{ m}$$

La parte de le ecuación de esta onda estacionaria, cos $(100\pi\ t)$, proporciona el valor de la frecuencia, si consideramos que:

$$\cos\ (100\pi\ t) = \cos\left(100\pi\ t + \frac{\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} t\right) = \cos\left(\frac{201\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} t\right)$$

Como además $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } \alpha$, sucede que:

$$\cos\ (100\pi\ t) = \cos\left(\frac{201\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} t\right) = -\text{sen } \frac{201\pi}{2} t.$$

Así, la frecuencia $f = \frac{201}{4} = 50{,}25$ Hz.

b) La longitud de onda es $\lambda = 2$ m y la onda se desplaza entre las posiciones $x = 0$ m y $x = 6$ m, por lo que el número de nodos es $N = \frac{L}{\lambda} + 1 = \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ m}} + 1 = 7$.

c) La velocidad es $v = \lambda f = 2 \text{ m} \cdot 50{,}25 \text{ Hz} = 100{,}5$ m/s.

30. Una onda estacionaria viene expresada por la ecuación $y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cos\ (0{,}1\ x) \cos 200\ t$ en unidades del SI.

a) **Calcula la distancia entre dos nodos consecutivos.**

b) **¿Cuál es la longitud de onda?**

c) **¿A qué distancia del origen de la onda se halla el nodo número 15?**

a) y *b)* La distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, por definición. Así, calculamos el valor de la longitud de onda a partir de la ecuación de la onda, $y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cos\ (0{,}1\ x) \cos 200\ t$:

$k = 0{,}1$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi \text{ m}$$

Es decir, la distancia entre nodos es $d = \frac{\lambda}{2} = 10\pi$.

c) La sucesión de nodos será $x = 5\pi\ (2n + 1)$, es decir, para el primer nodo, $n = 0$, $x = 5\pi$ m. Para el nodo que ocupa la posición 15, $n = 14$, es decir, $x = 5\pi \cdot (14 \cdot 2 + 1) = 145\pi$ m.

Sonido

31. Un foco sonoro emite una onda armónica de amplitud 7 Pa y frecuencia 220 Hz. La onda se propaga en el sentido negativo del eje *X* a una velocidad de 340 m/s. Si en el instante *t* = 0 la presión en el foco es nula, determina:

a) **La ecuación de la onda sonora.**

b) **La presión en el instante *t* = 3 s en un punto situado a 1,5 m del foco.**

De los datos se deduce $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 220 = 440\pi$ rad

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{440\pi}{340} = \frac{22\pi}{17}$$

a) $y(x,t) = 7\text{sen}\left(440\pi\ t + \frac{22\pi}{17}\right)$

b) $y(x,t) = 7\text{sen}\left(440\pi \cdot 3 + \frac{22\pi}{17} \cdot 1{,}5\right) = 7\text{sen}\left(\frac{22\pi}{17} \cdot 1{,}5\right) =$

$= -1{,}31$ Pa

32. En un campo de baloncesto, 1 000 espectadores gritan al unísono con un nivel de intensidad sonora de 60 dB cada uno. ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora que producen todos juntos?

Al gritar todos al unísono, la intensidad de las ondas sonoras en un punto es la suma de las intensidades sonoras de todas las fuentes. Supongamos que todos están a la misma distancia del lugar de medida.

Sea $\beta = 10\log \frac{I}{I_o} = 60$ dB el nivel de intensidad de cada espectador; el nivel resultante será

$$\beta = 10\log \frac{1\,000\ I}{I_o} = 10\left(\log 1\,000 + \log \frac{I}{I_o}\right) = (30 + 60) \text{ dB} =$$

$= 90$ dB

33. Una ventana cuya superficie es de 1,5 m² está abierta a una calle cuyo ruido produce un nivel de intensidad de 65 dB. ¿Qué potencia acústica penetra por la ventana?

La intensidad se obtiene a partir de $65 = 10\log \frac{I}{I_o}$;

$I = 3{,}16 \cdot 10^{-6}$ W/m².

La potencia será $P = I \cdot S = 3{,}16 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}5 = 4{,}7 \cdot 10^{-6}$ W.

34. Un observador recibe simultáneamente dos sonidos cuyos niveles de intensidad sonora son 60 dB y 80 dB. Calcula:

a) **La intensidad del sonido resultante.**

b) **El nivel de intensidad sonora del mismo.**

Aplicamos la expresión del nivel de intensidad sonora a los dos casos

$$60 = 10\log \frac{I_1}{I_o} \Rightarrow \log \frac{I_1}{I_o} = 6 \Rightarrow I_1 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

$$80 = 10\log \frac{I_2}{I_o} \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_o} = 8 \Rightarrow I_2 = 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

a) $I_T = I_1 + I_2 = 10^{-6} + 10^{-4} = 1{,}01 \cdot 10^{-4}$ W/m²

b) $\beta = 10\log \frac{1{,}01 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 10\log 1{,}01 \cdot 10^{8} = 80{,}04$ dB

35. Una fuente puntual emite un sonido que se percibe con un nivel de intensidad sonora de 50 dB a una distancia de 10 m.

a) **Determina la potencia sonora de la fuente.**

b) **¿A qué distancia dejaría de ser audible el sonido?**

Dato: intensidad umbral del sonido I_o = 10^{-12} Wm^{-2}

a) La potencia sonora viene dada por $P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2$. Del nivel obtenemos la intensidad.

$$\beta = 10\log \frac{I}{I_o} \Rightarrow 5 = \log I + 12 \Rightarrow I = 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

$$P = 10^{-7} \cdot 4\pi r^2 = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\text{W}$$

b) La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\ ;\ r_2^2 = \frac{I_1 \cdot r_1^2}{I_2} = \frac{10^{-7} \cdot 100}{10^{-12}} = 10^7\ ;$$

$$r2 = \sqrt{10^7} = 3{,}16 \cdot 10^3\ \text{m}$$

36. Un espectador que se encuentra a 20 m de un coro formado por 15 personas percibe el sonido con un nivel de intensidad sonora de 54 dB.

a) Calcula el nivel de intensidad sonora con que percibiría a un solo miembro del coro cantando a la misma intensidad.

b) Si el espectador solo percibe sonidos por encima de 10 dB, calcula la distancia a la que debe situarse del coro para no percibir a este. Supón que el coro emite ondas esféricas, como un foco puntual, y todos los miembros del coro emiten con la misma intensidad.

Dato: umbral de audición, I_o = 10^{-12} W/m^2

a) Del nivel sonoro $\beta = 10\log \frac{I}{I_o}$ tenemos

$$\frac{I}{I_o} = 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{54}{10}} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

Potencia sonora generada por las 15 personas.

$$P = I \cdot S = 2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi r^2 = 1{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{W}$$

Potencia generada por una persona:

$$P_1 = \frac{P}{15} = 1{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{15} = 8{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{W}$$

Intensidad percibida por una persona y nivel de intensidad.

$$I_1 = \frac{I}{15} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-7}}{15} = 1{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

$$\beta_1 = 10\log \frac{I_1}{I_o} = 10\log \frac{1{,}67 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}} = 42{,}4\ \text{dB}$$

b) Supongamos que *A* es el punto en donde el nivel sonoro es 54 dB y B el punto en donde se percibe con 10 dB. La intensidad en ese punto será:

$$I_B = I_o \cdot 10^{\frac{\beta_B}{10}} = 10^{-12} \cdot 10 = 10^{-11}\ \text{W/m}^2$$

$$\text{De} = \frac{I_A}{I_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow r_B = r_A \cdot \sqrt{\frac{I_A}{I_B}} = 20\sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 10^{-7}}{10^{-11}}} = 3\,162\ \text{m}$$

37. La potencia sonora del ladrido de un perro es aproximadamente de 1 mW y dicha potencia se distribuye uniformemente en todas las direcciones. Calcula:

***a)* La intensidad y el nivel de intensidad sonora a una distancia de 10 m del lugar donde se produce el ladrido.**

***b)* El nivel de intensidad sonora generada por el ladrido de 5 perros a 20 m de distancia de los mismos. Supón que todos los perros emiten sus ladridos en el mismo punto del espacio.**

Dato: intensidad umbral: I_o = 10^{-12} W/m^2

a) Intensidad sonora de un perro

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

$$\text{Nivel sonoro } \beta = 10\log \frac{I}{I_o} = 10\log \frac{7{,}96 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 59\ \text{dB}$$

b) Si los 5 perros emiten desde el mismo punto la potencia será 5 veces mayor que la de un perro solo. Lo mismo ocurre con la intensidad.

$$I = \frac{5P}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 20^2} = 9{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

$$\beta = 10\log \frac{I}{I_o} = 10\log \frac{9{,}95 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 60\ \text{dB}$$

Efecto Doppler

38. Un murciélago va a la caza de un insecto. Si este se mueve a razón de 1 m/s y el murciélago a razón de 1,75 m/s, ¿cuál debe ser la frecuencia del sonido emitido por el mamífero para captar el sonido reflejado por el insecto con una frecuencia de 80 kHz?

La velocidad relativa del murciélago es v_o = 0, 75 m/s y es a la vez emisor y receptor del sonido. Por tanto, se cumple $v_o = v_f$. El movimiento es de aproximación; por tanto, $(+v_o)$, $(-v_f)$. Aplicamos la expresión del efecto Doppler:

$$f' = f\frac{v + v_o}{v - v_f} = f\frac{340{,}75}{339{,}25}\ ;\ f = \frac{339{,}25}{340{,}75} \cdot 80\ \text{kHz} = 79{,}65\ \text{kHz}$$

39. Un pesquero faena en aguas jurisdiccionales de un país extranjero usando un sonar para detectar peces que emiten ondas de 500 Hz de frecuencia. Un guardacostas que está en reposo capta las ondas emitidas por el barco de pesca, que se aleja con una velocidad de 15 km/h. ¿Qué longitud de onda capta el guardacostas?

Dato: velocidad del sonido en el agua: 1 500 m/s.

El observador es el guardacostas que está parado $v_o = 0$. El barco se aleja. Por tanto, empleamos el signo positivo para su velocidad v_f = 4,16 m/s. Aplicamos el efecto Doppler para hallar la frecuencia f'.

$$f' = f\frac{v_s}{v_s - v_f} = 500\,\frac{1\,500}{1\,500 + 4{,}16} = 498{,}6\ \text{Hz}$$

$$\text{La longitud de onda será: } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1\,500}{498{,}6} = 3{,}01\ \text{m}$$

40. Una ambulancia que emite un sonido de 520 Hz se acerca con una velocidad de 72 km/h hacia un observador en reposo situado en el arcén de una carretera, ¿qué frecuencia detecta el peatón?

Aplicamos la ecuación del efecto Doppler:

$$f' = f\frac{v + v_0}{v - v_f} = 520\ \text{Hz};\ \frac{340\ \text{m/s} + 0}{340\ \text{m/s} - 20\ \text{m/s}} = 553\ \text{Hz}$$

Actividades

1. ¿Qué fases del método científico desarrollaron fundamentalmente Faraday y Maxwell? ¿Qué es más importante para el progreso de la Física, el trabajo experimental o el análisis teórico de los hechos?

Faraday fue un genio en la experimentación; Maxwell lo fue en la elaboración de leyes y teorías científicas. Tanto el trabajo experimental como el análisis teórico de los hechos son imprescindibles para el progreso de la Física.

2. Explica con tus propias palabras qué entiendes por interacción electromagnética. ¿Qué es la síntesis electromagnética? ¿Qué materias unifica mediante una sola teoría?

Solo existen cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza: nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitatoria.

La interacción electromagnética unifica las fuerzas eléctricas y magnéticas. Es la responsable de que las moléculas, los átomos, la materia en general, permanezcan unidos.

Maxwell completó la unificación del electromagnetismo con la óptica, al predecir la existencia de ondas electromagnéticas, en lo que se denomina síntesis electromagnética, que unifica en una sola teoría la electricidad, el magnetismo y la óptica.

3. A partir de los valores de la constante dieléctrica del vacío ε_0 y de la permeabilidad magnética del vacío μ_0, comprueba que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es $3 \cdot 10^8$ ms^{-1}.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C^2}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9\ \mathrm{m^2\,A^2}}}} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

4. Describe la naturaleza de las ondas electromagnéticas y representa esquemáticamente su propagación incluyendo los vectores del campo eléctrico y magnético.

Las ondas electromagnéticas están formadas por un campo eléctrico y otro magnético, variables, que oscilan en planos perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Son ondas transversales (ver Figura 9.1 del libro de texto).

5. Calcula la frecuencia y el periodo de una onda electromagnética de 2,5 cm de longitud de onda. ¿Qué tipo de onda es?

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 1{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}} = 8{,}3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}$$

Se trata de una onda de radio corta.

6. ¿Por qué los rayos infrarrojos y los ultravioleta reciben este nombre? ¿Cómo son sus longitudes de onda y sus frecuencias comparadas con las de la luz visible?

Los rayos infrarrojos tienen frecuencias inferiores a la luz roja y los ultravioleta tienen frecuencias mayores que la luz violeta.

Con sus longitudes de onda ocurre lo contrario: los rayos infrarrojos tienen longitudes de onda mayores que la luz roja; la luz ultravioleta tiene longitudes de onda menores que la luz violeta.

7. Calcula la energía de los siguientes fotones:

Un fotón de luz verde de longitud de onda igual a 520 nm.

Un fotón de luz amarilla de longitud de onda igual a 581 nm.

a) $$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{520 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3{,}83 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

b) $$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{581 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3{,}42 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

8. ¿Qué fenómenos ópticos constituyen una prueba a favor de la teoría corpuscular de la luz y cuáles son favorables a la teoría ondulatoria?

La teoría corpuscular de la luz es la única capaz de explicar el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton.

Los fenómenos ópticos favorables a la teoría ondulatoria de la luz son los característicos de todas las ondas: reflexión, refracción, difracción, interferencias, etc.

9. ¿Qué fotón es más energético, el de la luz roja o el de la luz azul?

Es más energético el fotón de luz azul, porque las frecuencias de este tipo de luz son mayores que las frecuencias de la luz roja: $E = hf$.

10. La longitud de onda central de la radiación emitida por el Sol y las estrellas Sirio y Betelgeuse es 500 nm, 300 nm y 900 nm, respectivamente. Calcula, para cada estrella, la energía de un fotón correspondiente a la luz central emitida.

Para el Sol: $$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{500 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3{,}98 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Para Sirio: $$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{300 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Para Betelgeuse: $$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ ms^{-1}}{900 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 2{,}21 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

11. La estrella Alfa (Próxima Centauri) de la constelación Centauro es la estrella más cercana a la Tierra. Se encuentra a 4,3 años luz. ¿A qué distancia se sitúa en kilómetros?

$$s = ct = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot (4{,}3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)\ \mathrm{s} =$$

$$= 4{,}1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m} = 4{,}1 \cdot 10^{13}\ \mathrm{km}$$

12. La distancia aproximada entre el Sol y la Tierra es de 150 millones de kilómetros. ¿Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

$$t = \frac{s}{c} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{km}}{3 \cdot 10^5\ \mathrm{km\,s^{-1}}} = 500\ \mathrm{s}$$

13. ¿Cuánto vale la velocidad de propagación de un rayo de luz monocromática en el agua? Dato: índice de refracción del agua $n = 4/3$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4/3} = 2{,}25 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

14. El espectro visible contiene frecuencias entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz y $7 \cdot 10^{14}$ Hz. Cuando la luz se propaga por el agua:

a) **¿Se modifican estos valores de las frecuencias y de las longitudes de onda?**

b) **En caso afirmativo, calcula los valores correspondientes.**

Datos: $n_a = 1{,}3$; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

a) Cuando la luz se propaga en el agua, varía su velocidad y esto queda reflejado en el valor del índice de refracción en ese medio. Sin embargo, la frecuencia es un valor fijo que nunca cambia, de modo que el cambio de velocidad solo afecta a la longitud de onda.

b) Las longitudes de onda en el vacío y en el aire son:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 7{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m};$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Las longitudes de onda en el agua son:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1{,}3} = 2{,}3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2{,}3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 5{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ m};$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{2{,}3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 3{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

15. El índice de refracción absoluto del diamante es 2,38 para una luz cuya longitud de onda es de 6 200 Å en el aire.

Calcula:

a) **La velocidad de esa luz en el diamante.**

b) **Su longitud de onda y su frecuencia en el interior del diamante.**

a) $$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2{,}38} = 1{,}26 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

b) $$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_0} = \frac{6{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{2{,}38} = 2{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 260 \text{ nm}$$

La frecuencia en el interior del diamante es la misma que en el aire:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}8 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

16. ¿Por qué los índices de refracción absoluto y relativo no tienen unidades?

El índice de refracción absoluto es el cociente entre dos velocidades. El índice de refracción relativo es el cociente entre dos índices de refracción absolutos.

17. Un haz de luz monocromática incide sobre la superficie de un vidrio ($n = 1{,}54$) con un ángulo de 30°. ¿Cuánto valen los ángulos de reflexión y refracción?

El ángulo de reflexión es igual que el ángulo de incidencia:

$r = i = 30°$

El ángulo de refracción se obtiene a partir de la Ley de Snell de la refracción:

$$\text{sen } r = \frac{n_1 \text{sen } i}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 30°}{1{,}54} = 0{,}325; \qquad r = 19°$$

18. Cuando un rayo de luz pasa desde el benceno ($n = 1{,}50$) al agua ($n = 1{,}33$), ¿a partir de qué ángulo se produce la reflexión total?

La reflexión total se produce para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite:

$$\text{sen } \ell = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887; \qquad \ell = 62{,}5°$$

19. Considérese un haz de luz monocromática, cuya longitud de onda en el vacío es $\lambda = 600$ nm. Este haz incide, desde el aire, sobre la pared de vidrio de un acuario con ángulo de incidencia de 30°. Determina:

a) **El ángulo de refracción en el vidrio, sabiendo que su índice de refracción es $n_1 = 1{,}50$.**

b) **La longitud de onda de dicho haz en el agua, sabiendo que su índice de refracción es $n_2 = 1{,}33$.**

Datos: índice de refracción del aire n = 1,00

a) $n \cdot \text{sen } i = n_1 \text{ sen } r$; $1{,}00 \cdot \text{sen } 30° = 1{,}50 \cdot \text{sen } r$; $r = 19{,}5°$

b) La frecuencia de una onda no cambia al pasar de un medio a otro:

$$(\lambda n)_{\text{agua}} = (\lambda n)_{\text{aire}}; \ \lambda_{\text{agua}} = \frac{(\lambda n)_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{600 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1{,}00}{1{,}33} =$$

$= 451$ nm

20. Un rayo de luz se propaga desde el aire al agua, de manera que el rayo incidente forma un ángulo de 30 con la normal a la superficie de separación aire-agua, y el rayo refractado forma un ángulo de 128 con el rayo reflejado.

a) **Determina la velocidad de propagación de la luz en el agua.**

b) **Si el rayo luminoso invierte el recorrido y se propaga desde el agua al aire, ¿a partir de qué ángulo de incidencia se produce la reflexión total?**

a) El ángulo de reflexión será de 30 y el de refracción:

$180 - (30 + 128) = 22$

$1 \cdot \text{sen } 30° = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } 22°$; $n_{\text{agua}} = 1{,}33$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

b) $n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } \ell = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen } 90°$; $\text{sen } \ell = \dfrac{1{,}00 \cdot 1}{1{,}33} = 0{,}752$;

$\ell = 48{,}8°$

21. Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, de espesor 4,1 cm y de índice de refracción *n* = 1,50, situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 20°. Calcula la distancia recorrida por el rayo en el interior de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.

El ángulo de refracción en la primera cara de la lámina (r_1) es igual al ángulo de incidencia en la segunda cara. Su valor es:

n_1 sen $i = n_2$ sen r_1

$$\text{sen } r_1 = \frac{n_1 \text{ sen } i_1}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 20°}{1,50} = 0,228\,; \qquad r_1 = 13,2°$$

El desplazamiento lateral es:

$$\delta = s\,\frac{\text{sen }(i_1 - r_1)}{\cos r_1} = 4,1\text{ cm} \cdot \frac{\text{sen }(20° - 13,2°)}{\cos 13,2°} = 0,50\text{ cm}$$

La distancia recorrida por la luz en el interior de la lámina (x) es la siguiente:

$$x = \frac{s}{\cos r_1} = \frac{4,1\text{ cm}}{\cos 13,2°} = 4,2\text{ cm}$$

22. Sobre un prisma de vidrio de ángulo 40° e índice de refracción 1,51, situado en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 45°. Calcula:

a) **El ángulo de emergencia del rayo de luz.**

b) **El ángulo de desviación sufrido por el rayo.**

a) Al aplicar la Ley de Snell de la refracción en la primera cara del prisma se obtiene:

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} = \frac{\text{sen } 45°}{1,51} = 0,468\,; \qquad r = 27,9°$$

Como el ángulo del prisma es de 40°, se cumple:

$r' = \varphi - r = 40° - 27,9° = 12,1°$

La Ley de Snell de la refracción aplicada a la segunda cara del prisma permite obtener el ángulo de emergencia i':

$1 \cdot$ sen $i' = n$ sen r'

sen $i' = 1,51 \cdot$ sen $12,1° = 0,317$; $\quad i' = 18,5°$

b) Como $d = i + i' - \varphi$, resulta:

$\delta = 45° + 18,5° - 40 = 23,5°$

23. ¿Se propagan todas las luces con la misma velocidad en el vidrio? ¿Depende su velocidad de la longitud de onda? ¿Ocurre lo mismo en cualquier medio material transparente?

En el vidrio, como en cualquier otro medio material transparente, las distintas luces no se propagan con la misma velocidad, solo lo hacen en el vacío.

La velocidad de propagación depende del índice de refracción y, por tanto, de la longitud de onda de la luz.

24. El índice de refracción de un prisma óptico, ¿es igual para la luz roja que para la luz verde? Relaciona la respuesta con la dispersión de la luz en un prisma óptico.

Las luces de distintos colores se propagan en los medios materiales con velocidades diferentes, sólo en el vacío se propagan con la misma velocidad. La ley de Snell de la refracción se puede escribir así:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Como la luz roja tiene mayor longitud de onda que la luz verde, para ella el índice de refracción es menor, se refracta menos, y el ángulo de refracción es ligeramente mayor que para la luz verde. Este hecho da lugar a la dispersión de la luz blanca en un prisma óptico.

25. Una superficie verde, iluminada con luz blanca, ¿qué color tiene? ¿Y si se ilumina con luz verde? ¿Qué color tiene si la iluminamos con luz azul?

Una superficie verde, iluminada con luz blanca, tiene color verde. Si se ilumina con luz verde, también tiene color verde. En cambio, si se ilumina con luz azul, tiene color negro.

26. Explica las diferencias entre la mezcla aditiva y la mezcla sustractiva de colores.

La obtención de distintos colores por mezcla de luces de colores se denomina mezcla aditiva. A partir de luces de color rojo, verde y azul (colores primarios) se reproduce luz blanca y una gran gama de colores.

Cuando se mezclan pinturas siempre se resta luz, por lo que se denomina mezcla sustractiva. Al mezclar pintura roja, verde y azul no se obtiene color blanco; al contrario, se obtiene color negro. En este caso los colores primarios son el amarillo, el cian y el magenta.

27. Determina el coeficiente de absorción de un material transparente de 3,4 cm de espesor, para que al ser atravesado por una onda luminosa la intensidad disminuya en un 5,2 %.

Según la Ley general de absorción de una onda, se cumple: $I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot x}$ siendo α el coeficiente de absorción y x el espesor atravesado.

$0,948\, I_0 = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot x}$; $0,948 = e^{-\alpha \cdot x}$; $L\, 0,948 = -\alpha \cdot 3,4 \cdot 10^{-2}$ m; $\alpha = 1,6$ m^{-1}

28. Un haz de luz monocromática que se propaga por el aire incide sobre una superficie de agua. Determina el ángulo de incidencia (ángulo de Brewster) para el que el rayo reflejado sea perpendicular al refractado.

Datos: índice de refracción del agua = 1,33.

Como el ángulo de reflexión es igual al de incidencia, el ángulo que forma el rayo reflejado con la superficie del agua vale $90° - i$.

El ángulo que forma el rayo refractado con la superficie del agua vale $90° - r$.

De acuerdo con el enunciado, la suma de ambos ángulos es igual a 90°:

$90° - i + 90° - r = 90°$; $\quad 180° - i - r = 90°$; $\quad r = 90° - i$

A partir de la Ley de Snell de la refracción se obtiene el ángulo de incidencia:

n sen $i = n_a$ sen r; $\quad 1 \cdot$ sen $i = 1,33$ sen $(90° - i)$;

sen $i = 1,33 \cos i$; $\quad$ tg $i = 1,33$;

$i = 53°$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. Una fibra óptica está fabricada con dos materiales de índices de refracción 1,58 y 1,42, respectivamente. ¿Cuál corresponde al material situado en el interior de la fibra?

***a)* 1,58**

***b)* 1,42**

***c)* 1,58 + 1,42 = 3**

a) El índice de refracción en el interior de la fibra debe ser el mayor: 1,58

2. El índice de refracción del núcleo central de una fibra óptica vale 1,62, y el de la superficie de la fibra es 1,48. ¿A partir de qué ángulo de incidencia se produce la reflexión interna total?

***a)* 58°**

***b)* 66°**

***c)* 45°**

b) $\text{sen}\ \ell = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}48}{1{,}62} = 0{,}913\ ;\ \ell = 66°$

3. Un rayo de luz de longitud de onda en el vacío l_0 = 650 nm incide desde el aire sobre el extremo de una fibra óptica formando un ángulo u con el eje de la fibra, siendo el índice de refracción n_1 dentro de la fibra 1,48.

***a)* ¿Cuál es la longitud de onda de la luz dentro de la fibra?**

***b)* La fibra está revestida de un material de índice de refracción n_2 = 1,44. ¿Cuál es el valor máximo del ángulo u para que se produzca la reflexión total interna?**

a) La frecuencia de la onda no cambia al pasar de un medio a otro, pero sí su longitud de onda: $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_1} = \frac{650\ \text{nm}}{1{,}48} = 439\ \text{nm}$

b) El ángulo límite en el interior de la fibra es: $1{,}48 \cdot \text{sen}\ \ell = 1{,}44 \cdot \text{sen}\ 90°\ ;\ \ell = 76{,}6°$

Por tanto, el rayo debe formar con el eje de la fibra un ángulo menor de: $r = 90° - 76{,}6° = 13{,}4°$

El ángulo de incidencia desde el exterior es: $1 \cdot \text{sen}\ \theta = 1{,}48 \cdot \text{sen}\ 13{,}4°\ ;\ = 20{,}0°$

Problemas propuestos

1. Calcula el periodo y la frecuencia de una onda electromagnética de 2,5 cm de longitud de onda. ¿Qué tipo de onda es?

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m}} = 8{,}3 \cdot 10^{-11}\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8{,}3 \cdot 10^{-11}\ \text{s}} = 12 \cdot 10^{10}\ \text{s}$$

Se trata de una onda de radio.

2. Las longitudes de onda de emisión de una cierta cadena de emisoras radiofónicas están comprendidas entre 50 y 200 m.

***a)* ¿Cuál es la banda de frecuencias de emisión de la cadena?**

***b)* ¿Qué emisiones se propagan a mayor velocidad, las de frecuencia más alta o las de más baja?**

a) $f = \frac{c}{\lambda}\ ;\qquad f_1 = \frac{3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{50\ \text{m}} = 6{,}0 \cdot 10^{6}\ \text{s}^{-1}$

$$f_2 = \frac{3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{200\ \text{m}} = 1{,}5 \cdot 10^{6}\ \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la banda de frecuencias utilizada va desde $1{,}5 \cdot 10^{6}$ Hz hasta $6 \cdot 10^{6}$ Hz.

b) Se propagan a la misma velocidad.

3. Escribe las ecuaciones que representan el campo eléctrico y el campo magnético de una onda electromagnética plana que se propaga en el sentido positivo del eje *Ox*. La amplitud del campo eléctrico es de 8 N/C y la frecuencia de 1 MHz.

$$E_0 = 8\ \text{N/C}\ ;\qquad f = 10^{6}\ \text{Hz}\ ;\qquad T = 10^{-6}\ \text{s}\ ;$$

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 3 \cdot 10^{2}\ \text{m}$$

Al introducir estos valores en las ecuaciones de onda del campo eléctrico y del magnético, se obtiene:

$$E = 8\ \text{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{3 \cdot 10^{2}}\right)\ \text{N/C}$$

$$B = \frac{E}{c} = 2{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \text{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{3 \cdot 10^{2}}\right)$$

4. Una de las frecuencias utilizadas en telefonía móvil (sistema GSM) es 900 MHz. ¿Cuántos fotones GSM necesitamos para obtener la misma energía que con un solo fotón de luz violeta de frecuencia $7{,}5 \cdot 10^{8}$ MHz?

$E_v = hf_v = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

La energía de un fotón GSM es:

$E = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 900 \cdot 10^{6}\ \text{s}^{-1} = 5{,}97 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$

El número de fotones GSM es:

$$n = \frac{E_v}{E} = \frac{4{,}97 \cdot 10^{-19}}{5{,}97 \cdot 10^{-25}} = 8{,}32 \cdot 10^{5}\ \text{fotones}$$

5. ¿Por qué decimos que la luz se comporta como si tuviera una doble naturaleza? ¿Este carácter dual se manifiesta simultáneamente en algún fenómeno concreto?

Porque en unos fenómenos se comporta como si tuviera naturaleza ondulatoria y en otros como si fuera corpuscular. Pero nunca manifiesta este carácter dual en un mismo fenómeno. Se puede comportar bien como onda, o bien como partícula.

6. Una onda luminosa que se propaga en el vacío tiene una longitud de onda de 580 nanómetros.

***a)* ¿Cuáles son su periodo y su frecuencia?**

***b)* ¿De qué color es?**

a) $T = \frac{\lambda}{c} = \frac{5{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}} = 1{,}93 \cdot 10^{-15}\ \text{s}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}93 \cdot 10^{-15}\ \text{s}} = 5{,}17 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

b) Es una luz amarilla.

7. La estrella Altair de la constelación de Águila está situada aproximadamente a 16 años luz de la Tierra. ¿A qué distancia en kilómetros se encuentra?

$x = ct = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600)\ \text{s} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{17}\ \text{m} = 1{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{km}$

8. Una lámina de vidrio de 0,5 cm de espesor tiene un índice de refracción de 1,48 para un determinado rayo de luz. ¿Cuánto tiempo tarda este rayo en atravesarla perpendicularmente?

La velocidad de la luz en este vidrio es:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}48} = 2{,}03 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{2{,}03 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}} = 2{,}46 \cdot 10^{-11}\ \text{s}$$

9. El índice de refracción absoluto del hielo a 0 °C es 1,31 para una luz cuya longitud de onda es 589 nm en el aire.

***a)* ¿Cuál es la velocidad de esta luz en el hielo?**

***b)* ¿Cuál es su longitud de onda cuando atraviesa el hielo?**

a) $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}31} = 2{,}29 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$

b) $\lambda_h = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{598\ \text{nm}}{1{,}31} = 450\ \text{nm} = 45 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$

10. Un rayo de luz de 625 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (n = 1,33).

***a)* ¿Cuál es su velocidad en el agua?**

***b)* ¿Cuál es su frecuencia y su longitud de onda en este medio?**

a) $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$

b) Su frecuencia es la misma que en el aire:

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6{,}25 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

La longitud de onda cambia:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{625\ \text{nm}}{1{,}33} = 470\ \text{nm} = 4{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

9. Los índices de refracción absolutos del diamante y del rubí, para una determinada luz monocromática, son 2,41 y 1,76, respectivamente. Calcula el índice de refracción relativo del diamante respecto al rubí y del rubí respecto al diamante.

$$n_{d,r} = \frac{n_d}{n_r} = \frac{2{,}41}{1{,}76} = 1{,}37\,; \qquad n_{r,d} = \frac{n_r}{n_d} = \frac{1{,}76}{2{,}41} = 0{,}730$$

12. Un rayo de luz monocromática pasa del agua (n = 1,33) al aire. Si el ángulo de incidencia es de 30,0°, calcula:

***a)* El valor del ángulo de refracción.**

***b)* El ángulo límite. ¿A partir de qué ángulo no se produce refracción?**

a) $\text{sen}\ r = \frac{n_1\ \text{sen}\ i}{n_2} = \frac{1{,}33\ \text{sen}\ 30°}{1} = 0{,}665\,; \qquad r = 41{,}7°$

b) $\text{sen}\ \ell = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}752\,; \qquad \ell = 48{,}8°$

Para ángulos de incidencia mayores que 48,8° no se produce refracción, la reflexión es total.

13. Un haz de luz roja de 695 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (n = 1,33). Si el ángulo de incidencia es de 35°, ¿cuál es el ángulo de refracción? ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del haz de luz en el agua?

El ángulo de refracción se obtiene a partir de la invariante de refracción:
$n_1\ \text{sen}\ i = n_2\ \text{sen}\ r$

$$\text{sen}\ r = \frac{n_1\ \text{sen}\ i}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}\ 35°}{1{,}33} = 0{,}431\,; \qquad r = 25{,}5°$$

La frecuencia de la luz en el agua es la misma que en el aire:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

La longitud de onda en el agua es:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_0}{n_a} = \frac{6{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{1{,}33} = 5{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

14. ¿Cuál es el ángulo límite para la luz que pasa del benceno (n = 1,50) al agua (n = 1,33)? ¿Y si la luz pasa del agua al benceno?

$$\text{sen}\ \ell = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887\,; \qquad \ell = 62{,}5°$$

Si la luz pasa del agua al benceno ($n_1 < n_2$) no se produce el fenómeno de reflexión total, por lo que no existe un ángulo límite.

15. Sobre la superficie de un bloque de vidrio, cuyo índice de refracción es 1,50, se deposita una lámina de agua cuyo índice de refracción es 1,33. Calcula el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz que, propagándose por el vidrio, incidiese sobre la superficie de separación vidrio-agua.

$1{,}50 \cdot \text{sen}\ \ell = 1{,}33 \cdot \text{sen}\ 90\,; \qquad \ell = 62{,}5$

16. Un rayo de luz viaja por un medio cuyo índice de refracción es n_1 y pasa a otro cuyo índice de refracción es n_2.

Explica razonadamente las condiciones que deben cumplir los índices de refracción y el ángulo de incidencia para que se produzca la reflexión total del rayo incidente.

Calcula el ángulo de incidencia crítico a partir del cual se produce una reflexión total del rayo incidente, para los siguientes datos: n_1 = 1,5 y n_2 = 1,2.

Este fenómeno sólo se produce cuando la luz pasa de un medio más refringente a otro menos refringente: $n_1 > n_2$. La reflexión total solo se produce para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite: $\text{sen}\ \ell = n_2/n_1$

$\text{sen}\ \ell = n_2/\ n_1 = 1{,}2/1{,}5 = 0{,}8\,;\ \ell = 53$

17. Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque con un ángulo de incidencia de 20°. ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado? ¿Variando el ángulo de incidencia podría producirse el fenómeno de reflexión total? Razona la respuesta. Datos: $n_{aire} = 1$, $n_{agua} = 1{,}34$.

El ángulo de reflexión es también de 20° y el ángulo de refracción es:

$1{,}00 \cdot \text{sen } 20° = 1.34 \cdot \text{sen } r$; $r = 14{,}8°$

El ángulo formado por los rayos reflejado y refractado es: $180° - (20° + 14{,}8°) = 145{,}2°$

No se puede producir la reflexión total porque el rayo de luz pasa de un medio menos refringente (aire) a otro de índice de refracción mayor (agua).

18. Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras planas y paralelas con un ángulo de 35°. ¿Con qué ángulo emerge de la lámina? ¿Experimenta algún cambio en su propagación por el interior de la lámina?

El ángulo de emergencia es igual al de incidencia: 35°.

El rayo de luz se refracta en ambas caras de la lámina y sufre un desplazamiento lateral.

19. Sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de 1,5 cm de espesor y de índice de refracción 1,58 situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 30°.

***a)* Dibuja la marcha geométrica del rayo.**

***b)* Comprueba que el ángulo de incidencia es igual que el ángulo de emergencia.**

***c)* Determina la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.**

a) Véase libro de texto, Apartado 8.1.

b) Véase libro de texto, Apartado 8.1.

c) El ángulo de reflexión (r_1) en la primera cara de la lámina se calcula al aplicar la Ley de Snell de la refracción:

$$\text{sen } r_1 = \frac{n_1 \text{ sen } i_1}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 30°}{1{,}58} = 0{,}316; \qquad r_1 = 18{,}4°$$

El desplazamiento lateral es el siguiente:

$$\delta = s \frac{\text{sen } (i_1 - r_1)}{\cos r_1} = 1{,}5 \text{ cm} \cdot \frac{\text{sen } (30° - 18{,}4°)}{\cos 18{,}4°} = 0{,}32 \text{ cm}$$

La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina es:

$$x = \frac{s}{\cos r_1} = \frac{15 \text{ cm}}{\cos 18{,}4°} = 1{,}6 \text{ cm}$$

20. Sobre un prisma de vidrio de ángulo 40° e índice de refracción 1,50 incide un rayo de luz monocromática. Si el ángulo de incidencia es de 45°, calcula el ángulo de emergencia y la desviación producida en el rayo.

El ángulo de refracción en la primera cara del prisma se obtiene a partir de la Ley de Snell:

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} = \frac{\text{sen } 45°}{1{,}50} = 0{,}471; \qquad r = 28{,}1°$$

Como el ángulo del prisma es de 40°, se cumple:

$r' = \varphi - r = 40° - 28{,}1° = 11{,}9°$

Al aplicar la Ley de Snell de la refracción a la segunda cara del prisma se obtiene:

$\text{sen } i' = n \text{ sen } r' = 1{,}50 \cdot \text{sen } 11{,}9° = 0{,}309$; $\qquad i' = 18°$

$\delta = i + i' - \varphi = 45° + 18° - 40° = 23°$

21. Sobre un prisma de vidrio de 30° e índice de refracción 1,52 incide un rayo de luz monocromática perpendicularmente a una de sus caras.

***a)* Dibuja la marcha geométrica del rayo.**

***b)* Calcula el ángulo de desviación.**

Como el rayo de luz incide perpendicularmente en la primera cara del prisma, el ángulo de incidencia es igual a 0° y el rayo no sufre desviación, $r = 0°$.

El ángulo de incidencia i en la segunda cara es:

$n \text{ sen } r' = 1 \cdot \text{sen } i'$; $\text{sen } i' = 1{,}52 \cdot \text{sen } 30° = 0{,}76$

$i' = 49{,}5°$

El ángulo de desviación es:

$\delta = i + i' - \varphi = 0° - 49{,}5° - 30° = 19{,}5°$

22. ¿En qué consiste el denominado efecto Doppler en las ondas luminosas?

En el cambio de frecuencia percibido por el observador cuando él o la fuente luminosa se mueven, acercándose o alejándose uno del otro.

Otros fenómenos ópticos

23. ¿El índice de refracción de un prisma óptico es igual para todas las luces? ¿Es mayor para la luz roja o para la luz azul?

No. Sólo es igual en el vacío.

El índice de refracción es mayor para la luz azul, por eso se refracta más que la luz roja.

24. Justifica el fenómeno que se produce cuando una onda luminosa se encuentra con una rendija (o un obstáculo) de dimensiones comparables a λ.

Se producen fenómenos de difracción e interferencias. Los puntos del frente de ondas que no están tapados por el obstáculo se convierten en centros emisores de nuevos frentes de onda, según el principio de Huygens, logrando la onda bordear el obstáculo o contornear las rendijas y propagarse detrás del mismo.

Las rendijas dan lugar al fenómeno de interferencias de Young. En la pantalla se observa un máximo central de luz, alternando con zonas oscuras y zonas de luz debido al fenómeno de interferencias que tienen lugar después de la difracción en la experiencia de las dos rendijas de Young.

25. ¿Depende el coeficiente de absorción de la frecuencia de la radiación? ¿Es selectiva la absorción?

Generalmente, el coeficiente de absorción depende de la frecuencia. Un buen ejemplo es el denominado efecto invernadero. Por tanto, la absorción sí es selectiva.

26. Explica razonadamente por qué es difícil observar los fenómenos de interferencia y difracción en las ondas luminosas.

Porque es difícil conseguir luces coherentes para apreciar las interferencias, y para que los efectos de la difracción sean observables, el tamaño de la abertura debe ser comparable a la longitud de onda y la de la luz es muy pequeña.

Aplica lo aprendido

27. Explica qué debe ocurrir para que una superficie presente los colores blanco, negro o gris.

Una superficie que absorbe toda la luz que le llega, se verá de color negro. Si refleja toda la luz que incide sobre ella, el color de la superficie será el mismo que el de la luz utilizada: blanco si se ilumina con luz blanca. Las superficies tienen color gris cuando absorben parcialmente todas las frecuencias.

28. Sabiendo que el índice de refracción del diamante es muy elevado, ¿encuentras alguna razón científica que explique por qué también se les llama brillantes?

Como el índice de refracción del diamante es muy elevado, el ángulo límite para los medios diamante-aire es muy pequeño (24,5°), por eso, cuando un haz de luz penetra en el diamante se producen en sus caras reflexiones internas totales, hasta que el rayo incide en alguna cara con un ángulo inferior al límite; entonces se refracta y sale de nuevo al aire. Parece que la luz procede del diamante mismo y brilla intensamente.

29. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30,0°.

a) **¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca, si los valores de los índices de refracción del vidrio para estos colores son, respectivamente, 1,612 y 1,671?**

b) **¿Cuáles son los valores de la frecuencia y de la longitud de onda correspondientes a cada una de estas radiaciones en el vidrio, si las longitudes de onda en el vacío son, respectivamente, 656,3 nm y 486,1 nm?**

a) Para la luz roja:

$$1 \cdot \text{sen } i = n_R \text{ sen } r_R$$

$$\text{sen } r_R = \frac{\text{sen } i}{n_R} = \frac{\text{sen } 30°}{1{,}612} = 0{,}3102; \qquad r_R = 18{,}07°$$

Para la luz azul:

$$\text{sen } r_A = \frac{\text{sen } 30°}{1{,}671} = 0{,}2992; \qquad r_A = 17{,}41°$$

Ángulo que forman los rayos rojo y azul en el interior del vidrio:

$\alpha = r_R - r_A = 18{,}07° - 17{,}41° = 0{,}66°$

b) Las frecuencias son iguales en el aire y en el vidrio:

$$f_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{6{,}563 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}57 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$f_A = \frac{c}{\lambda_A} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4{,}861 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 6{,}17 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Las longitudes de onda son las siguientes:

$$f_R = \frac{\lambda_0}{n_R} = \frac{6{,}563 \text{ nm}}{1{,}612} = 407{,}1 \text{ nm}$$

$$f_A = \frac{\lambda_0}{n_A} = \frac{4{,}861 \text{ nm}}{1{,}671} = 290{,}9 \text{ nm}$$

30. ¿Por qué no se observa dispersión cuando la luz blanca atraviesa una lámina de vidrio de caras planas y paralelas?

En una lámina de caras planas y paralelas, el rayo luminoso que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente; en consecuencia, con luces no monocromáticas que provengan de fuentes no puntuales y dado que están formadas por multitud de rayos paralelos entre sí, el rayo emergente no está disperso, porque las diferentes longitudes de onda, que se propagan dentro de la lámina a distinta velocidad, se reúnen de nuevo a la salida; por ello, la luz emergente es idéntica a la incidente.

31. Sobre una lámina de vidrio, de índice de refracción *n* = 1,58 y un espesor de 8,1 mm, incide perpendicularmente un haz de luz de 585 nm de longitud de onda en el vacío.

a) **¿Cuánto tarda la luz en atravesarla?**

b) **¿Cuántas longitudes de onda están contenidas en el espesor de la lámina?**

a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1{,}58} = 1{,}90 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1};$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1{,}9 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 4{,}3 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

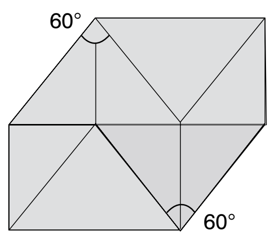
b) Longitud de onda en el vidrio:

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{585 \text{ nm}}{1{,}58} = 370 \text{ nm}$$

Número de ondas:

$$k = \frac{s}{\lambda_v} = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{3{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ ondas}$$

32. A un prisma de vidrio de ángulo 60° e índice de refracción $n = \sqrt{2}$ se le acopla otro prisma idéntico como indica la figura. Determina el ángulo de emergencia en el segundo prisma, si el ángulo de incidencia en el primer prisma es de 30°.



El sistema formado por los dos prismas acoplados se comporta como una lámina de caras planas y paralelas. En consecuencia, el rayo emerge paralelo al rayo incidente. El ángulo de emergencia es igual al de incidencia, 30°.

33. Diseña un circuito eléctrico oscilante capaz de generar ondas electromagnéticas, formado por un generador, una bo-

bina y un condensador. Podéis realizar el trabajo en grupo, consultando la bibliografía adecuada, incluido Internet.

Las ondas electromagnéticas se producen cuando se aceleran los electrones o cualquier otra partícula cargada. Se puede conseguir con un circuito eléctrico oscilante formado por un generador, una bobina y un condensador conectados en serie.

Si el condensador está cargado, entre sus armaduras existirá un campo eléctrico y una diferencia de potencial, que hará circular una corriente por la bobina. A medida que el condensador se descarga, disminuye la intensidad de la corriente y se crea un campo magnético en la bobina, en un proceso reversible.

El valor del campo eléctrico, y también el del campo magnético, oscila entre valores negativos y positivos de forma periódica.

La energía se irradia al exterior separando las armaduras del condensador, constituyendo así una antena emisora.

Esta actividad debe realizarse en equipo y poniendo en común los trabajos realizados.

Actividades

1. Define los siguientes conceptos: dioptrio, eje óptico, radio de curvatura, imagen real y centro óptico.

Dioptrio: conjunto formado por dos medios transparentes, homogéneos e isótropos, con índices de refracción distintos, separados por una superficie.

Eje óptico: eje común de todos los dioptrios de un sistema óptico. También se denomina eje principal.

Radio de curvatura: radio de la superficie esférica a la que pertenece el dioptrio esférico.

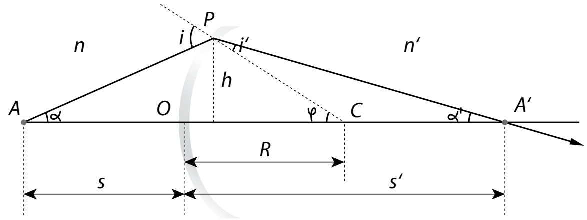
Imagen real: punto en el que se cortan los rayos que atraviesan un sistema óptico. No se ven a simple vista y pueden recogerse sobre una pantalla.

Centro óptico: es el punto de intersección del dioptrio esférico con el eje óptico.

2. Indica las características de las imágenes reales y de las imágenes virtuales.

Las imágenes virtuales no existen realmente, se ven y no pueden recogerse sobre una pantalla. Las imágenes reales no se ven a simple vista, pero pueden recogerse en una pantalla.

3. Averigua los signos de las siguientes magnitudes lineales en la Figura 10.3: *s*, *s′*, *R* y *h*.



Positivos: R, s', h.

Negativos: s

4. En la misma figura averigua los signos de los siguientes ángulos: α, α' y φ.

Positivos: φ, α'

Negativos: α

5. ¿Cuál es el signo del radio de curvatura del dioptrio si su centro de curvatura está situado a la izquierda del vértice del dioptrio?

El radio de curvatura es negativo.

6. En un dioptrio esférico convexo, las distancias focales objeto e imagen miden, respectivamente, –20 y 40 cm. Calcula:

***a)* El radio de curvatura del dioptrio.**

***b)* La posición de la imagen cuando el objeto se sitúa a 10 cm delante del vértice del dioptrio.**

***c)* El índice de refracción del segundo medio si el primero es el aire.**

a) $R = f + f' = -20 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$

En efecto, como el dioptrio es convexo, el radio es positivo.

b) $\dfrac{f'}{s'} + \dfrac{f}{s} = 1; \qquad \dfrac{40 \text{ cm}}{s'} + \dfrac{-20 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}} = 1; \qquad s' = -40 \text{ cm}$

La imagen se forma delante del dioptrio.

c) $\dfrac{f}{f'} = -\dfrac{n}{n'}; \qquad \dfrac{-20 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = -\dfrac{1}{n'}; \qquad n' = 2$

7. En un dioptrio esférico cóncavo de 10 cm de radio se sitúa un objeto de 2 cm de tamaño, 30 cm delante de la superficie de separación de los dos medios. Los índices de refracción son 1,0 y 1,5 para el primero y el segundo medio.

***a)* ¿Dónde se forma la imagen?**

***b)* ¿Cuál es el tamaño de la imagen?**

a) La posición de la imagen se obtiene mediante la ecuación:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}; \quad \frac{1{,}5}{s'} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1{,}5 - 1}{-10 \text{ cm}}; \quad s' = -18 \text{ cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen se forma delante de la superficie del dioptrio.

b) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la fórmula del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{n s'}{n' s}; \quad \frac{y'}{2 \text{ cm}} = \frac{1 \cdot (-18 \text{ cm})}{1{,}5 \cdot (-30 \text{ cm})}; \quad y' = 0{,}8 \text{ cm}$$

La imagen es derecha y de menor tamaño que el objeto.

8. Una piscina tiene una profundidad de 2,50 m. ¿Cuál será su profundidad aparente? n_a = 1,33.

La profundidad aparente se obtiene a partir de la ecuación del dioptrio plano:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}; \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1{,}33}{-2{,}5 \text{ m}}; \qquad s' = -1{,}88 \text{ m}$$

9. Un avión pasa a 275 m de altura sobre la superficie de un lago. ¿A qué distancia ve el avión un buceador?

Al aplicar la ecuación $\dfrac{s'}{s} = \dfrac{n'}{n}$ se obtiene:

$$\frac{s'}{275 \text{ m}} = \frac{1{,}33}{1}; \qquad s' = 366 \text{ m}$$

10. Un niño se coloca delante de un espejo plano a 30 cm de él.

***a)* ¿A qué distancia se forma la imagen?**

***b)* Si el espejo mide 65 cm y el niño, que ve todo su cuerpo, comprueba que sobran 10 cm de espejo por arriba y por debajo de su imagen, ¿cuál es la estatura del niño?**

***c)* ¿Qué tamaño tiene la imagen? ¿Es real o virtual?**

***d)* ¿Existe realmente la imagen? ¿Puede recogerse en una pantalla?**

a) La imagen se forma 30 cm detrás del espejo.

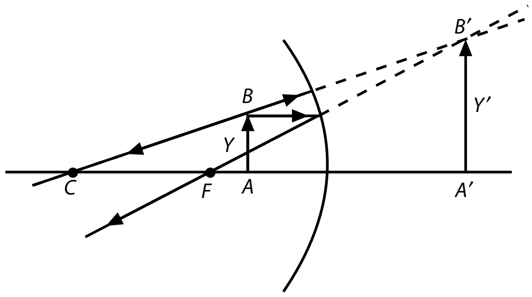
b) (65 cm – 10 cm – 10 cm) · 2 = 90 cm.

c) La imagen mide 90 cm, y es virtual.

d) No, porque las imágenes virtuales se ven pero no existen y, puesto que no existen, no pueden recogerse en pantallas.

11. ¿Cómo debe ser un espejo esférico para formar una imagen virtual mayor que el objeto?

Debe ser un espejo cóncavo, y el objeto debe estar situado entre el foco y el espejo.



12. Un objeto de 1,5 cm de altura se encuentra delante de un espejo esférico de 14 cm de radio, a 20 cm del vértice del espejo. ¿Dónde está situada la imagen y qué características tiene?

***a)* El espejo es cóncavo.**

***b)* El espejo es convexo.**

a) La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{2}{-14\text{ cm}}; \quad s' = -11\text{ cm}$$

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad \frac{y'}{1{,}5\text{ cm}} = -\frac{-11\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \quad y' = -0{,}8\text{ cm}$$

La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) Si el espejo es convexo, el problema es similar, pero el radio de curvatura es positivo.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{2}{14\text{ cm}}; \quad s' = 5{,}2\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{1{,}5\text{ cm}} = -\frac{5{,}2\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \quad y' = 0{,}4\text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

13. Un espejo esférico de 50 cm de radio produce una imagen real cuyo tamaño es la mitad que el objeto. ¿De qué tipo es el espejo? ¿Dónde hay que colocar el objeto?

Como la imagen es real, el espejo es cóncavo y por tanto la imagen es invertida.

La posición del objeto se obtiene a partir de la Ecuación Fundamental de los Espejos Esféricos y del aumento lateral:

$$y' = -\frac{y}{2}; \quad M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad \frac{\frac{-y}{2}}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad s' = \frac{s}{2}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{2}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{3}{s} = \frac{2}{-50\text{ cm}};$$

$s = -75$ cm

El objeto está situado a 75 cm del espejo, a una distancia igual a $3f$.

14. Situamos un objeto de 2,0 cm de altura a 15 cm de una lente de 5,0 dioptrías.

***a)* Calcula la posición de la imagen.**

***b)* ¿Cuál es el aumento? ¿Qué tipo de imagen se forma?**

***c)* Construye gráficamente la imagen.**

a) La distancia focal imagen es: $P = \frac{1}{f'}$; $f' = 0{,}20$ m

Aplicamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-0{,}15\text{ m}} = \frac{1}{0{,}20\text{ m}}; \quad s' = -0{,}60\text{ m}$$

b) El aumento es: $M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-0{,}60\text{ m}}{-0{,}15} = 4{,}0$

La imagen es cuatro veces mayor que el objeto, es derecha y virtual.

c) La construcción gráfica es semejante a la Figura 10.37 del libro de texto.

15. Mediante una lente delgada de focal $f' = 10$ cm se quiere obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Calcula la posición donde debe colocarse el objeto si la imagen debe ser real e invertida.

Como el tamaño de la imagen es el doble que el del objeto y la imagen es real e invertida, se cumple:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = -2; \quad s' = -2s$$

De la ecuación fundamental de las lentes delgadas se obtiene:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{-2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10\text{ cm}}; \quad s = -15\text{ cm}$$

16. Cierta lente delgada de distancia focal 6 cm genera, de un objeto real, una imagen derecha y menor, de 1 cm de altura, y situada a 4 cm ala izquierda del centro óptico. Determina la posición y el tamaño del objeto, el tipo de lente y realiza su diagrama de rayos.

La lente es divergente porque estas lentes siempre producen imágenes virtuales menores que el objeto. Las lentes convergentes solo producen imágenes virtuales cuando el objeto está dentro de la distancia focal, pero son mayores que el objeto.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{-4\text{ cm}} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-6\text{ cm}}; \quad s = -12\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \quad \frac{1\text{ cm}}{y} = \frac{-12\text{ cm}}{-4\text{ cm}} = y = 3\text{ cm}$$

El diagrama de rayos es semejante al de la Figura 10.38 del libro de texto.

17. Se dispone de una lente convergente (lupa) de distancia focal $f = 5{,}0$ cm, que se utiliza para mirar sellos. Calcula

la distancia a la que hay que situar los sellos respecto de la lente si se quiere obtener una imagen virtual diez veces mayor que el objeto.

El objeto debe situarse entre el foco y la lente, para conseguir una imagen virtual, derecha y mayor que el objeto.

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = 10 \qquad s' = 10\,s$$

La distancia objeto se obtiene a partir de la Ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{10\,s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{5{,}0\ \text{cm}}; \quad s = -4{,}5\ \text{m}$$

18. ¿Qué defectos presentan los ojos de una persona a la que el oftalmólogo graduó así:

Ojo derecho: Esférico (2,5), Cilíndrico (–1,25).

Ojo izquierdo: Esférico (1,75); Cilíndrico (–0,50).

Hipermetropía (lentes esféricas convergentes) y astigmatismo (lentes cilíndricas).

19. Calcula la potencia de la lente que se debe emplear para corregir la miopía de un ojo cuyo punto remoto está situado a 50 cm.

La imagen de los objetos situados en el infinito debe formarse a 50 cm del ojo; por tanto, de acuerdo con el convenio de signos: $s = -\infty$; $s' = -50$ cm:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-50\ \text{cm}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{f'}; \quad f' = -50\ \text{cm}\ ;$$

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0{,}5\ \text{cm}} = -2\ \text{D}$$

20. ¿Cuál es la potencia de un ojo normal que forma la imagen de un objeto situado en el infinito en la retina? La retina está situada a unos 2,5 cm del centro óptico del ojo.

La distancia focal imagen es igual a 2,5 cm = 0,025 m

Potencia de la lente: $P = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{0{,}025\ \text{m}} = 40\ \text{D}$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Por qué en los telescopios no se persigue conseguir grandes aumentos?

Como los astros observados son tan lejanos, aunque el aumento fuera muy grande seguirían viéndose como puntos de luz.

2. ¿Qué ventajas presentan los telescopios espaciales respecto a los terrestres?

La atmósfera terrestre absorbe parte de la radiación que llega del espacio, y no se ven afectados por factores meteorológicos o por la contaminación lumínica.

3. ¿Por qué los radiotelescopios tienen un plato que no está fabricado con espejos?

Porque las ondas de radio tienen longitudes de onda mucho mayores que la luz.

4. ¿Por qué los platos de los radiotelescopios son tan grandes?

Para poder recibir mayor cantidad de radiación del espacio.

Problemas propuestos

Dioptrio esférico

1. Calcula las distancias focales de un dioptrio esférico convexo de 10 cm de radio en el que los índices de refracción de los dos medios transparentes son 1,0 y 1,6, respectivamente.

Las distancias focales objeto e imagen son las siguientes:

$$f = -R\,\frac{n}{n' - n} = -10\ \text{cm} \cdot \frac{1}{1{,}6 - 1} = -17\ \text{cm}$$

$$f' = R\,\frac{n'}{n' - n} = 10\ \text{cm} \cdot \frac{1{,}6}{1{,}6 - 1} = 27\ \text{cm}$$

2. Determina en un dioptrio esférico cóncavo de 15 cm de radio la posición de la imagen de un objeto de 1 cm de tamaño, situado 20 cm delante de la superficie de separación de los dos medios. ¿Cuál es el tamaño de la imagen? Los índices de refracción del primer y segundo medio son 1,33 y 1,54, respectivamente.

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}; \qquad \frac{1{,}54}{s'} - \frac{1{,}33}{-20\ \text{cm}} = \frac{1{,}54 - 1{,}33}{-15\ \text{cm}};$$

$s' = -19$ cm

El tamaño de la imagen se obtiene a partir del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{n\,s'}{n'\,s}; \qquad \frac{y'}{1\ \text{cm}} = \frac{1{,}33 \cdot (-19\ \text{cm})}{1{,}54 \cdot (-20\ \text{cm})}; \qquad y' = 0{,}8\ \text{cm}$$

Dioptrio plano

3. En el fondo de una jarra llena de agua (*n* = 1,33) hasta una altura de 20 cm se encuentra una moneda. ¿A qué profundidad aparente se encuentra ésta?

La profundidad aparente se obtiene a partir de la ecuación: $\dfrac{n'}{s'} = \dfrac{n}{s}$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1{,}33}{-20\ \text{cm}}; \qquad s' = -15\ \text{cm} = -0{,}15\ \text{m}$$

4. En el fondo de un estanque lleno de agua (*n* = 1,33), con una profundidad de 1,4 m, se encuentra una pequeña piedra.

a) **¿A qué distancia de la superficie del agua se ve la piedra?**

b) **¿Cómo es el tamaño de la imagen?**

a) Al aplicar la ecuación del dioptrio plano, resulta:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}; \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1{,}33}{-1{,}4\text{ m}}; \qquad s' = -1{,}05\text{ m}$$

b) La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto.

5. Un pescador se encuentra sobre su barca, a una altura sobre la superficie del lago de 2 m, y un pez nada 30 cm por debajo de la superficie, en la vertical del pescador. ¿A qué distancia ve el pescador al pez? El índice de refracción del agua es 1,33.

La profundidad aparente a la que se encuentra el pez es:

$$\frac{s'}{s} = \frac{n'}{n}; \qquad \frac{s'}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{1{,}33}; \qquad s' = -22{,}6\text{ cm}$$

Para el pescador, el pez se encuentra a una distancia total de 2,2 m.

Espejos

6. Un objeto de 0,5 m de altura se coloca delante de un espejo plano y a 40 cm de él.

***a)* ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?**

***b)* ¿Qué tamaño tiene la imagen?**

a) $s' = -s = -(-40\text{ cm}) = 40\text{ cm}$

b) $y' = y = 0{,}5\text{ m}$

7. ¿Puede existir un espejo esférico que forme una imagen cuya distancia al espejo sea negativa y el aumento lateral positivo?

Como la imagen debe ser real, el espejo debería ser cóncavo, pero estos espejos nunca forman imágenes derechas que sean reales; por tanto, ningún espejo esférico puede formar una imagen con esas características.

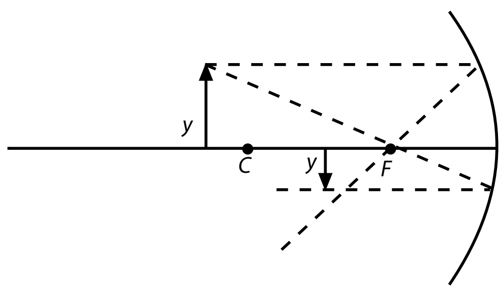
8. Delante de un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es de 40 cm se sitúa un objeto de 2,5 cm de altura, perpendicularmente al eje óptico del espejo, y a 50 cm del vértice del mismo.

***a)* Construye la imagen gráficamente.**

***b)* ¿Cuál es la distancia focal del espejo?**

***c)* Calcula la posición y el tamaño de la imagen.**

a)



b) La diferencia focal es la mitad del radio de curvatura.

$$f = \frac{R}{2} = \frac{-40\text{ cm}}{2} = -20\text{ cm}$$

c) La posición s' de la imagen se obtiene de la ecuación de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-50\text{ cm}} = \frac{2}{-40};$$

$$\frac{1}{s'} = -\frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{50\text{ cm}}; \quad \text{De donde } s' = 33{,}3\text{ cm.}$$

El tamaño se obtiene a partir de la fórmula del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}; \; y' = \frac{-s'\,y}{s} = \frac{33{,}3\text{ cm} \cdot 2{,}5\text{ cm}}{-50\text{ cm}} = -1{,}7\text{ cm}$$

Es invertida y menor que el objeto.

9. Delante de un espejo esférico convexo cuyo radio de curvatura es de 15 cm se sitúa un objeto de 1,4 cm de altura, a 22 cm del vértice del mismo. Averigua la posición y las características de la imagen.

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos, y su tamaño al aplicar la fórmula del aumento lateral:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-22\text{ cm}} = \frac{2}{15\text{ cm}}; \quad s' = 5{,}6\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1{,}4\text{ cm}} = \frac{5{,}6\text{ cm}}{-22\text{ cm}}; \qquad y' = 0{,}36\text{ cm}$$

10. ¿A qué distancia de un espejo convexo debe colocarse un lápiz para que el tamaño de la imagen sea la mitad del tamaño de este? El radio de curvatura del espejo es de 30 cm.

De acuerdo con el enunciado, se cumple $y' = \frac{y}{2}$. A partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos y del aumento lateral, se obtiene la distancia objeto s:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{\frac{y}{2}}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad s' = -\frac{s}{2}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{-\frac{s}{2}} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad s = -\frac{R}{2} = \frac{-30\text{ cm}}{2} = -15\text{ cm}$$

11. Cierto espejo colocado a 2 m de un objeto produce una imagen derecha y de tamaño tres veces mayor que el objeto. ¿El espejo es convexo o cóncavo? ¿Cuánto mide el radio de curvatura del espejo?

El espejo es cóncavo. Los espejos convexos forman imágenes virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad 3 = -\frac{s'}{-2\text{ m}}; \qquad s' = 6\text{ m}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{1}{6\text{ m}} + \frac{1}{-2\text{ m}} = \frac{2}{R}$$

$R = -6$ m (espejo cóncavo: $R < 0$)

12. ¿Se puede distinguir al tacto una lente convergente de una divergente?

Las lentes convergentes son más gruesas en el centro que en los bordes. En las lentes divergentes ocurre lo contrario.

13. Indica las características de la imagen formada por una lente si la distancia imagen es positiva.

Como la distancia imagen es positiva, la imagen es real y, además será invertida.

14. ¿Qué distancia focal imagen tiene una lente de −5,5 dioptrías? ¿Cuánto vale su distancia focal objeto?

$$P = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-5{,}5\ \text{m}^{-1}} = -0{,}18\ \text{m}\,; \qquad f = -f' = 0{,}18\ \text{m}$$

15. ¿Por qué los rayos que pasan por el centro óptico de una lente no se desvían?

Porque en este caso la lente se comporta, aproximadamente, como si fuera una lámina delgada de caras planas y paralelas.

16. Un objeto de 2,0 cm de altura se sitúa a 25 cm del centro óptico de una lente de 40 cm de distancia focal.

a) **Calcula la posición y el tamaño de la imagen, tanto si la lente es convergente como si es divergente.**

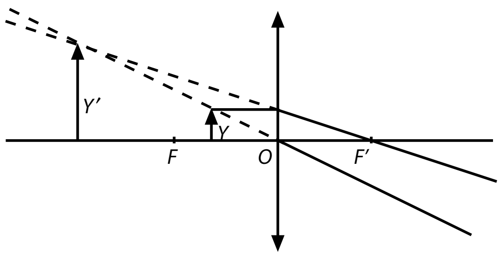
b) **Construye la imagen gráficamente en ambos casos.**

a) La posición y el tamaño de la imagen se calculan mediante la ecuación fundamental de las lentes delgadas y la del aumento lateral:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-25\ \text{cm}} = \frac{1}{40\ \text{cm}}; \qquad s' = -67\ \text{cm}$$

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{2\ \text{cm}} = \frac{-67\ \text{cm}}{-25\ \text{cm}}; \qquad y' = 5{,}4\ \text{cm}$$

b) La imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto.

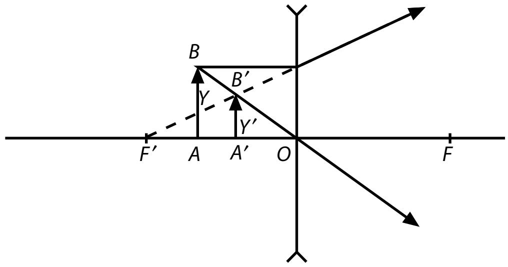


La posición y el tamaño de la imagen son:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-25\ \text{cm}} = \frac{1}{-40\ \text{cm}}; \qquad s' = -15\ \text{cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1\ \text{cm}} = \frac{-15\ \text{cm}}{-25\ \text{cm}}; \qquad y' = 1{,}2\ \text{cm}$$

b) La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.



17. Determina la distancia focal de una lente biconvexa delgada de índice de refracción *n* = 1,5 y cuyos radios de curvatura son 5 y 4 cm, respectivamente. Si se sitúa un objeto de 8 mm delante de la lente, a 10 cm de la misma, ¿cuáles son las características de la imagen que se forma?

La distancia focal imagen es la siguiente:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}5-1)\cdot\left(\frac{1}{5\ \text{cm}} - \frac{1}{-4\ \text{cm}}\right);$$

$$f' = 4{,}4\ \text{cm}$$

Posición y tamaño de la imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\ \text{cm}} = \frac{1}{4{,}4\ \text{cm}}; \qquad s' = 7{,}9\ \text{cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{8\ \text{mm}} = \frac{7{,}9\ \text{cm}}{-10\ \text{cm}}; \qquad y' = -6{,}3\ \text{mm}$$

La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

18. ¿A qué distancia de una lente delgada de 5,0 dioptrías hay que colocar un objeto para obtener de él una imagen virtual de tamaño doble?

Como la potencia de la lente es positiva, y además la imagen es virtual y de mayor tamaño que el objeto, la lente es convergente, y el objeto debe estar situado dentro de la distancia focal de la lente. Por tanto, la imagen será derecha.

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = 2 \qquad y' = 2y\,;\ s' = 2s$$

La distancia objeto se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P\,; \qquad \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} = P\,;\ s = \frac{-1}{2P} = \frac{-1}{2\cdot 5{,}0\ D} =$$

$$= -0{,}1\ \text{m} = -10\ \text{cm}$$

En efecto, el objeto está situado entre el foco y la lente, pues la distancia focal de la lente es:

$$P = \frac{1}{f'}; \quad f' = \frac{1}{5{,}0\ \text{m}^{-1}} = 0{,}20\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

19. Un objeto luminoso está situado a 4 m de distancia de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto:

a) **Determina la naturaleza de la lente, así como su posición respecto del objeto y de la pantalla.**

b) **Calcula la distancia focal, la potencia de la lente y efectúa la construcción geométrica de la imagen.**

a) La imagen es real, ya que se recoge sobre una pantalla y además es de mayor tamaño que el objeto; por tanto, la lente es convergente y la imagen ha de estar invertida.

Como la imagen es tres veces mayor que el objeto y está invertida: $s' = -3s$

La distancia del objeto a la imagen son 4 m: $|s'| + |s| = |-3s| + |s| = 4$ m ; $|s| = 1$ m

Por tanto, la lente está situada a 1 m del objeto y a 3 m de la pantalla.

b) La distancia focal imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{3\text{ m}} - \frac{1}{-1\text{ m}} = \frac{1}{f'}\text{ ; } f' = 0{,}75\text{ m}$$

Potencia de la lente: $P = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{0{,}75\text{ m}} = 1{,}3$ D

La construcción geométrica es semejante a la Figura 10.35, con el objeto situado entre las distancias f y $2f$.

20. Un proyector de diapositivas produce una imagen nítida sobre una pantalla colocada a 5 m del proyector. Sabiendo que la diapositiva está colocada a 2 cm de la lente del proyector, calcula la potencia de la lente y el aumento lateral conseguido.

La imagen es real, puesto que se recoge en una pantalla; por tanto, la lente del proyector es convergente y su potencia es positiva.

La ecuación general de las lentes delgadas permite calcular la potencia de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P$$

$$P = \frac{1}{5\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}02\text{ m}}; \qquad P = 50\text{ D}$$

El aumento lateral es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{5\text{ m}}{0{,}02\text{ m}} = -250$$

La imagen es invertida (signo negativo del aumento lateral) y su tamaño es 250 veces mayor que el objeto.

21. Una lente convergente forma una imagen derecha y de tamaño doble de un objeto real. Si la imagen queda a 60 cm de la lente, ¿cuál es la distancia del objeto a la lente y la distancia focal de la lente?

Como la imagen es derecha, también es virtual y la distancia imagen negativa: $s' = -60$ *cm*

Como la imagen es de tamaño doble que el objeto: $= \dfrac{s'}{s} = 2$; $s = -30$ cm

El objeto está situado 30 cm delante de la lente.

La distancia focal es: $\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{f'}$; $\dfrac{1}{-60\text{ cm}} - \dfrac{1}{-30\text{ cm}} = \dfrac{1}{f'}$;

$f' = -60$ *cm*

22. ¿Cuál es la potencia de un sistema óptico formado por una lente divergente de 3,5 dioptrías en contacto con otra convergente de 1,3 dioptrías? ¿Cuál es la distancia focal imagen del sistema?

$P = P_1 + P_2 = -3{,}5 + 1{,}3 = -2{,}2$ D

$$P = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2{,}2\text{ m}^{-1}} = -0{,}45\text{ m}$$

23. ¿Qué defectos tienen los ojos de una persona a la que el oftalmólogo graduó así?

	Esférico	**Cilíndrico**
Ojo derecho	**−2,5**	**−0,75**
Ojo izquierdo	**−3,75**	**−0,50**

Miopía, por tener valores de lentes correctoras esféricas con potencia negativa (lentes divergentes) y astigmatismo, por necesitar corrección cilíndrica.

24. ¿Qué lentes correctoras deben utilizarse para corregir la hipermetropía de un ojo cuyo punto próximo está situado a 1,4 m? El punto próximo de una persona con visión normal es 25 cm.

Precisa una lente que, de un objeto situado a 25 cm, forme la imagen a una distancia de 1,4 m.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P$$

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-1{,}4\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}25\text{ m}}; \qquad P = 3{,}3\text{ D}$$

25. Calcula la potencia de la lente utilizada para corregir la miopía de un ojo cuyo punto remoto está situado a 40 cm.

La imagen de los objetos situados en el infinito debe formarse a 40 cm del ojo; por tanto, de acuerdo con el convenio de signos: $s = -\infty$; $s' = -40$ cm:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}\text{ ; } = \frac{1}{-40\text{ cm}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{f'}\text{ ; } f' = -40\text{ cm ;}$$

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0{,}4\text{ m}} = -2{,}5\text{ D}$$

26. El ojo normal se asemeja a un sistema óptico formado por una lente convergente (el cristalino) de +15 mm de distancia focal. La imagen de un objeto lejano (en el infinito) se forma sobre la retina. Calcula:

a) **La distancia entre la retina y el cristalino.**

b) **La altura de la imagen de un árbol de 16 m de altura, que está a 100 m del ojo.**

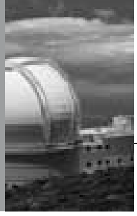
a) La imagen de un objeto situado en el infinito se forma en el foco imagen; por tanto, la distancia entre la retina y el cristalino es la distancia focal: 15 mm.

b) La altura de la imagen se obtiene a partir del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} - \frac{s'}{s} = \frac{0{,}015\text{ cm}}{-100\text{ cm}} = -1{,}5 \cdot 10^{-4}\text{ m ; } y' = -1{,}5 \cdot 10^{4}\text{ m} \cdot$$

$\cdot$ 16 m = −2,04 mm

27. Un panel solar de 1 m² de superficie posee lentes de 17,6 cm de distancia focal para concentrar la luz en las células



fotoeléctricas, hechas de silicio. En un determinado momento la radiación solar incide con una intensidad de 1000 W/m^2. Calcula la potencia de las lentes y el número de fotones que inciden sobre el panel durante 1 minuto. Datos: f = 5,00 · · 10^{14} Hz, h = 6,63 · 10^{-34} J s.

La potencia es: $P = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{0{,}176\ \text{m}} = 5{,}68\ \text{D}$

La energía de un fotón es:

$E = h\,f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 5{,}00 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}31 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

En 1 minuto llega al panel una energía:

$E = I\,S\,t = 1000\ \text{W/m}^2 \cdot 1\ \text{m}^2 \cdot 60\ \text{s} = 60 \cdot 10^3\ \text{J}$

Número de fotones:

$N = 60 \cdot 10^3\ \text{J} / 3{,}31 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}81 \cdot 10^{23}$ fotones

28. Un espejo esférico convexo, que actúa de retrovisor de un automóvil parado, proporciona una imagen virtual de un vehículo que se aproxima con velocidad constante. El tamaño de la imagen es $\dfrac{1}{20}$ del tamaño real del vehículo cuando este se encuentra a 10 m del espejo. Calcula:

a) **El radio de curvatura del espejo.**

b) **La posición de la imagen formada.**

c) **Si dos segundos después la imagen observada en el espejo se ha duplicado, ¿a qué distancia del espejo se encuentra ahora el vehículo?**

d) **¿Cuál es la velocidad del vehículo?**

a) $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{s'}{s};\qquad \dfrac{1}{20} - \dfrac{s'}{-10\ \text{m}};\qquad s' = 0{,}5\ \text{m}$

$\dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2}{R};\qquad \dfrac{1}{0{,}5\ \text{m}} + \dfrac{1}{-10\ \text{m}} = \dfrac{2}{R};\qquad R = 1{,}05\ \text{m}$

b) $s' = 0{,}5\ \text{m}$

c) Si la imagen se duplica: $M_L = \dfrac{1}{10}$

$M_L = -\dfrac{s'}{s};\qquad \dfrac{1}{10} = -\dfrac{s'}{s}$

$\dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2}{R};\qquad \dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2}{1{,}05}$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$s = -4{,}7\ \text{m}$

d) $v = \dfrac{e}{t} = \dfrac{10\ \text{m} - 4{,}7\ \text{m}}{2\,s} = 2{,}6\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$

29. ¿Qué tamaño tiene la imagen de la Luna observada mediante una lente convergente de distancia focal igual a 40 cm? Diámetro de la Luna, 3 640 km. (Distancia de la Luna a la Tierra, 380 000 km.)

La imagen de la Luna se forma en el foco imagen:

$M_L = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s};\ \dfrac{y}{3\,640\ \text{km}} = \dfrac{4 \cdot 10^{-4}\ \text{km}}{3{,}8 \cdot 10^5\ \text{km}}$

$y' = 3{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{km} = 3{,}8\ \text{mm}$

30. Una de las lentes de las gafas de un miope tiene -4,0 D de potencia.

a) **Calcula la distancia focal imagen de la lente.**

b) **Determina el índice de refracción del material que forma la lente sabiendo que la velocidad de la luz en su interior es el 65% de la velocidad en el vacío.**

c) **Halla la posición de la imagen virtual vista a través de la lente de un objeto situado a 2,0 m de la lente.**

a) Distancia focal imagen: $P = \dfrac{1}{f'};\ f' = \dfrac{1}{-4{,}0\ \text{m}^{-1}} = -25\ \text{cm}$

b) $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{1}{0{,}65} = 1{,}5$

c) Posición de la imagen: $\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{f'};\ \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{-2{,}0\ \text{m}} =$

$= \dfrac{1}{-0{,}25\ \text{m}};\ s' = -0{,}22\ \text{m}$

31. Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal (f' = 10 cm) separadas 40 cm. Un objeto de 1 cm de altura se coloca delante de la primera lente a una distancia de 15 cm, perpendicularmente al eje óptico. Determina:

a) **La posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por la primera lente.**

b) **La posición de la imagen final del sistema, efectuando su construcción gráfica.**

a) La posición de la imagen formada por la primera lente se obtiene a partir de la ecuación general de las lentes delgadas:

$\dfrac{1}{s'_1} - \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{f'_1};\qquad \dfrac{1}{s'_1} - \dfrac{1}{-15\ \text{cm}} = \dfrac{1}{10\ \text{cm}};\qquad s'_1 = 30\ \text{cm}$

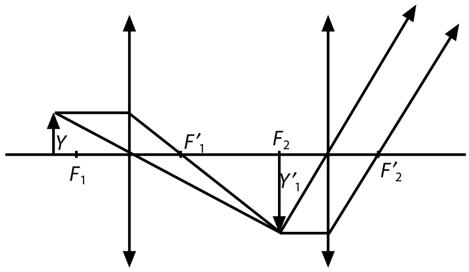
Como esta distancia imagen es positiva, la imagen intermedia es real. El tamaño de esta imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$M_L = \dfrac{y'_1}{y_1} = \dfrac{s'_1}{s_1};\qquad \dfrac{y'_1}{1\ \text{cm}} = \dfrac{30\ \text{cm}}{-15\ \text{cm}};\qquad y'_1 = -2\text{cm}$

El signo negativo indica que la imagen es invertida. Su tamaño es mayor que el del objeto.

b) Como la distancia entre ambas lentes es de 40 cm y la imagen intermedia se forma 30 cm a la derecha de la primera lente, la imagen intermedia está situada a 10 cm de la segunda lente, es decir, en el plano focal objeto de esta lente. Por tanto, la imagen final se formará en el infinito.

Construcción gráfica:



32. Demuestra experimental y gráficamente la propagación rectilínea de la luz mediante un juego de prismas que conduzcan un haz de luz desde el emisor hasta una pantalla.

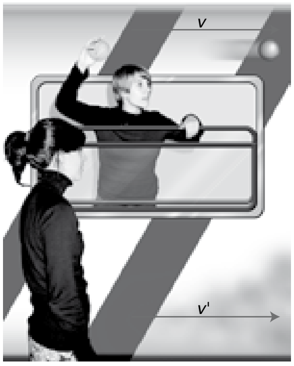
Coloca en un banco óptico un foco luminoso y a continuación una lente convergente para concentrar la luz sobre un diafragma de una ranura en posición vertical. Al final sitúa una pantalla opaca, y a lo largo del banco óptico diversos prismas ópticos de reflexión interna total.

El ángulo límite para el tipo de vidrio más común es de unos 42, lo que permite fabricar prismas de vidrio de reflexión interna total. Para ángulos de incidencia de 45, según la posición del prisma, se puede obtener un cambio de dirección de 90 o un cambio de sentido (180).

Colocando los prismas en distintas posiciones se puede guiar el haz de luz hasta la pantalla por diferentes trayectorias rectilíneas. Si se coloca un papel blanco a lo largo del banco óptico se puede dibujar la trayectoria rectilínea del haz de luz.

Actividades

1. El pasajero de la figura arroja una pelota con una velocidad *v* con respecto a sí mismo. Si el vagón se mueve en el mismo sentido con una velocidad *v′*, ¿con qué velocidad se mueve la pelota respecto de un observador que está parado fuera del tren?



La velocidad de la pelota respecto del observador que está en reposo fuera del tren es $v_0 = v + v'$.

2. Un observador se encuentra en la terraza de un edificio situado a 20 metros de la calle, donde se encuentra un segundo observador. Si el primero lanza una piedra verticalmente hacia arriba, escribe las ecuaciones de transformación que permitan calcular, en cualquier instante, la posición de la piedra con respecto de los dos observadores.

Las ecuaciones del movimiento para el observador situado en la terraza y para el observador situado en la calle son, respectivamente:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

De donde se deduce la ecuación de transformación $y' = y + 20$.

3. Escribe las ecuaciones de transformación en el caso de que el segundo observador de la actividad anterior subiera en un ascensor con velocidad constante de 0,5 m/s.

$$y = (v_0 - 0{,}05)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

4. ¿Cambiarían las ecuaciones de transformación anteriores en el caso de que el primer observador dejara caer la piedra en lugar de lanzarla hacia arriba?

Si se dejara caer la piedra, las ecuaciones del movimiento serían:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2; \qquad y' = 20 - \frac{1}{2} g t^2$$

por tanto, la ecuación de transformación no varía:

$$y' = y + 20$$

5. ¿Se pueden aplicar las ecuaciones de transformación en el caso de que el ascensor de la actividad 3 ascendiera con aceleración constante?

Consultar Epígrafe 11.4.C de la página 257 del libro del alumno.

6. Un automóvil circula a 120 km/h por una carretera y adelanta a un camión que se mueve a una velocidad de 80 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve un vehículo respecto del otro?

Sin consideramos que el observador inicial *0* circula a 120 km/h y el observador *0′* circula a 80 km/h,

$v = u - u' = 120$ km/h $- 80$ km/h $= 40$ km/h

7. ¿Cuál sería la velocidad relativa de cada vehículo si el camión y el coche se cruzaran circulando en sentido contrario?

En ese caso la velocidad relativa entre los dos vehículos es $v = u - u' = 120$ km/h $+ 80$ km/h $= 200$ km/h

8. ¿Por qué no se puede medir la contracción que experimenta un objeto al moverse?

Porque el metro utilizado en la medida también sufre la misma contracción relativa, de forma que la razón entre las longitudes del objeto y del metro permanecería constante.

9. Un observador terrestre mide la longitud de una nave que pasa próxima a la Tierra y que se mueve a una velocidad $v < c$ resultando ser L. Los astronautas que viajan en la nave le comunican por radio que la longitud de su nave es L_0.

a) **¿Coinciden ambas longitudes? ¿Cuál es mayor? Razona las respuestas.**

b) **Si la nave espacial se moviese a la velocidad de la luz, ¿cuál sería la longitud que mediría el observador terrestre?**

Consultar Epígrafe 11.7.B de la página 263 del libro del alumno.

10. Para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz la mecánica de Newton sigue siendo válida. Explica razonadamente por qué.

Si la velocidad *v* es muy pequeña, comparada con la velocidad de la luz, el factor de transformación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tiende al valor uno, y entonces, las transformaciones de Lorentz coinciden con las transformaciones de Galileo.

11. Comprueba que si *u* y *v* son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la transformación relativista de la velocidad coincide con la transformación de la velocidad de Galileo.

Las transformaciones galileana y relativista de la velocidad son, respectivamente:

$$u' = u - v; \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Si *u* y *v* son muy pequeñas comparadas con *c*, se cumple que:

$$\frac{uv}{c^2} \cong 0$$

En este caso las dos transformaciones coinciden.

12. Comprueba si un objeto que se mueve con una velocidad *c* con relación a un observador *S*, también tiene una velocidad *c* respecto de un observador *S′* (independientemente de la velocidad *v* de *S′*).

En este caso $u = c$. Si aplicamos la transformación relativista de la velocidad, tenemos:

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = c$$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Qué es una lente gravitacional?

Es el efecto de desviar la luz por campos gravitatorios muy intensos.

2. ¿ Qué diferencias existen entre una lente óptica y una lente gravitacional?

Una lente óptica tiene el punto focal bien definido. Una lente gravitacional no tiene un foco bien definido. En una lente óptica los rayos luminosos son tanto más desviados cuanto más alejados del eje óptico inciden en la lente. En una lente gravitacional ocurre lo contrario.

3. ¿Qué criterio se utiliza para detectar materia oscura en nuestra galaxia?

El aumento de brillo de una estrella originado por una lente gravitacional.

4. Una aplicación de las lentes gravitacionales es determinar la masa de una galaxia. ¿En qué condiciones?

La galaxia que origina la lente gravitacional ha de tener simetría esférica.

Problemas propuestos

1. Una nave espacial *A* pasa ante un observador *B* con una velocidad relativa de 0,200*c*. El observador *B* calcula que una persona de la nave necesita 3,96 s en realizar una tarea determinada. ¿Qué tiempo medirá la persona de la nave para realizar dicha tarea? (Fig. 11.18).

El tiempo medido por el observador de la nave:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}2\,c}{c}\right)^2} = 3{,}96\ \text{s} \cdot 0{,}979 = 3{,}88\ \text{s}$$

2. Un astronauta de 30 años se casa con una mujer de 20 años poco antes de emprender un viaje espacial. Cuando retorna a la Tierra ella tiene 35 años y él 32. ¿Cuánto ha durado el viaje según los relojes de la Tierra y cuál fue la velocidad media durante el viaje?

El tiempo transcurrido según los relojes de la Tierra viene dado por la diferencia de edad de la mujer: 15 años. En este caso, pues, $t = 15$ años y $t' = 2$ años. Por tanto, tenemos que:

$$2\ \text{años} = 15\ \text{años} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{4}{225} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

de donde se deduce que $v = 0{,}99\,c$.

3. Dos observadores, uno en tierra y otro en una nave espacial, sincronizan sus relojes a las 12 horas, en el instante en que parte la nave con una velocidad media de 10^8 m/s. Si el astronauta pudiera leer el reloj del observador en tierra a través de un telescopio, ¿qué hora leería una vez que ha transcurrido una hora y media para él?

La dilatación del tiempo viene dada por:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}5\ \text{h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1{,}5\ \text{h}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} =$$

$$= \frac{4{,}5\ \text{h}}{\sqrt{8}} = 1{,}59\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 35\ \text{min}$$

4. Dos gemelos tienen 25 años de edad; entonces uno de ellos sale en un viaje por el espacio a una velocidad constante. Para el gemelo que viaja en la nave, cuando regresa, han transcurrido 6 años, mientras que su hermano que quedó en Tierra tiene entonces 43 años. ¿Cuál fue la velocidad de la nave?

Aplicamos la expresión que nos permite calcular la variación del tiempo:

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En este caso, $t = 43 - 25 = 18$ años; $t' = 6$ años.

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$c^2 = 9c^2 - 9v^2$; $9v^2 = 8c^2$; $3v = 2{,}83\,c$; $v = 2{,}8 \cdot 10^8$ m/s

5. ¿A qué velocidad debería desplazarse un astronauta para que el tiempo transcurrido en la cápsula espacial sea la mitad del tiempo transcurrido en la Tierra?

Aplicamos la expresión de la dilatación del tiempo, que en este caso es $t' = \frac{1}{2}t$.

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}; \qquad \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$4c^2 - 4v^2 = c^2$; $\quad 4v^2 = 3c^2$

De donde: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s.

6. Las aeronaves de las líneas aéreas comerciales vuelan a una velocidad media de 250 m/s, con respecto a la Tierra. ¿Deberán reajustar los pasajeros sus relojes después de un vuelo para corregir la dilatación temporal? Razona tu respuesta.

No. Porque la velocidad de 250 m/s es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz. Por tanto, la dilatación del tiempo es despreciable.

7. Analizando un haz de partículas radiactivas en un laboratorio se observa que cada partícula tiene una vida media

de 2 · 10^{-8}s. Después de este tiempo la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas estaban en reposo, tenían una vida media de 0,75 · 10^{-8} s. ¿Con qué velocidad se mueven las partículas del haz?

Aplicamos la trasformación relativista del tiempo:

$$t = t' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ;\ t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t'\ ;\ t^2 \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = t'^2\ ;$$

$$4 \cdot 10^{16} \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 0{,}75^2 \cdot 10^{16}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{4-0{,}75^2}{4} = 0{,}859\ ;\quad v = \sqrt{0{,}859} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}78 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Contracción de la longitud

8. Cuando una nave espacial está en reposo con respecto a un observador, su longitud es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueve con una velocidad de 2,4 · 10^8 m/s?

Aplicamos la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 50 \text{ m} \cdot \sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 30 \text{ m}$$

siendo $v = 2{,}4 \cdot 10^8$ m/s $= 0{,}8c$

9. ¿Cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud se reduzca a la tercera parte de la que tiene en reposo?

Despejamos la velocidad en la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ;\qquad \frac{1}{3} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{9} = 1-\frac{v^2}{c^2};$$

de donde:

$v = 0{,}94c$

10. Un observador terrestre aprecia que una nave se mueve a una velocidad de 0,312c. ¿En qué proporción se contrae para él la nave?

La nave se contrae en una proporción definida por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1-\left(\frac{0{,}31c}{c}\right)^2} = \sqrt{1-0{,}31^2} = 0{,}95\ ;\qquad \ell = 0{,}95\ \ell'$$

El porcentaje de la contracción viene dado por:

$$\frac{\ell'-\ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}95\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 5\ \%$$

11. En un universo hipotético, la velocidad de la luz es de 20 m/s. ¿En qué porcentaje se reduce la longitud de un objeto que se mueve a 15 m/s respecto de un observador en reposo?

La relación de las longitudes viene dada por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{15}{20}\right)^2} = 0{,}66\ ;\qquad \ell = 0{,}66\,\ell'$$

El porcentaje pedido será:

$$\frac{\ell'-\ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}66\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 34\ \%$$

12. ¿A qué velocidad debería viajar un cohete para que su longitud se contrajera en un 50%?

Aplicamos la ecuación que define la contracción:

$$\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ;\qquad \frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ;\qquad \frac{1}{4} = 1-\frac{v^2}{c^2}$$

$v^2 = 0{,}75c^2$; $\qquad v = 0{,}866 \cdot 3 \cdot 10^8$ m/s $= 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s

13. Calcula la velocidad relativa de una regla sabiendo que para un observador ligado a ella mide un metro y para un observador exterior la regla mide 0,98 m.

De la expresión $\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ se obtiene la velocidad.

En este caso es $\ell = 98$ cm y $\ell' = 100$ cm.

$$100^2 \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 98^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{100^2-98^2} \cdot \frac{c}{100} = 0{,}199c = 60\,000 \text{ km/s}$$

14. Un astronauta que va a gran velocidad en una nave espacial sostiene un metro en la mano. ¿Qué advierte en cuanto a la longitud del metro al girarlo desde la posición paralela a la línea de movimiento a una posición perpendicular?

No observaría ninguna variación, puesto que aprecia que la longitud propia es constante. En cambio, un observador exterior en reposo observaría cómo el metro se hace más estrecho.

15. Una nave se mueve en línea recta pasando cerca de la Tierra con una velocidad 2 · 10^8 m/s. Un observador desde la Tierra ve un haz de rayos láser (luz) según una trayectoria paralela. ¿Cuál es la velocidad del haz láser para el observador de la nave?

La misma que para el observador de la Tierra, 3 · 10^8 m/s, porque la velocidad de la luz es absoluta. Es la misma para todos los observadores cualquiera que sea su velocidad relativa.

16. Cuando un cohete pasa en su órbita por la Tierra con una velocidad v manda un pulso de luz por delante de él. ¿Con qué velocidad se moverá el pulso de luz respecto a un observador que se encuentra sobre la Tierra?

La velocidad de la luz es constante para todos los observadores independientemente del estado de movimiento en que se encuentren.

17. Una nave espacial se desplaza, respecto a un observador situado en la Tierra, con una velocidad v_1 = 0,15c. En un momento dado es adelantada por otra nave que se mueve en la misma dirección y sentido con una velocidad v_2 = 0,2c. ¿Qué velocidad tiene esta nave respecto de la primera?

Aplicamos la transformación relativista de la velocidad:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{0{,}2c - 0{,}15c}{1 - \frac{(0{,}2 \cdot 0{,}15)c^2}{c^2}} = \frac{0{,}05\,c}{1 - 0{,}003} = 0{,}05\,c$$

Masa relativista. Equivalencia entre masa y energía

18. La masa en reposo de un electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Cuál es su masa relativista si su velocidad es $0{,}80c$?

La masa relativista de un cuerpo en movimiento viene dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{0{,}6} = 1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

19. Un electrón se acelera hasta alcanzar una velocidad $0{,}80c$. Compara su energía cinética relativista con el valor dado por la mecánica de Newton.

Datos: masa en reposo del electrón, $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 8 \cdot 10^8$ m/s.

Aplicando el resultado del problema anterior, obtenemos la energía relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}) \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 5{,}49 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

La energía cinética no relativista está determinada por la expresión clásica:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (0{,}8c)^2 = 2{,}62 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

20. ¿Cuál es la masa de un electrón que se mueve con la velocidad de $2{,}0 \cdot 10^8$ m/s? ¿Cuál es su energía total? ¿Cuál es su energía cinética relativista?

La masa del electrón en movimiento vale:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

$$E = m c^2 = 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Energía cinética relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (12{,}2 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31})\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

21. ¿Con qué velocidad se debe mover un cuerpo para que su masa se haga el doble?

Se ha de cumplir que $m = 2m_0$. Despejamos la velocidad de la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}25; \qquad v = 0{,}87\,c$$

22. Halla la masa y la energía total de un electrón que se mueve con una velocidad de $1{,}00 \cdot 10^8$ m/s.

Masa del electrón en movimiento:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

La energía total será:

$$E = m c^2 = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 8{,}69 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

23. ¿A qué velocidad debería moverse un cuerpo para que su masa en movimiento fuera exactamente cinco veces su masa en reposo?

Sustituimos el valor de la masa de la partícula cuando está en movimiento en la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

si:

$$m = 5\,m_0$$

se tiene:

$$5 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

$$25 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 25 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$$25c^2 - 25v^2 = c^2; \qquad 25v^2 = 24c^2; \qquad 5v = 4{,}899\,c$$

$$v = \frac{4{,}899}{5} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2{,}94 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

24. Calcula la energía en reposo de un protón sabiendo que su masa en reposo es $1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg.

La energía en reposo viene determinada por la ecuación $E = m_0 c^2$. Para el caso de un protón, esta energía es:

$$E = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

25. Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1,5 MV y, en consecuencia, adquiere una energía de 1,5 MeV. Calcula su velocidad y su masa.

Datos: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La energía potencial que origina el campo eléctrico se convierte en energía cinética relativista.

$$Vq = \frac{1}{2} m_0 v^2 = (m - m_0)\,c^2$$

siendo m la masa del electrón en movimiento.

Energía recibida por el electrón:

$$Vq = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Por tanto, la variación de la masa será:

$$m - m_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

La masa del electrón en movimiento toma el valor:

$m = m_0 + 2{,}67 \cdot 10^{-30}$ kg $= 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg $+ 2{,}67 \cdot 10^{-30}$ kg $=$

$= 3{,}6 \cdot 10^{-30}$ kg

De la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, despejamos la velocidad.

$$v^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] = c^2 \left[1 - \left(\frac{0{,}91}{3{,}6}\right)^2\right]$$

de donde se deduce que $v = 0{,}97\,c$.

26. Calcula la energía que se debe suministrar a un electrón para que alcance una velocidad 0,9 *c* partiendo del reposo.

La energía cinética relativista viene dada por:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0\right] c^2 =$$

$$= 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}9)^2}} - 1\right) =$$

$= 1{,}06 \cdot 10^{-13}$ J $= 0{,}662$ MeV

27. Un electrón se mueve con una velocidad 0,85*c*. Calcula su energía total y su energía cinética en eV.

La energía total del electrón es:

$$E = m\,c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,c^2 = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{\sqrt{1 - (0{,}85)^2}} =$$

$= 1{,}55 \cdot 10^{-13}$ J $= 0{,}97$ MeV

La energía cinética se obtiene restando la energía en reposo de la energía total:

$E_c = E - m_0 c^2 = 1{,}55 \cdot 10^{-13}$ J $- 0{,}82 \cdot 10^{-13}$ J $=$

$= 0{,}73 \cdot 10^{-13}$ J $= 0{,}46$ MeV

28. La energía total de un protón es tres veces su energía en reposo.

a) **¿Cuál es la energía en reposo del protón?**

b) **¿Cuál es la velocidad del protón?**

c) **¿Cuál es la energía cinética del protón?**

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Energía del protón en reposo:

$E_c = m_0 c^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg $\cdot 10^{16}$ m²/s² $=$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ J $= 938$ MeV

b) Puesto que la energía total es tres veces la energía en reposo, se cumple que:

$m\,c^2 = 3\,m_0\,c^2$

o bien:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 3\,m_0 \;\Rightarrow\; 1 = 9 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

de donde:

$9\,v^2 = 8\,c^2$; $\qquad v = 2{,}8 \cdot 10^8$ m/s

c) La energía del protón será:

$E = (m - m_0)\,c^2 = m\,c^2 - m_0\,c^2 = 3\,m_0\,c^2 - m_0\,c^2 = 2\,m_0\,c^2$

Antes hemos visto que $m_0 c^2 = 938$ MeV. Por tanto, la energía pedida será:

$E_c = 1876$ MeV

29. ¿A qué velocidad debería moverse un objeto para que su masa en movimiento fuera cuatro veces su masa en reposo?

La variación de la masa queda determinada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

siendo:

$m = 4\,m_0$

$$16 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 16 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$16\,c^2 - 16\,v^2 = c^2$; $\qquad 16\,v^2 = 15\,c^2$; $\qquad v = 2{,}9 \cdot 10^8$ m/s

30. Un electrón se acelera partiendo del reposo a través de una diferencia de potencial de 0,30 MV. Calcula m/m_0, la relación entre su masa en movimiento y su masa en reposo.

La energía suministrada al electrón se convierte en energía relativista.

$V q = m\,c^2 - m_0\,c^2$

$$m\,c^2 = q\,V + m_0\,c^2; \qquad m = \frac{q\,V}{c^2} + m_0$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{q\,V}{m_0\,c^2} + 1 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2} + 1 = 1{,}58$$

31. La masa de un electrón en reposo es $m_0 = 9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg. Si el electrón tiene una velocidad de $2{,}10 \cdot 10^8$ m/s, calcula:

a) **La masa del electrón a esa velocidad.**

b) **Su energía total.**

c) **La energía del electrón en reposo.**

d) **La energía cinética del electrón.**

e) **¿A qué diferencia de potencial ha sido sometido el electrón para alcanzar la velocidad indicada?**

a) La masa del electrón, a la velocidad dada, viene determinada directamente por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{2{,}1^2 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}}}} =$$

$$= \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - 0{,}49}} = 1{,}27 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

b) Energía total:

$E = m\,c^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-30}$ kg $\cdot 9 \cdot 10^{16}$ m²/s² $= 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ J *c)* La energía del electrón en reposo viene dada por:

$E_0 = m_0c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg $\cdot 9 \cdot 10^{16}$ m^2/s$^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ J

d) $E - E_0 = 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ J $- 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ J $= 3{,}3 \cdot 10^{-14}$ J

e) $qV = \frac{1}{2} m_0 v^2$,

de donde:

$$V = \frac{m_0 v^2}{2q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 2{,}1^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}25 \cdot 10^5\ \text{V}$$

32. Un electrón tiene una energía en reposo de 0, 51 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad de 0,8c, se pide determinar:

***a)* Su masa natural.**

***b)* Su cantidad de movimiento.**

***c)* Su energía total.**

Datos: carga del electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) La masa en reposo la obtenemos a partir de la expresión de la energía en reposo:

$$E_0 = m_o c^2\ ;\ m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{0{,}511 \cdot 10^6\ eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J/eV}{9 \cdot 10^{16}} =$$

$= 9{,}08 \cdot 10^{-31}$ kg

Para hallar la masa de la partícula en movimiento aplicamos la transformación relativista:

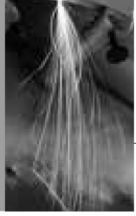
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0{,}64}} =$$

$= 1{,}67 \cdot 9{,}08 \cdot 10^{-13}$ J $= 1{,}51 \cdot 10^{-30}$ kg

b) La cantidad de movimiento viene dada por P = m v

$= 1{,}51 \cdot 10^{-30} \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 3{,}62 \cdot 10^{-22}$ kg $\cdot$ m/s

c) Energía total $E = m\,c^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-30} \cdot 9 \cdot 10^{16} =$
$= 1{,}36 \cdot 10^{-13}\ J = 8{,}3 MeV$



Actividades

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Se sabe que la mayor sensibilidad del ojo humano corresponde a la luz que tiene una longitud de onda de 5,50 · 10^{-7} m ¿Cuál es la energía de los fotones que tienen dicha longitud de onda, en eV?

b) ¿Cuál es la energía de un fotón de luz roja de 720 nm de longitud de onda?

a) $E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{j s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ m\,s^{-1}}{5{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$
$3{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}26\ eV$

b) $E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{j s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ m\,s^{-1}}{5{,}50 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$
$= 3{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2{,}26\ eV$

2. La estrella Sirio de la constelación Can Mayor tiene un color blanco azulado, mientras que Antares de la constelación de Escorpión presenta un color amarillo rojizo. ¿Cuál de las dos tiene una mayor temperatura superficial?

De acuerdo con la Ley de Wien, tiene mayor temperatura la estrella que emite una radiación de menor longitud de onda. En este caso, la estrella Sirio, ya que la luz azul tiene una frecuencia mayor que la luz roja.

3. ¿Qué fotón es más energético, el de luz verde o el de luz ultravioleta?

La energía del fotón de luz ultravioleta es mayor que la del fotón de luz verde, ya que la frecuencia de la luz ultravioleta es mayor que la de la luz verde: $E = hf$.

4. ¿Cuál es la temperatura aproximada de la superficie de una estrella que emite luz azul de 4600 Å de longitud de onda en el máximo de intensidad? Enuncia la ley que te permite resolver el problema.

Al aplicar la Ley de Wien, resulta:

$\lambda_{máx}\, T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m K}$

$T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m K}}{4{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 6\,300\ \text{K}$

5. Un foco de luz monocromática emite ondas electromagnéticas de 620 nm de longitud de onda.

a) ¿Cuál es la energía de cada fotón?

b) ¿Qué potencia tiene el foco si emite 10^{20} fotones por segundo?

a) La energía de cada fotón se obtiene a partir de la hipótesis de Planck:

$$E = hf = h\,\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

b) La potencia del foco se calcula considerando la energía emitida por el foco en un segundo:

$P = 10^{20}$ fotones/s · $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J/fotón = 32 J s^{-1} = 32 W

6. ¿Qué entiendes por cuerpo negro? ¿Existen en la Naturaleza? Pon algún ejemplo de cuerpo negro.

Un cuerpo negro es aquel que es capaz de absorber todas las radiaciones que llegan a él. No se conoce ningún cuerpo que se comporte rigurosamente como negro, pero se puede considerar como tal cualquier material resistente al calor que contenga una cavidad, con paredes rugosas y muy absorbentes, comunicada con el exterior por un pequeño orificio.

7. Un metal que se encuentra a elevada temperatura emite una radiación cuyo máximo corresponde a una longitud de onda de 680 nm. Si la potencia emitida por el metal es 0,040 W, ¿cuántos fotones emite en 1 minuto?

La energía de cada fotón es: $E = hf = \frac{hc}{\lambda} =$

$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ j\,s \cdot 3{,}0 \cdot 10^{8}\ m\,s^{-1}}{6{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 2{,}9 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

Número de fotones: $N = \frac{P\,t}{E} = \frac{0{,}040\ j\,s^{-1} \cdot 6{,}0\,s}{2{,}9 \cdot 10^{-19}\ J} =$

$= 8{,}3 \cdot 10^{18}$ fotones

8. Un haz de luz ultravioleta tiene una frecuencia de 7,5 · 10^{15} Hz.

a) ¿Cuál es su longitud de onda?

b) ¿Qué energía le corresponde a cada fotón, en eV?

a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{7{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}} = 4 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$

b) $E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} = 5 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$

$E = \frac{5 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 31\ \text{eV}$

9. Se ilumina un metal con luz correspondiente a la región del amarillo, observando que se produce efecto fotoeléctrico. Explica si se modifica o no la energía cinética máxima de los electrones emitidos:

a) Si iluminando el metal con la luz amarilla indicada se duplica la intensidad de la luz.

b) Si se ilumina el metal con luz correspondiente a la región del ultravioleta.

La energía de un fotón ($E = h\,f$) se invierte en arrancar un electrón (W_e) y en suministrarle energía cinética.

a) Si se duplica la intensidad de la luz se duplicará el número de fotones, no la energía de cada fotón, por tanto, se arrancarán más electrones, sin variar su energía cinética.

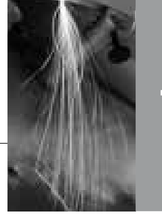
b) La luz ultravioleta es de mayor frecuencia que la amarilla, por lo que sus fotones tienen mayor energía. Como el trabajo de extracción es constante, los electrones emitidos tendrán mayor energía cinética.

10. Cuando una luz monocromática de 300 nm de longitud de onda incide sobre una muestra de litio, los electrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 1,65 eV. Calcula:

a) La energía del fotón incidente.

b) La función de trabajo del litio.

c) La energía cinética máxima de los electrones emitidos, cuando la longitud de onda de los fotones es de 400 nm.



d) **La longitud de onda máxima de la radiación electromagnética para producir el efecto fotoeléctrico en el litio.**

Energía del fotón = Trabajo de extracción + Energía cinética: $h\,f = W_e + E_c$

a) $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, j\, s \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1}}{300 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} =$
$= 6{,}63 \cdot 10^{-19}$ J

b) $W_e = E - E_c = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 1{,}65\ \text{eV} \cdot (1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}) =$
$= 3{,}99 \cdot 10^{-19}$ J

c) $E_c = E - W_e = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, j\, s \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} -$
$- 3{,}99 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 9{,}80 \cdot 10^{-20}$ J

d) $E_c = 0; \quad E - W_e = 0\ ; \quad W_e = hf = \dfrac{hc}{\lambda}\ ; \ \lambda = \dfrac{hc}{W_e}$

$\lambda = \dfrac{hc}{W_e} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, j\, s \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1}}{3{,}99 \cdot 10^{-9}\ J} =$
$= 4{,}98 \cdot 10^{-7}\ \text{J} = 498$ nm

11. La longitud de onda umbral de la plata para que se produzca efecto fotoeléctrico es de 262 nm.

a) **Hallar la función de trabajo de la plata.**

b) **Hallar la energía cinética máxima de los electrones si la longitud de onda de la luz incidente es de 175 nm.**

a) $W_e = hf_0 = \dfrac{hc}{\lambda_0} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, j\, s \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1}}{262 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} =$
$= 7{,}59 \cdot 10^{-19}$ J

b) $E_c = E - W_e = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, j\, s \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\, m\, s^{-1}}{175 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} -$
$- 7{,}59 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}81 \cdot 10^{-19}$ J

12. ¿Cuáles son los valores de n_1 y n_2 para la tercera raya de la serie de Lyman?

Para la serie de Lyman $n_1 = 1$. Para la tercera raya $n_2 = 4$.

13. Un electrón salta entre dos niveles cuya diferencia de energía es de $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ J. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación?

Al saltar de un nivel de energía externo a otro de menor energía, emite la diferencia de energía existente entre ambos niveles, con una frecuencia dada por la ecuación:

$$E_2 - E_1 = hf; \qquad f = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-15}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 2{,}26 \cdot 10^{18}\ \text{s}^{-1}$$

14. Dos partículas no relativistas tienen asociada la misma longitud de onda de De Broglie. Si la masa de una de ellas es el doble que la masa de la otra, determina:

a) **La relación entre sus momentos lineales.**

b) **La relación entre sus velocidades.**

a) La longitud de onda de De Broglie es $\lambda = h / p$. Como la longitud de onda es la misma para las dos partículas y h es la constante de Planck, los momentos lineales de las partículas (p) también son iguales.

b) Como el momento lineal de una partícula es el producto de su masa por su velocidad y los momentos lineales son iguales, el producto $m\,v$ es igual en ambas partículas. Por tanto, si la masa de una de ellas es el doble, su velocidad debe ser la mitad que la velocidad de la otra partícula.

15. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie asociada a un haz de neutrones de 0,05 eV de energía?

Datos: masa del neutrón = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

$E_c = 0{,}05\ \text{eV} = 0{,}05\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 8 \cdot 10^{-21}$ J

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 8 \cdot 10^{-21}\ \text{J}}} =$$
$= 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 1{,}3$ Å

16. Calcula la longitud de onda asociada a las siguientes partículas:

a) **Un neutrón cuya velocidad es de $1{,}01 \cdot 10^{5}$ m s^{-1}.**

b) **Una pelota de tenis de 50,0 g de masa que se mueve con una velocidad de 250 m s^{-1}.**

a) $\lambda = \dfrac{h}{m_n v_n} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{27}\ kg \cdot 10^{5}\ ms^{-1}} = 3{,}97 \cdot 10^{-12}$ m

b) $\lambda = \dfrac{h}{m_t v_t} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J\ s}{50{,}0 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 250\ ms^{-1}} = 5{,}30 \cdot 10^{-35}$ m

17. Determina la longitud de onda asociada con los electrones que han sido acelerados mediante una diferencia de potencial de 1000 V.

La longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mVe}} =$$
$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^{3}\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}} =$$
$= 3{,}9 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 0{,}39$ Å

18. Conocemos la posición de un neutrón y una piedra de 0,1 kg con una aproximación de 1 Å.

a) **¿Cuál es para cada uno la imprecisión en la medida de su momento lineal?**

b) **¿Cuál es la imprecisión en el conocimiento de su velocidad? ¿Qué conclusión puedes deducir de los resultados obtenidos?**

Como la incertidumbre en el conocimiento de la posición es la misma para el neutrón que para la piedra, la imprecisión en la medida de su momento lineal también será la misma:

$$\Delta p \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} \geq 1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}$$

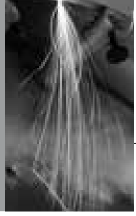
Al ser la masa muy diferente, la indeterminación en la velocidad será muy distinta.

Para el neutrón:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} \geq 628\ \text{m s}^{-1}$$

Para la piedra:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}}{0{,}1\ \text{kg}} \geq 1{,}05 \cdot 10^{-23}\ \text{m s}^{-1}$$



El Principio de Indeterminación de Heisenberg solo es significativo para dimensiones tan pequeñas como las que presentan las partículas elementales. En Mecánica clásica carece de interés, pues las magnitudes involucradas son muy grandes comparadas con el valor de la constante *h*.

19. Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué se abandona el concepto de órbita electrónica en la Física Cuántica?

b) ¿Por qué el Principio de Heisenberg no es aplicable en la Física clásica?

c) ¿Crees que son las limitaciones técnicas de los instrumentos de medida las responsables del Principio de Incertidumbre de Heisenberg?

d) ¿Por qué no podemos observar un electrón sin alterarlo?

a) Por la imposibilidad de determinar la posición y la velocidad del electrón, con precisión, en un instante dado.

b) Porque las magnitudes involucradas son muy grandes comparadas con el valor de la constante de Planck.

c) No, se debe al comportamiento de la materia.

d) Porque todos los objetos están regidos por el Principio de Incertidumbre.

20. ¿Qué diferencias fundamentales encuentras entre el concepto de órbita y el de orbital?

El concepto de órbita pertenece a la Física clásica, según la cual todas las magnitudes relativas a un sistema pueden, en principio, determinarse simultáneamente con cualquier grado de precisión.

Esto no ocurre en la Física Cuántica. Si no es posible determinar la posición y la velocidad de un electrón en un instante dado, no es posible definir el concepto de trayectoria y no tiene sentido hablar de órbitas electrónicas en los átomos.

21. Indica el valor de los números cuánticos *n*, y , en el orbital atómico 3*d*.

$n = 3$, $\ell = 2$, $m_\ell = 2, 1, 0, -1, -2$.

22. Describe las principales características de la radiación láser comparándola con la radiación térmica.

La radiación láser es de una sola frecuencia, estando todas las ondas con diferencia de fase constante, es luz coherente, enormemente intensa. La luz ordinaria no es coherente, puesto que las ondas que la forman son de diversas frecuencias y no están en fase.

23. Haz una relación de las aplicaciones más importantes del láser.

Véase libro de texto, Apartado 12.8A.

24. ¿Cuáles son las características más importantes de un material semiconductor?

Son materiales que poseen una conductividad eléctrica intermedia entre conductores y aislantes. Su conductividad aumenta con la temperatura y puede modificarse si el material se somete a una radiación electromagnética de suficiente energía.

El elemento semiconductor más usado es el silicio, también se usa el germanio, y compuestos como GaAs, CdTe, CdS, etc. Existen semiconductores tipo *N* y tipo *P*.

25. ¿Cómo se obtienen los semiconductores tipo *P* y tipo *N*?

En los semiconductores tipo *N*, el elemento semiconductor (generalmente silicio) se dopa con elementos que tengan cinco electrones en su última capa: arsénico, fósforo o antimonio. Los semiconductores tipo *P* están dopados con aluminio, galio o indio, con sólo tres electrones en su última capa.

26. ¿Qué ventajas presentan los circuitos integrados respecto a los circuitos convencionales?

Son de bajo coste, pequeño tamaño, alta fiabilidad y mayor rendimiento.

27. Explica la relación que existe entre un microprocesador y una computadora.

En la computadora, un microprocesador se conecta a un dispositivo de memoria y se provee de dispositivos de entrada y salida.

28. ¿Qué entiendes por nanotecnologías? ¿Qué avances pueden producirse en nanomedicina?

Se denominan nanotecnologías a las ciencias y técnicas dedicadas al control y manipulación de la materia a una escala muy pequeña, a nivel de átomos y moléculas.

Se esperan avances médicos en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades infecciosas y metabólicas, en el tratamiento de distintos tipos de cáncer, en la corrección de patologías del sistema cardiovascular y neurológico, en microbiología, ingeniería genética, inmunología, etc.

29. Un microscopio electrónico utiliza electrones acelerados con una diferencia de potencial de 7,5 · 10⁴ V. ¿Cuál es el poder de resolución del microscopio suponiendo que sea igual a la longitud de onda de los electrones?

Aplicamos la ecuación de De Broglie: $= \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2\, m\, V_e}}$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{4}\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C}} = 4{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Cómo definirías el efecto túnel?

Una partícula atraviesa una barrera de energía superior a la propia energía de la partícula.

2. ¿Existe alguna relación entre el efecto túnel y el Principio de incertidumbre?

Sí. La energía de una partícula puede fluctuar ampliamente siempre que estas fluctuaciones se produzcan en un intervalo de tiempo pequeño.

3. ¿Por qué las predicciones de la Mecánica cuántica no son aplicables en la vida cotidiana?

Por el pequeño valor de la constante de Planck ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s).

4. Selecciona la información más relevante del texto y describe tus conclusiones con un lenguaje científico.

A realizar por cada alumno; por tanto, con conclusiones no uniformes.

Problemas propuestos

Radiación térmica. Teoría de Planck

1. ¿Qué hechos fundamentales obligaron a revisar las leyes de la Física clásica y propiciaron el nacimiento de la Física Cuántica?

La radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y el carácter discontinuo de los espectros atómicos.

2. ¿Qué cuantos de radiación son más energéticos, los infrarrojos o los visibles?

Los visibles, por tener una frecuencia mayor:

$E = hf$.

3. La temperatura aproximada de la superficie de una estrella es de 4 500 K, ¿qué color predominará cuando veamos la luz que emite?

Aplicando la Ley de Wien se obtiene:

$\lambda_{máx}\, T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ m K

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{mK}}{4\,500\ \text{K}} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 640\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda corresponde a una luz roja; en consecuencia, cuando veamos la luz que emite la estrella predominará el color rojo.

4. Una fuente de luz monocromática emite una radiación electromagnética con una longitud de onda de $4{,}8 \cdot 10^{-7}$ m y una potencia de 20 W. ¿Cuál es la energía de cada fotón? ¿Cuántos fotones por segundo emite esta fuente?

De acuerdo con la Hipótesis de Planck, la energía de un fotón es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{4{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Como la fuente emite luz monocromática con una potencia de 20 J/s, el número de fotones emitidos por segundo es:

$$\frac{20\ \text{J s}^{-1}}{4{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 4{,}8 \cdot 10^{19}\ \text{fotones}$$

Efecto fotoeléctrico. Teoría de Einstein

5. Una radiación monocromática de $\lambda = 500$ nm incide sobre una fotocélula de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2,0 eV.

Calcula:

***a)* La frecuencia umbral y la longitud de onda umbral de la fotocélula.**

***b)* La energía cinética de los electrones emitidos.**

a) La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción o función trabajo:

$W_e = hf_0$

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

b) De acuerdo con la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se cumple:

$$E_c = hf - W_e = \frac{hc}{\lambda} - W_e =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} =$$

$$= 7{,}8 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 0{,}49\ \text{eV}$$

6. Un haz de luz monocromática de $6{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz ilumina una superficie metálica que emite electrones con una energía cinética de $1{,}3 \cdot 10^{-19}$ J. ¿Cuál es el trabajo de extracción del metal? ¿Cuál es su frecuencia umbral?

La energía del fotón incidente es:

$E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 4{,}3 \cdot 10^{-19}$ J

Por tanto, el trabajo de extracción del metal es:

$W_e = E - E_c = 4{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 1{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3 \cdot 10^{-19}$ J

La frecuencia umbral es:

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

7. Los fotoelectrones emitidos por una superficie metálica tienen una energía cinética máxima de 2,03 eV para una radiación incidente de 300 nm de longitud de onda. Halla la función de trabajo de la superficie y la longitud de onda umbral.

La función trabajo o trabajo de extracción se obtiene mediante la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$hf = E_c + W_e$

$E_c = 2{,}03\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}25 \cdot 10^{-19}$ J

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} - E_c =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot \frac{3.\ 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{3 \cdot 10^{7}\ \text{m}} - 3{,}25 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción:

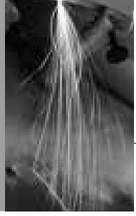
$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0}; \qquad \lambda_0 = \frac{hc}{W_e} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} =$$

$$= 5{,}88 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 588\ \text{nm}$$

8. Supongamos que se ilumina el mismo metal con dos focos de la misma luz monocromática de 100 y 400 W, respectivamente. ¿Cuál de los dos producirá mayor número de fotoelectrones? ¿Qué fotoelectrones abandonarán el metal con más energía?

El foco de mayor potencia produce más fotoelectrones.

La energía con que los fotoelectrones abandonan el metal es la misma en ambos casos: se ilumina el mismo metal (igual trabajo de extracción) con la misma luz monocromática (igual frecuencia).



9. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre la superficie de un metal, ¿se duplica la energía cinética máxima de los electrones extraídos?

La energía del fotón incidente es igual al trabajo de extracción más la energía cinética del electrón; por consiguiente, si se duplica la frecuencia no se duplica la energía cinética de los electrones extraídos, ya que el trabajo de extracción no varía:

$$E = W_e + E_c; \qquad hf = hf_0 + E_c$$

La energía cinética será, en cualquier caso, más del doble de la inicial.

10. Si el trabajo de extracción de una superficie de potasio es igual a 2,2 eV, ¿se podría utilizar el potasio en células fotoeléctricas para funcionar con luz visible? En caso afirmativo, ¿cuánto vale la velocidad máxima de salida de los fotoelectrones?

Dato: frecuencia máxima de la luz visible, 7,5 · 10^14 Hz.

La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción:

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{2{,}2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 5{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Esta frecuencia corresponde a una luz verde, por tanto, el potasio sí se podría utilizar en células fotoeléctricas que funcionasen con luz visible.

La velocidad máxima de salida de los fotoelectrones se obtiene utilizando luz visible de máxima frecuencia, es decir, luz violeta. La energía cinética máxima de los fotoelectrones es:

$$E_c = hf - W_e =$$
$$= (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}) - (2{,}2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}) =$$
$$= 1{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5{,}7 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$$

11. La longitud de onda umbral de un cierto metal es de 275 nm. Calcula:

a) **La función de trabajo o energía de extracción de los electrones, en eV, de ese metal.**

b) **La velocidad máxima de los fotoelectrones producidos si se emplea una radiación de 220 nm de longitud de onda.**

a) La energía de extracción de los electrones es la energía del fotón de longitud de onda umbral:

$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{2{,}75 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$$= 7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 4{,}52\ \text{eV}$$

b) La energía cinética de los electrones se calcula mediante la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_c = \frac{hc}{\lambda} - W_e =$$
$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{2{,}20 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - 7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J} =$$
$$= 1{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La velocidad máxima de los fotoelectrones se obtiene a partir de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 6{,}3 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$$

12. Un material iluminado con luz de frecuencia 7,5 · 10^14 Hz emite fotoelectrones cuyo potencial de frenado es igual a 0,70 V. Luego se cambia la frecuencia de la luz y el nuevo potencial de frenado es 1,45 V. ¿Cuál es la frecuencia de la segunda luz?

El potencial de frenado (V_0) y la energía cinética se relacionan según la ecuación $E_c = eV_0$. Por tanto, la ecuación del efecto fotoeléctrico para ambas frecuencias es:

$$hf_1 = eV_{01} + W_e; \qquad hf_2 = eV_{02} + W_e$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$hf_2 - hf_1 = e\,(V_{02} - V_{01}); \qquad f_2 = \frac{e\,(V_{02} - V_{01})}{h} + f_1$$

$$f_2 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot (1{,}45\ \text{V} - 0{,}79\ \text{V})}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} + 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} =$$

$$= 9{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

13. Si el trabajo de extracción de la superficie de un determinado material es de 2,07 eV:

a) **¿En qué rango de longitudes de onda del espectro visible puede utilizarse este material en células fotoeléctricas? Las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 nm y 775 nm.**

b) **Calcula la velocidad de extracción de los electrones emitidos para una longitud de onda de 400 nm.**

a) A partir de la frecuencia umbral (frecuencia mínima necesaria para que se produzca el efecto fotoeléctrico), se obtiene la longitud de onda máxima que produce este efecto:

$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{f\,\lambda_{\text{máx}}}$$

$$2{,}07\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{\lambda_{\text{máx}}}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 600\ \text{nm}$$

Como las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 y 775 nm, el efecto fotoeléctrico se producirá con luces visibles cuya longitud de onda esté comprendida entre 380 y 600 nm.

b) A partir de la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se obtiene:

$$E = W_e + E_c; \qquad \frac{hc}{\lambda} = W_e + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} =$$

$$= 2{,}07 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot v^2$$

$$v = 6{,}04 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$$

Espectros atómicos. El átomo de Bohr

14. ¿Por qué el espectro del hidrógeno tiene muchas líneas si el átomo de hidrógeno tiene un solo electrón?

El electrón puede saltar entre distintos niveles de energía y en una muestra de hidrógeno existen numerosísimos átomos en diversos estados de energía.

15. Calcula la longitud de onda de la tercera línea de la serie de Lyman en el espectro del hidrógeno.

Para la tercera línea de la serie de Lyman, $n_1 = 1$ y $n_2 = 4$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 1{,}09677 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) =$$

$$= 1{,}03 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}; \qquad \lambda = 9{,}71 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$$

16. La longitud de onda de una de las rayas amarillas del espectro visible del sodio es de 589 nm. Calcula la diferencia de energía entre los niveles electrónicos del átomo de sodio correspondientes a esta transición.

$$E_2 - E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{5{,}89 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

17. ¿Cuál es la mínima cantidad de energía que debe absorber un átomo de hidrógeno para pasar de su estado fundamental al primer estado excitado? Si la energía se suministra en forma de radiación electromagnética, ¿cuál es la longitud de onda de la radiación necesaria? ¿Qué tipo de onda electromagnética es?

En el estado fundamental $n_1 = 1$ y en el primer estado excitado $n_2 = 2$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 1{,}09677 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) =$$

$$= 8{,}23 \cdot 10^6\ \mathrm{m^{-1}}; \qquad \lambda = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 122\ \mathrm{m}$$

Esta longitud de onda corresponde a una radiación ultravioleta.

La energía necesaria es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 1{,}64 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

Dualidad onda-corpúsculo. Hipótesis de De Broglie

18. Un haz monocromático de luz roja posee una longitud de onda de 650 nm.

Calcula:

a) **La frecuencia.**

b) **La energía de un fotón.**

c) **La cantidad de movimiento de ese fotón.**

a) $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3.\ 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 4{,}62 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}$

b) $E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \cdot 4{,}62 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}} = 3{,}05 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$

c) $\lambda = \dfrac{h}{p}; \qquad p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 1{,}02 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

19. Calcula la longitud de onda asociada a un electrón que posee una energía cinética de 150 eV. Dato: masa del electrón = 9,1 · 10⁻³¹ kg.

El momento lineal del electrón a partir de su energía cinética es: $mv = \sqrt{2\,m\,E_c}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\,m\,E_c}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Js}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 150\ \cancel{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J\ \cancel{eV^{-1}}}} =$$

$$= 1{,}0 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Esta longitud de onda corresponde a la zona de rayos X.

20. En relación con las longitudes de onda de De Broglie asociadas a un electrón y a un protón, razona cuál es menor si tienen:

a) **El mismo módulo de la velocidad.**

b) **La misma energía cinética. No se tienen en cuenta los posibles efectos relativistas.**

a) Las longitudes de onda de De Broglie asociadas a un electrón y un protón son:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e V_e}; \qquad \lambda_p = \frac{h}{m_p V_p}$$

Si las velocidades del electrón y del protón son iguales, se obtiene:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{m_p}{m_e}$$

y como:

$$m_p > m_e \ \Rightarrow\ \lambda_e > \lambda_p$$

b) Las longitudes de onda de De Broglie son:

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2\,m_e E_c}}; \qquad \lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2\,m_p E_c}}$$

Si tienen la misma energía cinética, al dividir ambas ecuaciones se obtiene:

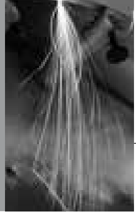
$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{m_e}};$$

y como:

$$\sqrt{m_p} > \sqrt{m_e} \ \Rightarrow\ \lambda_e > \lambda_p$$

21. Las partículas α son núcleos de helio, de masa cuatro veces la del protón, aproximadamente. Si una partícula α y un protón, que poseen la misma energía cinética, se mueven a velocidades mucho menores que la luz, ¿qué relación existe entre las longitudes de onda de De Broglie correspondientes a las dos partículas?

Como ambas partículas poseen la misma energía cinética, se cumple:



$$\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}; \qquad m_\alpha = 4\,m_p; \qquad m_p v_p^2 = 4\,m_p v_\alpha^2; \qquad v_p = 2\,v_\alpha$$

La relación entre las longitudes de onda de De Broglie es:

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_p}; \qquad \lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha}; \qquad \frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_p v_p} = \frac{4\,m_p v_\alpha}{m_p 2\,v_\alpha} = 2$$

$$\lambda_p = 2\,\lambda_\alpha$$

La longitud de onda asociada al protón es el doble que la asociada a la partícula alfa.

22. Un protón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 V. Determina:

a) **La energía que adquiere el protón expresada en eV y su velocidad en m/s.**

b) **La longitud de onda de De Broglie asociada al protón con la velocidad anterior.**

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; $m_P = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La energía que adquiere el protón coincide con el trabajo que realiza el campo eléctrico:

$$E_c = q\,V = 1 \text{ e} \cdot 10 \text{ V} = 10 \text{ eV} =$$

$$= 10 \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J eV}^{-1} = 1{,}6 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

b) La longitud de onda de De Broglie es la siguiente:

$$\lambda = \frac{h}{m\,v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{1{,}67 \cdot 10^{27} \text{ kg } 4{,}38 \cdot 10^{5} \text{ m s}^{-1}} =$$

$$= 9{,}06 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

Principio de incertidumbre de Heisenberg

23. Las velocidades de un electrón y de una bala de 30 g se miden con una indeterminación en ambos casos de 10^{-3} m s^{-1}. Según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, ¿cuáles son las indeterminaciones en el conocimiento de su posición?

Dato: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

De acuerdo con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, se cumple:

Para el electrón:

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta p} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}28 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}} \geq 0{,}12 \text{ m}$$

Para la bala:

$$\Delta x \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}} \geq 3{,}5 \cdot 10^{-30} \text{ m}$$

24. Un grano de arena de masa 1 mg se mueve con una velocidad de 20 m/s. Si la indeterminación en su posición es de 10^{-7} m, ¿cuál es la mínima indeterminación en su velocidad? Analiza el resultado.

De acuerdo con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, se cumple:

$$\Delta v \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x \cdot m} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}28 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 10^{-6} \text{ kg}} \geq$$

$$\geq 1{,}1 \cdot 10^{-21} \text{ m s}^{-1}$$

Aunque la indeterminación en la posición es muy pequeña a escala macroscópica, la indeterminación en la velocidad es tan pequeña que resulta completamente despreciable.

Función de onda y probabilidad

25. ¿Por qué el concepto de órbita electrónica carece de sentido en la Mecánica Cuántica?

Si no es posible determinar la posición y la velocidad de un electrón en un instante determinado, no es posible mantener el concepto de trayectoria y no tiene sentido hablar de órbitas electrónicas en los átomos.

26. ¿Qué relación existe entre la nube de probabilidades y la densidad electrónica?

Cuanto mayor es la probabilidad de encontrar el electrón, mayor es la densidad electrónica.

27. Indica el valor de los números cuánticos *n*, y , en el orbital atómico 4*d*.

$n = 4$, $\ell = 3$, $m_\ell = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$

28. ¿Qué diferencias existen entre la emisión espontánea y la emisión estimulada de radiació?

La emisión espontánea de radiación se produce cuando los átomos excitados caen a un nivel de energía más bajo y emiten fotones espontáneamente. Por ser un proceso aleatorio, los fotones emitidos no son coherentes, es decir, no están en fase los unos con los otros.

En el proceso de emisión estimulada de radiación, la emisión se produce cuando hay más átomos en el nivel superior de energía que en el inferior (inversión de población). Esto se consigue, generalmente, mediante una luz de frecuencia adecuada. En este caso, se produce un haz intenso de luz de una sola frecuencia, estando todas las ondas en fase entre sí (luz coherente).

29. Un láser de longitud de onda $\lambda = 650$ nm tiene una potencia de 12 mW y un diámetro de haz de 0,82 mm. Calcula:

a) **La intensidad del haz.**

b) **El número de fotones por segundo que viajan con el haz.**

a) La intensidad del haz es:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{3{,}14 \cdot (4{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2} = 2{,}3 \cdot 10^{4} \text{ W m}^{-2}$$

b) La energía de un fotón del láser es:

$$E = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^{8} \text{ m s}^{-1}}{6{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 3{,}1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La intensidad del haz considerando los fotones es la siguiente:

$$I = \frac{2{,}3 \cdot 10 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}}{3{,}1 \cdot 10^{-19} \text{ J/fotón}} = 7{,}4 \cdot 10^{22} \text{ fotones s}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

El número de fotones por segundo que viajan con el haz es:

N.º de fotones = $IA = I\pi r^2 =$

$7{,}4 \cdot 10^{22}$ fotones $s^{-1} m^{-2} \cdot 3{,}14\ (4{,}1 \cdot 10^{-4}\ m)^2 =$

$= 3{,}9 \cdot 10^{16}$ fotones/s

30. Un microscopio electrónico utiliza electrones de 50 keV. ¿Cuál es el poder de resolución del microscopio suponiendo que sea igual a la longitud de onda de los electrones?

La longitud de onda asociada a los electrones es:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mVe}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}} =$$

$= 5{,}5 \cdot 10^{-12}$ m

31. Un láser de He-Ne emite fotones con energías de $3{,}20 \cdot 10^{-19}$ J. ¿Cuál es el color de la luz de este láser?

La frecuencia de la luz del láser es:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{3{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}83 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Esta frecuencia corresponde a una luz roja.

32. Una fuente luminosa cuya potencia es de 20 W emite luz de $1{,}0 \cdot 10^{15}$ Hz de frecuencia en todas direcciones. Si una célula fotoeléctrica está situada a 2,0 m de distancia del foco luminoso, ¿cuántos fotones inciden por segundo en el cátodo de la fotocélula, si este tiene una superficie de 10 cm²?

La potencia que incide sobre los 10 cm² del cátodo, situado a 2 m de distancia, es:

$$P = 20\ \text{J s}^{-1} \cdot \frac{10^{-3}\ \text{m}^2}{4\pi \cdot 2^2\ \text{m}^2} = 3{,}98 \cdot 10^{-4}\ \text{J/s}$$

La energía de un fotón es:

$$E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

El número de fotones que inciden por segundo será:

$$\frac{3{,}98 \cdot 10^{-4}\ \text{J s}^{-1}}{6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 6{,}0 \cdot 10^{14}\ \text{fotones/s}$$

33. Responde a las siguientes preguntas:

***a)* ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 400 veces mayor que la de un neutrón de 6,0 eV de energía cinética?**

***b)* ¿Se puede considerar que a esa velocidad el electrón es no relativista?**

a) Las longitudes de onda asociadas al electrón y al neutrón son:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e}; \qquad \lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2E_{cn}m_n}}$$

Como:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} = 400\frac{h}{\sqrt{2E_{cn}m_n}}; \qquad v_e = \frac{\sqrt{2E_{cn}m_n}}{400\,m_e}$$

$$v_e = \frac{\sqrt{2 \cdot 6\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}{400 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} =$$

$= 1{,}6 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$

b) La velocidad del electrón puede considerarse no relativista, puesto que es mucho menor que la velocidad de la luz.

34. Al iluminar la superficie de un metal con luz de longitud de onda 280 nm, la emisión de fotoelectrones cesa para un potencial de frenado de 1,3 V.

***a)* Determina la función trabajo del metal y la frecuencia umbral de emisión fotoeléctrica.**

***b)* Cuando la superficie del metal se ha oxidado, el potencial de frenado para la misma luz incidente es de 0,7 V. Razona cómo cambian, debido a la oxidación del metal: i) la energía cinética máxima de los fotoelectrones, ii) la frecuencia umbral de emisión; iii) la función trabajo.**

a) Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$E = W_e - E_c =$

$= W_e \dfrac{hc}{\lambda} - eV_0 =$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{280 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}3\ \text{J C}^{-1};$$

$W_e = 5{,}02 \cdot 10^{-19}$ J

b) De acuerdo con la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, si al oxidarse el metal disminuye el potencial de frenado se debe a que la energía cinética máxima de los fotoelectrones ha disminuido y, por tanto, ha aumentado el trabajo de extracción o función trabajo. En consecuencia, también habrá aumentado la frecuencia umbral.

35. La frecuencia umbral de un metal es de $4{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz. Calcula el trabajo de extracción, la energía cinética de los electrones emitidos si se ilumina el metal con luz de 170 nm de longitud de onda y la longitud de onda asociada a los electrones emitidos.

$W_e = hf_0 = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 3{,}0 \cdot 10^{-19}$ J

$$E_c = E - W_e = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{170 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ \text{J} =$$

$= 8{,}70 \cdot 10^{-19}$ J

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 8{,}70 \cdot 10^{-19}\ J}} = 5{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

Actividades

1. *a)* Indica la composición de los siguientes núcleos:

$^{14}_{7}N$, $^{19}_{9}F$, $^{31}_{15}P$, $^{59}_{27}Co$, $^{238}_{92}U$

_b)_ Indica la composición de los núcleos de PU-244 y PU-239.

a) N: 7p y 7n; F: 9p y 10n; P: 15p y 16n; Co: 27p y 32n; U: 92p y 146n

b) Pu: 94p y 150n; 94p y 145n.

2. ¿Cuál es la masa de 1 u expresada en kg? ¿Cuál es su equivalencia en MeV?

En un mol de carbono (12 g) hay 6,02 · 10^{23} átomos (número de Avogadro); 1 u es la doceava parte del la masa atómica del carbono-12. Su valor es:

$$1 \text{ u} = \frac{12 \text{ g mol}^{-1}}{12 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$E = mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931 \text{ Mev}$$

3. Determina la masa atómica del cloro sabiendo que existen dos isótopos $^{35}_{17}Cl$ y $^{37}_{17}Cl$ cuya abundancia relativa es 77,5% y 22,5% respectivamente. ¿Cuál es la composición de los núcleos de ambos isótopos?

0,775 · 35 u + 0,225 · 37 u = 35,45 u

Núcleo de cloro-35: 17 protones y 35 – 17 = 18 neutrones.

Núcleo de cloro-37: 17 protones y 20 neutrones (37–17).

4. ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explica, cualitativamente, la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico.

La energía que se libera al formarse un núcleo a partir de los nucleones que lo constituyen se denomina energía de enlace. Cuanto mayor es la energía de enlace, mayor es la estabilidad del núcleo.

La energía de enlace por nucleón se obtiene se obtiene dividiendo la energía de enlace entre el número de nucleones que contiene. Cuanto mayor sea la energía de enlace por nucleón, más estable es el núcleo. La mayor estabilidad se presenta para números másicos comprendidos entre 40 y 100, aproximadamente. El núcleo más estable es el del hierro-56.

5. Determina el defecto de masa, la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para el núcleo del carbono-12.

El núcleo está formado por 6 protones y 6 neutrones. La masa de estas partículas es la siguiente:

Masa de 6 protones:	6 · 1,0073 u = 6,0438 u
Masa de 6 neutrones:	6 · 1,0087 u = 6,0522 u
Masa total:	12,0960 u
Masa del núcleo de carbono-12:	12,0000 u
Defecto de masa:	0,0960 u

Como 1 u equivale a 931 MeV, la energía de enlace es:

E = 0,0960 u · 931 MeV/u = 89,4 MeV

El núcleo del carbono-12 contiene 12 nucleones; por tanto, la energía de enlace por nucleón es:

$$\frac{E}{A} = \frac{89{,}4 \text{ MeV}}{12 \text{ nucleones}} = 7{,}4 \text{ MeV/nucleón}$$

6. Define las siguientes magnitudes asociadas con los procesos de desintegración radiactiva: actividad, constante de desintegración, periodo de semidesintegración y vida media. Indica sus unidades en el Sistema Internacional.

La actividad o velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva es el número de desintegraciones por unidad de tiempo. Su unidad en el SI es el becquerel (Bq).

La constante de desintegración representa la probabilidad de que un determinado núcleo radiactivo se desintegre. Su unidad en el SI es el s^{-1}.

El periodo de semidesintegración es el tiempo que debe transcurrir para que el número de núcleos presentes en una muestra radiactiva se reduzca a la mitad. Su unidad en el SI es el segundo.

La vida media es el promedio de vida, es decir, el tiempo que por término medio tardará un núcleo en desintegrarse. Su unidad en el SI es el segundo.

7. A partir del $^{214}_{84}P_0$ se han emitido sucesivamente las siguientes partículas: α, β, β, β, α y β, ¿cuál es el núcleo final estable? ¿Qué núcleos se han formado en los pasos intermedios?

Por aplicación de las leyes de Soddy y Fajans, se obtiene:

Número atómico: 84 – (2 · 2) + (4 · 1) = 84

Número másico: 214 – (2 · 4) = 206

Los núcleos formados en los pasos intermedios son: $^{210}_{82}Pb$, $^{210}_{83}Bi$, $^{210}_{84}Po$, $^{210}_{85}At$, $^{206}_{83}Bi$, $^{206}_{84}Po$

8. De los 120 g iniciales de una muestra radiactiva se han desintegrado, en 1 hora, el 10% de los núcleos. Determina:

***a)* La constante de desintegración radiactiva y el periodo de semidesintegración de la muestra.**

***b)* La masa que quedará de la sustancia radiactiva transcurridas 5 horas.**

a) Masa final: 120 g – 0,10 · 120 = 108 g

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ ; } 108 \text{ g} = 120 \text{ g} \cdot e^{-\lambda 3\,600 \, s} \text{ ; } \lambda = 2{,}93 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$T_{1/2} = \frac{L2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{2{,}93 \cdot 10^{-5} \, s^{-1}} = 2{,}37 \cdot 10^4 \text{ s}$$

b) $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$; $m = 120 \text{ g} \cdot e^{-2{,}93 \cdot 10^{-5} s^{-1} \cdot 5 \cdot 3\,600 \, s}$; m = 70,8 g

9. Cuando se encuentra fuera del núcleo atómico, el neutrón es una partícula inestable con una vida media de 885,7 s. Determine:

***a)* El periodo de semidesintegración del neutrón y su constante de desintegración.**

***b)* Una fuente de neutrones emite 10^{10} neutrones por segundo con una velocidad constante de 100 km s^{-1}. ¿Cuántos neutrones por segundo recorren una distancia de 3,7 · 10^5 km sin desintegrarse?**

a) $T_{1/2} = \text{L}2 \cdot \tau = 0{,}6931 \cdot 885{,}7\ \text{s} = 613{,}9\ \text{s}\ ;\ \lambda = \dfrac{1}{\tau} =$

$= \dfrac{1}{885{,}7\ s} = 1{,}129 \cdot 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$

b) Tiempo en recorrer *s*: $3{,}7 \cdot 10^5$ km / 100 km s^{-1} = $3{,}7 \cdot 10^3$ s

$N = N_0 \cdot -e^{\lambda t}\ ;\ N = 10^{10} \cdot e^{-1{,}129 \cdot 10^{-3} \cdot 1 s}\ ;$
$\text{N} = 1{,}53 \cdot 10^8$ neutrones/s

10. Una muestra de radón-222 contiene inicialmente 10^{12} átomos de este isótopo radiactivo, cuya semivida (o periodo de semidesintegración) es de 3,28 días. ¿Cuántos átomos quedan sin desintegrar al cabo de 10 días? Calcula las actividades inicial y final, tras los 10 días, de esta muestra. (Expresa los resultados en Bq).

La constante de desintegración es: $\lambda = \dfrac{L\,2}{T_{1/2}} = \dfrac{L\,2}{3{,}28\ \text{días}} =$
$= 0{,}211\ \text{día}^{-1} = 2{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$

Átomos sin desintegrar: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}\ ;\ N = 10^{12} \cdot e^{-0{,}211\ \text{día}^{-1} \cdot 10\ \text{día}}\ ;$
$1{,}2 \cdot 10^{11}$ áto.

Actividad inicial: $A_0 = \lambda\, N_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot 10^{12}$ átomos =
$= 2{,}44 \cdot 10^6$ Bq

Actividad final: $A = 2{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{11}$ átomos =
$= 2{,}9 \cdot 10^5$ Bq

11. ¿Qué es una serie o familia radiactiva? Cita un ejemplo.

Una serie radiactiva es el conjunto de núcleos que se producen por desintegración de uno inicial (núcleo padre) hasta llegar a uno estable. Ejemplo: familia del uranio-238.

12. Se dispone de 20 g de una muestra radiactiva y transcurridos 2 días se han desintegrado 15 g de la misma. Calcula:

***a)* La constante de desintegración radiactiva de dicha muestra.**

***b)* El tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 90% de la muestra.**

a) $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}\ ;\ 5\ \text{g} = 20\ \text{g} \cdot e^{-\lambda \cdot 2\ \text{día}}\ ;\ \lambda = 0{,}695\ \text{día}^{-1}$

b) Quedan 2 g de muestra: $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$;
$2\ \text{g} = 20\ \text{g} \cdot e^{-0{,}695\ \text{día}^{-1} \cdot t}\ ;\ t = 3{,}31$ días

13. Completa las siguientes reacciones nucleares:

a) $^{27}_{13}\text{Al} + \ldots \rightarrow\ ^{30}_{15}\text{P} +\ ^{1}_{0}\text{n}$

b) $^{9}_{4}\text{Be} +\ ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow\ ^{1}_{0}\text{n} + \ldots$

c) $\ldots +\ ^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\ ^{4}_{2}\text{He}$

d) $^{14}_{7}\text{N} +\ ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow \ldots +\ ^{1}_{1}\text{H}$

a) $^{27}_{13}\text{Al} +\ ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow\ ^{30}_{15}\text{P} +\ ^{1}_{0}\text{n}$

b) $^{9}_{4}\text{Be} +\ ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow\ ^{1}_{0}\text{n} +\ ^{12}_{6}\text{C}$

c) $^{7}_{3}\text{Li} +\ ^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\ ^{4}_{2}\text{He}$

d) $^{14}_{7}\text{N} +\ ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow\ ^{17}_{8}\text{O} +\ ^{1}_{1}\text{H}$

14. Calcula la cantidad de energía que se libera en la siguiente reacción de fisión nuclear: $^{235}_{92}\text{U} +\ ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow\ ^{92}_{36}\text{Kr} +\ ^{141}_{56}\text{Ba} + 3\ ^{1}_{0}\text{n}$.

Defecto de masa: $\Delta m = m_U + m_n - (m_{Kr} + m_{Ba} + 3\ m_n)$

$\Delta m = 235{,}0439\ \text{u} + 1{,}0087\ \text{u} - (91{,}9251\ \text{u} + 140{,}9140 + 3 \cdot 1{,}0087\ \text{u}) = 0{,}1874\ \text{u}$

$E = mc^2 = 0{,}1874\ \text{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u} \cdot (3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1})^2 =$
$= 2{,}80 \cdot 10^{-11}\ \text{J} = 175$ Mev

15. Explica en qué consisten las reacciones de fusión y fisión nucleares. ¿En qué se diferencian? ¿Cuál es el origen de la energía que producen?

Ver epígrafe 13.4 del libro de texto.

16. ¿Qué características presentan los reactores reproductores? ¿Qué inconvenientes puede presentar su utilización?

Producen nuevo material fisionable, incluso en mayor cantidad que el consumido durante su funcionamiento.

El plutonio-239 producido puede utilizarse para fabricar armas nucleares.

17. ¿Qué es la masa crítica? ¿Se puede producir una explosión nuclear, similar a una bomba atómica, en un reactor nuclear?

Se denomina masa crítica a la cantidad mínima de material fisionable necesaria para producir una reacción en cadena.

En un reactor nuclear no se puede producir una explosión similar a una bomba atómica, porque el material fisionable está poco enriquecido en uranio-235.

18. Explica la función que desempeñan los siguientes componentes de un reactor nuclear:

***a)* uranio enriquecido;** ***b)* blindaje;**

***c)* barras de control;** ***d)* moderador;**

***e)* cambiador de calor;** ***f)* agua de refrigeración.**

a) El uranio enriquecido es el material fisionable, el «combustible» del reactor.

b) El blindaje impide la salida al exterior del reactor de las distintas radiaciones.

c) Las barras de control absorben neutrones y regulan la reacción en cadena.

d) El moderador frena los neutrones rápidos producidos en la fisión.

e) El calor producido en el reactor se recoge en el circuito primario que cede al circuito secundario en el cambiador de calor.

f) El vapor de agua que sale de la turbina se licua en el condensador, enfriándose mediante el agua de refrigeración. El vapor producido puede verse sobre las inmensas torres de refrigeración de las centrales nucleares.

19. El Sol emite aproximadamente $3{,}6 \cdot 10^{26}$ J de energía cada segundo. Averigua cuánto tiempo tardará la masa del Sol en reducirse a la mitad, suponiendo que la radiación permanezca constante.

Datos: masa del Sol = $2 \cdot 10^{30}$ kg.

La energía producida por el Sol se debe a procesos de fusión nuclear. La masa equivalente a $3{,}6 \cdot 10^{26}$ J.

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{26}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1})^2} = 4 \cdot 10^9\ \text{kg}$$

es decir, el Sol pierde $4 \cdot 10^9$ kg de masa cada segundo. Como su masa es de $2 \cdot 10^{30}$ kg, para que se reduzca a la mitad ha de transcurrir el siguiente tiempo:

$$t = \frac{1 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{4 \cdot 10^{9}\ \text{kg}\,\text{s}^{-1}} = 2{,}5 \cdot 10^{20}\ \text{s} \approx 7{,}9 \cdot 10^{12}\ \text{años}$$

Antes de que transcurra ese tiempo, el Sol se convertirá en una «gigante roja» y después en una «enana blanca».

20. Algunos átomos de $^{14}_{7}N$ atmosférico chocan con un neutrón y se transforman en $^{14}_{6}C$ que, por emisión beta, se convierten de nuevo en nitrógeno. Escribe las correspondientes reacciones nucleares.

$$^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H; \qquad {}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$$

21. Una muestra de madera encontrada en un yacimiento arqueológico presenta una actividad radiactiva que es cinco veces menor que la correspondiente a una muestra de madera nueva de igual masa. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del carbono-14 es de 5 730 años, ¿cuál es la antigüedad de la muestra encontrada?

Constante de desintegración: $\lambda = \frac{L\,2}{T_{1/2}} = \frac{L\,2}{5\,730\ \text{años}} =$

$= 1{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{años}^{-1}$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}\ ;\ \frac{A_0}{5} = A_0 \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{años} \cdot t}\ ;\ t = 1{,}33 \cdot 10^{4}\ \text{años}$$

22. Indica los nombres y las características de los seis leptones. ¿Por qué se dice que están apareados?

Electrón (e^-), muón (μ^-), tauón (τ^-), neutrino electrónico (ν_e), neutrino muónico (ν_μ) y neutrino tauónico (ν_τ).

Cada pareja de leptones está formada por un leptón cargado negativamente y su correspondiente neutrino.

23. Describe la estructura atómica y nuclear del a partir de su composición en quarks y electrones.

El núcleo atómico consta de 2 protones y 2 neutrones. Cada protón está formado dos quarks *u* y un quark *d*. Cada neutrón está formado por un quark *u* y dos quarks *d*.

El átomo tiene dos electrones situados en el orbitas 1*s*.

24. Expresa la masa del quark *d* en kilogramos.

Masa del quark $d = 6\ \text{MeV/c}^2$.

$$m = \frac{6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^{8}\ \text{m}\,\text{s}^{-1})^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$$

25. Explica la carga eléctrica del protón en función de los quarks que lo constituyen.

Protón (u, u, d): $\quad 2\left(+\frac{2}{3}\,e\right) + \left(-\frac{1}{3}\,e\right) = +e$

26. Explica las características de la materia y la antimateria. ¿En qué se convierten la materia y la antimateria cuando se aniquilan entre sí?

Véase el Apartado 13.8 del libro de texto.

27. ¿Cuál es el concepto de cuerda? ¿Qué características tiene?

Las cuerdas son pequeñísimos bucles unidimensionales que vibran. El tamaño de una cuerda es unas 10^{20} veces menor que el núcleo de un átomo, son indivisibles y los componentes más fundamentales de la naturaleza.

Las características de cada partícula están determinadas por el modo de vibración de la cuerda.

28. ¿Cómo se relaciona la vibración de las cuerdas con la fuerza gravitatoria?

Cuanto mayor sea la amplitud y la frecuencia de vibración de la cuerda, mayor es la energía y, por tanto, mayor será la masa, de acuerdo con la relación relativista entre masa y energía. Pero la masa determina las propiedades gravitatorias. Por tanto, existe una relación directa entre el modelo de vibración de la cuerda y la fuerza gravitatoria.

La teoría de las cuerdas une la Relatividad general de Einstein con la Mecánica cuántica y explica la gravedad. Cuando la cuerda se mueve en el espacio-tiempo, ambos se curvan, se deforman, de acuerdo con la relatividad general.

29. ¿Qué función realizan las partículas portadoras de fuerzas? ¿Cuáles son esas partículas?

Transmiten las interacciones entre las partículas de materia. La fuerza electromagnética se transmite mediante fotones, la fuerza nuclear débil mediante los bosones masivos W y Z, la interacción nuclear fuerte mediante gluones y la fuerza gravitatoria se supone que se transmite mediante gravitones.

30. Trabajando en equipo, con la bibliografía adecuada, incluido Internet, presentad una cronología del Universo en función de la temperatura y de las partículas que lo formaban en cada periodo, discutiendo la asimetría entre materia y antimateria.

Actividad para realizar en equipo, comparando los resultados obtenidos y poniéndolos en común.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Qué relación existe entre las partículas elementales y el campo de Higgs?

La masa de cada partícula surge de su intervención con el campo de Higgs.

2. Además del bosón de Higgs, ¿qué otros bosones conoces?

Partículas W y Z, fotones y gluones.

3. ¿Por qué resultó tan difícil descubrir el bosón de Higgs?

Por su elevada masa, solo puede detectarse mediante choques de partículas de muy alta energía.

4. ¿Cuáles son las características más importantes del bosón de Higgs?

Es muy inestable, spín cero, sin carga eléctrica y de masa muy grande, unos 125 GeV.

Problemas propuestos

Núcleo atómico

1. Indica el número de protones y neutrones que componen los siguientes núcleos:

$^{12}_{6}C$, $^{56}_{26}Fe$, $^{107}_{47}Ag$, $^{206}_{82}Pb$

C: 6p y 6n; Fe: 26p y 30n; Ag: 47p y 60n; Pb: 82p y 124 n.

2. ¿Qué te sugiere la enorme diferencia existente entre la densidad nuclear y la densidad de la materia ordinaria?

La diferencia de densidad indica que la materia ordinaria está practicamente «vacía», pues la densidad de las partículas es mundo mayor que la de la materia visible.

3. La masa del núcleo de litio-7 es 7,0182 u. Calcula el volumen aproximado del núcleo y su densidad.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3})^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}728 \cdot 10^{-45} \cdot 7 = 5{,}07 \cdot 10^{-44}\ \mathrm{m}^3$$

Masa: $m = 7{,}0182\ \mathrm{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 1{,}16 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$

Densidad: $d = \dfrac{m}{V} = \dfrac{1{,}16 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}}{5{,}07 \cdot 10^{-44}\ \mathrm{m}^3} = 2{,}3 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg/m}^3$

4. Calcula el defecto de masa, la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para el núcleo de helio-3.

Datos: masa del protón = 1,00729 u; masa del neutrón = = 1,00867 u; masa del helio-3 = 3,01603 u.

El núcleo está formado por 2 protones y 1 neutrón:

Masa de 2 protones:	2 · 1,00729 u =	2,01458 u
Masa de 1 neutrón:	1,00867 u =	1,00867 u
Masa total:		3,02325 u
Masa del núcleo:		3,01603 u
Defecto de masa:		0,00722 u

Energía de enlace:

$E = 0{,}00722\ \mathrm{u} \cdot 931\ \mathrm{MeV/u} = 6{,}72\ \mathrm{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{6{,}72\ \mathrm{MeV}}{3} = 2{,}24\ \mathrm{MeV/nucleón}$$

5. Calcula el defecto de masa, la energía total de enlace y la energía de enlace por nucleón del isótopo de masa atómica 15,0001089 u.

Datos: m_p = 1,007276 u; m_n = 1,008665 u; 1u = 1,66 · · 10^{-27} kg.

Masa total: 7 · 1,007276 u + 8 · 1,008665 u = 15,120252 u

Δm = 15,120252 u - 15,0001089 u = 0,120143 u

Energía de enlace: E = 0,120143 *u* · 931 MeV/u = 112 MeV

Energía de enlace por nucleón: 112 MeV / 15 nucleones = = 7,5 MeV / nucleón

6. Determina la energía de enlace por nucleón del $^{56}_{26}F$ y del $^{39}_{19}K$ si las masas de sus núcleos son 55,934939 u y 38,964001 u, respectivamente. Indica cuál de ellos es más estable.

Datos: m_p = 1,007276 u; m_n = 1,008665 u.

Para el $^{56}_{26}Fe$:

Masa de 26 protones:	26 · 1,007276 u =	26,189176 u
Masa de 30 neutrones:	30 · 1,008665 u =	30,259950 u
Masa total:		56,449126 u
Masa real del núcleo:		55,934939 u
Defecto de masa:		0,514187 u
Energía de enlace por nucleón:		8,5 MeV/nucleón

Para el $^{39}_{19}K$:

Masa de 19 protones:	19 · 1,007276 u =	19,138244 u
Masa de 20 neutrones:	20 · 1,008665 u =	20,173300 u
Masa total:		39,311544 u
Masa real del núcleo:		38,964001 u
Defecto de masa:		0,347543 u
Energía de enlace por nucleón:		8,3 MeV/nucleón

Como la energía de enlace por nucleón es mayor en el hierro que en el potasio, el núcleo de hierro es más estable.

7. Razona por qué el tritio ($^{3}_{1}H$) es más estable que el $^{3}_{2}He$.

Datos: masa del helio-3 = 3,016029 u; masa del tritio = = 3,016049 u; masa del protón = 1,6726 · 10^{-27} kg; masa del neutrón = 1,6749 · 10^{-27} kg.

Será más estable el que tenga mayor energía de enlace por nucleón.

Las masas del protón y del neutrón en unidades de masa atómica son:

$$m_p = \frac{1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}} = 1{,}0073\ \mathrm{u}$$

$$m_n = \frac{1{,}6749 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}} = 1{,}0087\ \mathrm{u}$$

$\Delta m\ (^{3}_{1}H) = 1{,}0073\ \mathrm{u} + 2 \cdot 1{,}0087\ \mathrm{u} - 3{,}0160\ \mathrm{u} =$

$= 0{,}0087\ \mathrm{u} = 8{,}10\ \mathrm{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{8{,}10\ \mathrm{MeV}}{3} = 2{,}70\ \mathrm{MeV/nucleón}$$

$\Delta m\ (^{3}_{1}He) = 2 \cdot 1{,}0073 + 1{,}0087\ \mathrm{u} - 3{,}0160 =$

$= 0{,}0073\ \mathrm{u} = 6{,}80\ \mathrm{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{6{,}80\ \mathrm{MeV}}{3} = 2{,}27\ \mathrm{MeV/nucleón}$$

El tritio es más estable al tener mayor energía de enlace por nucleón.

Radiactividad

8. Las tres radiaciones α, β y γ, ¿pueden ser emitidas por un mismo núcleo?

No. Un determinado núcleo se desintegra emitiendo partículas alfa o beta. La emisión gamma acompaña generalmente a las otras emisiones.

9. ¿Qué cambios experimenta un núcleo atómico cuando emite una partícula alfa? ¿Y si emite radiación gamma?

Si emite una partícula alfa, su número atómico disminuye en dos unidades y su número másico en cuatro.

Si emite radiación gamma, el núcleo pasa de un estado excitado a un estado de menor energía, pero su número atómico y su número másico no varían.

10. El $^{222}_{86}$Rn se desintegra emitiendo una partícula alfa. ¿Qué número atómico y qué número másico tiene el núcleo resultante?

$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po} + {}^{4}_{2}\text{He}$

11. Determina el número atómico y el número másico del núcleo que resultará del uranio-238 después de emitir tres partículas alfa y cuatro beta.

Número atómico: $92 - (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) = 90$

Número másico: $238 - (3 \cdot 4) = 226$

12. ¿Cómo se puede explicar que un núcleo emita partículas beta si en él solo existen neutrones y protones?

Cuando la relación neutrones/protones en un núcleo es demasiado grande, el núcleo es inestable y se estabiliza convirtiendo un neutrón en un protón, según la reacción:

$^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{p} + {}^{0}_{-1}\text{e} + \overline{\nu}_e$

13. Indica en curios las siguientes actividades radiactivas expresadas en desintegraciones por segundo: 200, $2{,}0 \cdot 10^6$, $5{,}0 \cdot 10^{12}$.

$$200 \text{ Bq} = \frac{200 \text{ Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq/Ci}} = 5{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ Ci}$$

$$2 \cdot 10^6 \text{ Bq} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq/Ci}} = 5{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ Ci}$$

$$5 \cdot 10^{12} \text{ Bq} = \frac{5 \cdot 10^{12} \text{ Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq/Ci}} = 1{,}4 \cdot 10^{2} \text{ Ci}$$

14. Una sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación $N = N_0 e^{-040\,t}$ en unidades del SI. Calcula su periodo de semidesintegración.

De acuerdo con la ecuación fundamental de la radiactividad, se cumple:

$$N = N_0 e^{-0{,}4t}; \qquad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-0{,}4 T_{1/2}}$$

Aplicando logaritmos neperianos se obtiene

$$-\text{L}\,2 = -0{,}4\, T_{1/2}; \quad T_{1/2} = 1{,}7 \text{ s}$$

15. La semivida del polonio-210 es 138 días. Si disponemos inicialmente de 1,00 mg de polonio, ¿al cabo de cuánto tiempo quedarán 0,250 mg?

Habrán transcurrido dos semividas, es decir, dos periodos de semidesintegración:

$t = 2 \cdot 138$ días $= 276$ días

16. Se tiene una muestra de 20 g de polonio-210, cuyo periodo de semidesintegración es de 138 días. ¿Qué cantidad quedará cuando hayan transcurrido 30 días?

La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{138 \text{ días}} = 5{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}$$

La masa no desintegrada se obtiene a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = 20 \cdot e^{-5{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 30} = 20 \cdot e^{-0{,}15} = 1{,}72 \text{ g}$$

17. El $^{212}_{83}$Bi tiene un periodo de semidesintegración de 60,5 minutos. ¿Cuántos átomos se desintegran por segundo en 50 g de bismuto-212?

Número de átomos de Bi:

$$\frac{50 \text{ g}}{212 \text{ g mol}^{-1}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} = 1{,}42 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

Actividad:

$$A = \lambda N = \frac{0{,}693\, N}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693 \cdot 1{,}42 \cdot 10^{23} \text{ átomos}}{3\,630 \text{ s}} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{19} \text{ átomos/s}$$

18. El radón-222 se desintegra con un periodo de 3,9 días. Si inicialmente se dispone de 20 μg, ¿cuánto quedará al cabo de 7,6 días?

$$\lambda = \frac{\text{L}\,2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}9 \text{ días}} = 0{,}178 \text{ días}^{-1}$$

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

$$m = 20 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot e^{-0{,}178 \cdot 7{,}6} = 5{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 5{,}2 \ \mu\text{g}$$

19. Tenemos $6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos del isótopo radiactivo cromo-51, con un periodo de semidesintegración de 27 días. ¿Cuántos átomos quedarán al cabo de seis meses?

Llamando T al periodo de semidesintegración, la constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T} = \frac{0{,}693}{27 \text{ días}} = 2{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ días}^{-1}$$

El número de átomos que quedan sin desintegrar después de seis meses (180 días) es:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ átomos} \cdot e^{-0{,}0257 \cdot 180} =$$

$$= 5{,}9 \cdot 10^{21} \text{ átomos}$$

20. La constante de desintegración de una sustancia radiactiva es $2 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}. Si tenemos 200 g de ella, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se reduzca a 50 g? ¿Cuál es su periodo de semidesintegración y su semivida?

Al aplicar la ecuación fundamental de la radiactividad se obtiene:

$$m = m_0 e^{-\lambda t}; \qquad 50 \text{ g} = 200 \text{ g} \cdot e^{-2 \cdot 10^{-6} t}$$

$$\text{L}\left(\frac{50}{200}\right) = 2 \cdot 10^{-6}\, t; \qquad t = 6{,}9 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}} = 5 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$T_{1/2} = \tau \cdot \text{L}\,2 = 5 \cdot 10^5 \text{ s} \cdot 0{,}693 = 3{,}5 \cdot 10^5 \text{ s}$$

21. La semivida del radio-226 es de 1 600 años. Calcula la actividad radiactiva de una muestra de 2 g de radio-226.

La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{\text{L}\,2}{T_{1/2}} = \frac{\text{L}\,2}{1\,600 \text{ años}} = 1{,}4 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

N.º de núcleos de radio:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{2\ \text{g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{226\ \text{g mol}^{-1}} = 5{,}3 \cdot 10^{21}\ \text{núcleos}$$

Actividad:

$$A = \lambda N = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{s}^{-1} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{21}\ \text{núcleos} = 7{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}$$

$$A = \frac{7{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq/Ci}} = 2\ \text{Ci}$$

Reacciones nucleares. Fisión y fusión nuclear

22. Al bombardear berilio-9 con partículas alfa se obtiene carbono-12 y otra partícula. Escribe la reacción nuclear correspondiente.

$^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{Ce} + {}^{1}_{0}\text{n}$

23. Escribe y completa las siguientes reacciones nucleares:

a) $^{58}_{28}\text{Ni} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow \ldots + {}^{1}_{0}\text{n}$

b) $^{58}_{27}\text{Co} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co} + \ldots$

c) $^{39}_{19}\text{K} + \alpha \rightarrow \ldots + \text{p}$

d) $^{10}_{5}\text{B} + \ldots \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{8}_{4}\text{Be}$

a) $^{58}_{28}\text{Ni} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{58}_{29}\text{Cu} + {}^{1}_{0}\text{n}$ *b)* $^{59}_{27}\text{Co} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co} + \gamma$

c) $^{39}_{19}\text{K} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{42}_{20}\text{Ca} + {}^{1}_{1}\text{H}$ *d)* $^{10}_{5}\text{B} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{8}_{4}\text{Be}$

24. Calcula la energía que se libera en la reacción nuclear:

$^{7}_{3}\text{Li} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}\text{He}$

Datos: masa del litio-7 = 7,0182 u; m_p = 1,0073 u; masa del helio-4 = 4,0038 u.

Masa de los productos iniciales: 7,0182 u + 1,0073 u = 8,0255 u

Masa de los productos finales: 2 · 4,0038 u = 8,0076 u

Defecto de masa: 8,0255 u − 8,0076 u = 0,0179 u

Energía liberada: 0,0179 u · 931 MeV/u = 16,7 MeV

25. Durante el proceso de fisión de un núcleo de $^{235}_{92}\text{U}$ por un neutrón se liberan 198 MeV. Calcula la energía liberada al fisionarse 1 kg de uranio.

N.º de núcleos de uranio:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{10^{3}\ \text{g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{235\ \text{g mol}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{24}\ \text{núcleos}$$

Energía:

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{24}\ \text{núcleos} \cdot 198\ \text{MeV/núcleo} = 5{,}07 \cdot 10^{26}\ \text{MeV}$$

$$E = 5{,}07 \cdot 10^{26}\ \text{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J/MeV} =$$

$$= 8{,}1 \cdot 10^{13}\ \text{J} = 8{,}1 \cdot 10^{10}\ \text{kJ}$$

26. ¿Qué cantidad de energía se libera en la reacción de fusión $2\ {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He}$?

Datos: masa del hidrógeno-2 = 2,0141 u;
masa del helio-4 = 4,0026 u.

a) El defecto de masa de la reacción es:

$$\Delta m = 2 \cdot 2{,}0141\ \text{u} - 4{,}0026\ \text{u} = 0{,}0256\ \text{u}$$

Energía liberada:

$$E = 0{,}0256\ \text{u} \cdot 931\ \text{MeV/u} = 23{,}8\ \text{MeV}$$

b) Para unir dos núcleos hay que vencer las fuerzas eléctricas de repulsión que existen entre las cargas positivas de los protones. Para conseguirlo, los núcleos deben chocar entre sí a velocidades suficientemente altas como para vencer la repulsión, lo que requiere temperaturas de varios cientos de millones de grados.

27. ¿Qué misión cumple el moderador en un reactor nuclear?

Frena los neutrones rápidos procedentes de la fisión nuclear.

28. ¿Qué es un reactor reproductor? ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta?

Es un reactor diseñado para producir más plutonio-239 que el uranio-235 que consume. Permiten producir material fisionable, pero esta producción es difícil de controlar y puede utilizarse en la fabricación de armas nucleares.

29. ¿Qué ventajas presenta la obtención de energía por fusión nuclear frente a la obtenida mediante procesos de fisión nuclear?

La materia prima (deuterio y tritio) es abundante y barata. Los reactores de fusión presentarán menos problemas con los residuos radiactivos que los de fisión y serán más seguros.

30. En un reactor nuclear se detecta una pérdida de masa de 54,0 g. Calcula cuántos kW h de energía se habrán producido.

La energía producida según la ecuación de Einstein es la siguiente:

$$E = \Delta m c^2 = 5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1})^2 = 4{,}9 \cdot 10^{15}\ \text{J}$$

$$E = \frac{4{,}9 \cdot 10^{15}\ \text{J}}{3{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{J/kW h}} = 1{,}35 \cdot 10^{9}\ \text{kW h}$$

Partículas y fuerzas fundamentales

31. La carga del electrón se ha considerado durante mucho tiempo como la unidad natural de carga eléctrica. ¿Te parece lógico mantener este criterio?

Se pensaba que la carga del electrón era la más pequeña que podía existir. Tras el descubrimiento de los quarks, no parece lógico mantener este criterio.

32. Compara cualitativamente las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza en función de las energías involucradas.

La interacción nuclear fuerte es la más intensa, pero de muy corto alcance, no se aprecia fuera del núcleo. Afecta a los quarks y mantiene unidos los protones y los neutrones que componen el núcleo de los átomos.

La interacción electromagnética es la segunda en intensidad. Actúa sobre partículas cargadas eléctricamente y puede ser atractiva o repulsiva. Es la responsable de que los átomos, las moléculas y la materia en general sean estables.

La interacción nuclear débil es la responsable de la desintegración beta de los núcleos atómicos y las transformaciones entre leptones. Tiene un radio de acción muy corto, sólo en el interior del núcleo, y es más débil que la interacción electromagnética.

La interacción gravitatoria es la más débil de todas, es atractiva entre todas las masas y es la responsable de la estructura general del Universo.

33. ¿Qué relación existe entre el bosón de Higgs y la materia?

La masa surge de la interacción de las partículas elementales con el campo de Higgs, cuya partícula asociada es el bosón de Higgs. Cuanto mayor es la interacción de una partícula elemental con el campo de Higgs, mayor es la masa de la partícula.

34. *a)* ¿Qué función realizan las partículas portadoras de fuerzas? ¿Cuáles son estas partículas?

***b)* ¿Sobre qué partículas materiales actúan los gluones?**

***c)* Según la Teoría de las Supercuerdas, ¿qué relación existe entre el modelo de vibración de la cuerda y la fuerza gravitatoria?**

***d)* ¿Qué dice el Principio antrópico?**

a) Las partículas portadoras de fuerza transmiten las interacciones entre las partículas de materia. Son: fotones, partículas W y Z, gluones y gravitones.

b) Los gluones transmiten la interacción nuclear fuerte que mantiene unidos a los protones y neutrones en el interior del núcleo atómico.

c) Cuanto mayor sea la amplitud y la frecuencia de vibración de la cuerda, mayor es la energía y, por tanto, mayor será la masa, de acuerdo con la relación relativista entre masa y energía, y es la masa la que determina las propiedades gravitatorias.

d) El Universo debe resultar adecuado para que exista vida inteligente.

Aplicaciones de los isótopos radiactivos

35. Comenta la siguiente frase: «Debido a la desintegración del carbono-14, cuando un ser vivo muere se pone en marcha un reloj».

Cuando un ser vivo muere su concentración de carbono-14 va disminuyendo con el tiempo.

Este hecho permite determinar el tiempo transcurrido desde su muerte.

36. Se ha medido la actividad de una muestra de madera prehistórica, observándose que se desintegran 90 átomos/hora, cuando en una muestra actual de la misma naturaleza la tasa de desintegración es de 700 átomos/hora. Calcula la antigüedad de la madera. El periodo de semidesintegración del carbono-14 es de 5 730 años.

De acuerdo con la ecuación fundamental de la radiactividad y el concepto de actividad, se cumple:

$$\frac{A_0}{A} = \frac{N_0\lambda}{N\lambda} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$$

$$\lambda t = \mathrm{L}\,\frac{A_0}{A}; \qquad t = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{L}\,\frac{A_0}{A}$$

La constante de desintegración se obtiene a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{L\,2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5\,730 \text{ años}} = 1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

El tiempo transcurrido se obtiene a partir de la ecuación anterior:

$$t = \frac{1}{1{,}21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}}\,\mathrm{L}\left(\frac{700}{90}\right) = 1{,}69 \cdot 10^{4} \text{ años}$$

37. Los restos de un animal encontrados en un yacimiento arqueológico tienen una actividad radiactiva de 2,6 desintegraciones por minuto y gramo de carbono. Calcula el tiempo transcurrido, aproximadamente, desde la muerte del animal.

Datos: la actividad del carbono-14 en los seres vivos es de 15 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono. $T_{1/2}$ 5 730 años.

La ecuación fundamental de la radiactividad en función de la actividad es:

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}; \qquad \frac{A}{A_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Si se tiene en cuenta la relación existente entre la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración, al aplicar logaritmos neperianos, resulta lo siguiente:

$$\mathrm{L}\,\frac{A}{A_0} = -\lambda t; \qquad \mathrm{L}\,\frac{A}{A_0} = -\frac{0{,}693\,t}{T_{1/2}}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{2{,}6}{15} = -\frac{0{,}693\,t}{5\,730 \text{ años}}; \qquad t \approx 14\,500 \text{ años}$$

Aplica lo aprendido

38. Debido a la desintegración beta del rubidio-87, los minerales de rubidio contienen estroncio. Se analizó un mineral y se comprobó que contenía el 0,85 % de rubidio y el 0,0089 % de estroncio. Suponiendo que todo el estroncio procede de la desintegración del rubidio y que el periodo de semidesintegración de este es 5,7 · 10^{10} años, calcula la edad del mineral. (Solo el 27,8 % del rubidio natural es rubidio-87.)

$${}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \;\rightarrow\; {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}$$

Si consideramos 100 g de mineral, existirán 0,85 g de rubidio, de los que solo el 27,8 % es rubidio-87.

Masa de rubidio: 87, 0,85 · 0,278 g = 0,2363 g.

Como se han formado 0,0089 g de estroncio-87, se han desintegrado 0,0089 g de rubidio-87, luego inicialmente la muestra contenía 0,2363 g + 0,0089 g = 0,2454 g de rubidio-87.

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}; \qquad \mathrm{L}\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{0{,}693\,t}{T_{1/2}}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{0{,}2363}{0{,}2454} = -\frac{0{,}693\,t}{5{,}7 \cdot 10^{10} \text{ años}}; \qquad t \approx 3 \cdot 10^{9} \text{ años}$$

39. La energía desprendida en la fisión de un núcleo de uranio-235 es aproximadamente de 200 MeV. ¿Cuántos kilogramos de carbón habría que quemar para obtener la misma cantidad de energía que la desprendida por fisión de 1 kg de uranio-235? El calor de combustión del carbón es de unas 7 000 kcal/kg.

Número de núcleos existentes en 1 000 g de uranio-235:

$$\frac{1\,000 \text{ g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{235 \text{ g mol}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos}$$

Energía desprendida en la fisión:

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos} \cdot 200 \text{ MeV/núcleo} = 5{,}12 \cdot 10^{26} \text{ MeV} =$$

$$= 5{,}12 \cdot 10^{32} \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 8{,}19 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Energía desprendida en la combustión del carbón:

$$7\,000 \text{ kcal/kg} \cdot 4{,}18 \text{ kJ/kcal} = 2{,}92 \cdot 10^{4} \text{ kJ/kg}$$

$$\frac{1 \text{ kg}}{2{,}92 \cdot 10^{7} \text{ J}} = \frac{x}{8{,}19 \cdot 10^{13} \text{ J}}; \qquad x = 2{,}8 \cdot 10^{6} \text{ kg}$$

40. Cuando un núcleo de $^{226}_{88}$Ra emite una partícula alfa se convierte en un núcleo de radón (Rn).

***a)* Escribe la ecuación del proceso nuclear correspondiente.**

***b)* Suponiendo que toda la energía generada en el proceso se transfiere a la partícula alfa, calcula su energía cinética y su velocidad.**

Datos: m_{Ra} = 226,025406 u; m_{Rn} = 222,017574 u; m_a = 4,002603 u.

a) $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$

b) $\Delta m = m_{Ra} - (m_{Rn} + m_{\alpha}) = 226{,}025406 \text{ u} -$

$- (222{,}017574 \text{ u} + 4{,}002603 \text{ u}) = 0{,}005229 \text{ u}$

$E_c = \Delta m c^2 =$

$= 0{,}005229 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} \cdot (3 \cdot 108 \text{ m s}^{-1})^2 =$

$= 7{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{4{,}002603 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}}} =$$

$= 1{,}5 \cdot 10^{7} \text{ m s}^{-1}$

41. Una central nuclear, de 800 MW de potencia, utiliza como combustible uranio enriquecido hasta el 3 % del isótopo fisionable. ¿Cuántas fisiones por segundo deben producirse? ¿Cuántas toneladas de combustible consumirá en un año? Se supone que en la fisión de un núcleo de uranio 235 se liberan 200 MeV.

Energía liberada en cada fisión:

$$2 \cdot 10^{8} \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 3{,}2 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

N.º de fisiones por segundo:

$$\frac{8 \cdot 10^{8} \text{ J s}^{-1}}{3{,}2 \cdot 10^{-11} \text{ J/fisión}} = 2{,}5 \cdot 10^{19} \text{ fisiones/s}$$

Como la riqueza del uranio-235 es solo del 3 %, el número de núcleos de uranio necesarios por segundo es:

$$\frac{100}{3} = \frac{x}{2{,}5 \cdot 10^{19}}; \qquad x = 8{,}33 \cdot 10^{20} \text{ núcleos/s}$$

Como la masa atómica del uranio es aproximadamente 238u, la masa del uranio consumida en 1 s es:

$8{,}33 \cdot 10^{20} \text{ núcleos/s} \cdot 238 \text{ u/núcleo} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} =$

$= 3{,}29 \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$

El consumo total en un año es:

$m = 3{,}29 \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{-1} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600) \text{s} = 10\,400 \text{ kg}$

42. Un electrón y un positrón se aniquilan mutuamente y se produce un rayo gamma. ¿Cuál es la frecuencia y la longitud de onda de la radiación obtenida?

Datos: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s.

$e^- + e^+ = \gamma$

La energía del electrón y el positrón ($2 m_e c^2$) será igual a la energía del fotón (hf):

$2 m_e c^2 = hf$

$$f = \frac{2 m_e c^2}{h} = \frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^{8} \text{ m s}^{-1})^2}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} = 2{,}5 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ m s}^{-1}}{2{,}5 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}} = 1{,}21 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Actividades PAU propuestas en los bloques

Bloque II. Interacción gravitatoria

1. La nave espacial lunar *Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

***a)* La velocidad lineal de la nave y el periodo del movimiento.**

***b)* La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.**

Datos: constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg²; masa de la Luna $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; radio medio lunar, $R_L = 1\,740$ km.

a) Obtenemos la velocidad de la nave mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G M_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(1\,740 + 100) \cdot 10^3\ \mathrm{m}}} =$$

$= 1\,633{,}4$ m/s

b) Obtenemos la velocidad de escape a la atracción de la Luna desde la altura de 100 km mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(1\,740 + 100) \cdot 10^3\ \mathrm{m}}} =$$

$= 2\,310$ m/s

2. Una sonda espacial se encuentra estacionada en una órbita circular terrestre a una altura sobre la superficie terrestre de $2{,}26\,R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra.

***a)* Calcula la velocidad de la sonda en la órbita de estacionamiento.**

***b)* Comprueba que la velocidad que la sonda necesita, a esa altura, para escapar de la atracción de la Tierra es, aproximadamente, 6,2 km s⁻¹.**

Datos: gravedad en la superficie de la Tierra, $g = 9{,}81$ m s⁻²; radio medio terrestre, $R_T = 6\,370$ km.

a) Obtenemos la velocidad de la sonda en la órbita mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{G M_T}{(2{,}26 + 1)\, R_T}} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{3{,}26}} = 4\,378\ \mathrm{m/s}$$

b) La velocidad de escape a esa altura es:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T + 2{,}26\, R_T}} = \sqrt{2g}\,\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{3{,}26}} = 6\,192\ \mathrm{m/s}$$

3. Responde:

***a)* Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa *m* que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?**

***b)* Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?**

Datos: la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna; la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres; el radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

a) Las fuerzas de atracción de la Tierra y la Luna sobre un cuerpo en la superficie terrestre son, respectivamente:

$$F_T = G\,\frac{M_T m}{R_T^2}; \qquad F_L = G\,\frac{M_L m}{d^2}$$

Como la masa terrestre es 81 veces la de la Luna y la distancia entre centros es de $60\,R_T$, resulta que la fuerza de la Luna sobre la masa *m* en la superficie es:

$$F_L = G\,\frac{M_T m}{81 \cdot 59^2\, R_T^2} = \frac{F_T}{81 \cdot 59^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}\, F_T$$

Es decir, la fuerza de atracción de la Luna sobre el cuerpo es del orden de la millonésima parte de la fuerza terrestre. Aún así, no la debemos considerar despreciable, pues su efecto es visible por ejemplo, en las mareas.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la Tierra es $g_T = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2}$ y en la Luna $g_L = G\,\dfrac{M_L}{R_L^2} = G\,\dfrac{M_T}{81 \cdot 0{,}27^2\, R_T^2} = 0{,}17\, g_T$.

Si el peso en la Tierra es de 100 kp, significa que:

$P_T = m\,g_T = 100$ kp

así que en la Luna:

$P_L = m\,g_L = 0{,}17\, m\,g_T = 0{,}17 \cdot 100$ kp $= 17$ kp

4. Un astronauta con 100 kg de masa (incluyendo el traje) está en la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica, con 2,4 km de diámetro y densidad media 2,2 g cm⁻³. Determina con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide. ¿Cómo se denomina rigurosamente tal velocidad? El astronauta carga ahora con una mochila de masa 40 kg; ¿le será más fácil salir del planeta? ¿Por qué?

Datos: G = 6,67 · 10⁻¹¹ Nm²kg⁻².

La velocidad de escape del astronauta desde la superficie del asteroide es $v = \sqrt{\dfrac{2 G M_a}{R_a}}$. Como disponemos de la densidad del asteroide y de la forma geométrica del mismo, podemos afirmar que $M_a = d_a V_a = d_a \cdot \dfrac{4}{3}\pi R_a^3$.

La velocidad es entonces:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_a}{R_a}} = \sqrt{\frac{2 G d_a \cdot \frac{4}{3}\pi R_a^3}{R_a}} = \sqrt{\frac{8}{3}\, G d_a \pi R_a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot \pi \cdot (2\,400\ \mathrm{m})^2} =$$

$= 2{,}66$ m/s

Si el astronauta carga la mochila, la velocidad de escape seguirá siendo la misma, pues no depende de la masa del objeto que escapa.

5. Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son, respectivamente, 149,6 · 10⁶ km y 228,0 · 10⁶ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días,

a) ¿Cuál será el periodo de revolución de Marte?

b) Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6 370 km y 3 390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?

Datos: gravedad en la superficie terrestre, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

a) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler a estos dos planetas:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3}$$

donde T son los periodos de rotación de Marte y Tierra y r es la distancia al centro de giro, en este caso el Sol. El periodo de revolución de Marte es, entonces:

$$T_M = \sqrt{\frac{T_T^2\, r_M^3}{r_T^3}} = \sqrt{\frac{365^2 \cdot (228 \cdot 10^6)^3}{(149 \cdot 10^6)^3}} = 691 \text{ días}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superfice marciana es, respecto al de la Tierra:

$$g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^2} = G\,\frac{9{,}6\,M_T}{1{,}88^2\,R_T^2} = 2{,}72\,g_T$$

Luego el peso de una persona de 70 kg en Marte es:

$$P_M = m\,g_M = 2{,}72\,m\,g_T = 2{,}72 \cdot 70\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 1865\ \mathrm{N}$$

6. Un satélite gira alrededor de la Tierra en una órbita circular. Tras perder cierta energía, continúa girando en otra órbita circular cuyo radio es la mitad que el original. ¿Cuál es su nueva energía cinética (relativa a la energía cinética inicial)?

La energía de un cuerpo que se mantiene en una órbita cerrada o energía de enlace es $E_m = -\dfrac{G M_T m}{2a}$, donde a es el radio de la órbita. Si el satélite cambia a una órbita de radio $a/2$, la nueva energía de enlace será:

$$E_m = -\frac{G M_T m}{2\,a/2} = -\frac{G M_T m}{a}$$

es decir, el doble que en la órbita anterior.

7. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

El trabajo que realiza la fuerza de gravedad al desplazar Venus en su órbita corresponde a la integral de la fuerza de atracción entre las dos masas, $F = G\,\dfrac{M_{\mathrm{Sol}} M_{\mathrm{Venus}}}{r_{S-V}^2}$, por el diferencial d$r$. En una trayectoria cerrada el trabajo realizado será nulo, dado que el campo gravitatorio es conservativo. Si solo tenemos en cuenta media órbita e integramos resulta:

$$W = \int_{2\pi r}^{\pi r} F\,\mathrm{d}r = -G M m \int_{2\pi r}^{\pi r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = G M m \left(\frac{1}{r}\right)_{2\pi r}^{\pi r} = G\,\frac{M m}{2\pi r}$$

Si integrásemos para la otra media órbita el resultado sería $W = -G\,\dfrac{M m}{2\pi r}$, de modo que en la órbita cerrada el trabajo sería nulo.

Bloque III. Interacción electromagnética

1. Dos pequeñas esferas iguales, de 5 N de peso cada una, cuelgan de un mismo punto fijo mediante hilos idénticos, de 10 cm de longitud y de masa despreciable. Si se suministra a cada una de estas esferas una carga eléctrica positiva de igual cuantía, se separan de manera que los hilos forman entre sí un ángulo de 60° en la posición de equilibrio.

Calcula:

a) El valor de la fuerza electrostática ejercida entre las cargas de las esferas en la posición de equilibrio.

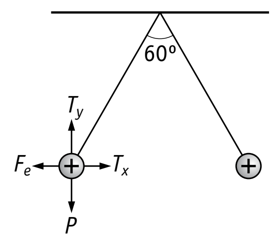
b) El valor de la carga de las esferas.

Datos: constante de la ley de Coulomb, $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$

b) Las esferas están sometidas a las fuerzas gravitatoria y eléctrica. En el equilibrio la suma de las fuerzas es nula. Las cargas tienen el mismo signo, pues se repelen.

$T_x = F_e$

$T_y = P$



Según la figura observamos que:

$T \text{ sen } 30° = qE$

$T \cos 30° = mg$

de donde $\quad q = \dfrac{mg}{E} \text{ tg } 30°$

Por otra parte, el campo eléctrico es $E = K\,\dfrac{q}{d^2}$, donde d es la distancia entre cargas en la posición de equilibrio. Para obtener d, basta con conocer el ángulo entre los hilos y la longitud del mismo, $d = 0{,}1$ m.

Con esas dos ecuaciones, obtenemos:

$$q^2 = \frac{P}{K}\,d^2 \text{ tg } 30° = \frac{5\ \mathrm{N}}{9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}} \cdot (0{,}1\ \mathrm{m})^2 \cdot \text{tg } 30° \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q = 1{,}79 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

a) La fuerza de repulsión entre cargas es $F = qE$, o:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{d^2} = K\frac{q_2}{d^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2} \cdot \frac{(1{,}79 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})^2}{(0{,}1\ \mathrm{m})^2} = 2{,}88\ \mathrm{N}$$

2. ¿Puede existir diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de una región en la cual la intensidad de campo eléctrico es nula? ¿Qué relación general existe entre el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico? Razona las respuestas.

Consultar Apartados 6.5 y 6.6 del libro del alumno.

3. Tenemos una carga de $4 \cdot 10^{-3}$ C en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y$ m. Determina:

a) **El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.**

b) **El campo eléctrico en dicho punto.**

c) **La energía potencial eléctrica de la carga en el origen.**

Datos: $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$.

a) El punto medio entre las cargas es (3/2, 2), es decir, la distancia entre las cargas y el centro es de 2,5 m.

El potencial entre cargas en el punto medio será la suma de los potenciales que crean ambas cargas, es decir, cero, pues se anulan uno a otro.

$$V_1 = K\frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{4\ .\ 10^{-3}\ \mathrm{C}}{2{,}5\ \mathrm{m}} = 14{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = K\frac{q_2}{r} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{-4\ .\ 10^{-3}\ \mathrm{C}}{2{,}5\ \mathrm{m}} = -14{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{V}$$

b) Por la misma razón, el campo eléctrico en el punto entre las dos cargas es nulo.

c) La energía potencial eléctrica de la carga en el origen es $E_p = K\frac{q_1 q_2}{r}$, donde r es la distancia entre cargas, es decir, 5 m.

$$E_p = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C}}{5\ \mathrm{m}} = -2{,}88 \cdot 10^3\ \mathrm{J}$$

la energía potencial es negativa, lo que significa que el campo ejerce una acción de atracción entre cargas.

4. Un electrón es lanzado con una velocidad de $2 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme de $5\,000\ \mathrm{V\,m^{-1}}$. Determina:

a) **La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.**

b) **La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.**

Datos: valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La distancia que recorre el electrón es, según las ecuaciones de cinemática:

$$s = \frac{1}{2}\frac{v_f^2 - v_0^2}{a}$$

La fuerza a la que está sometido el electrón por la acción del campo es $F = \frac{E}{q}$. Como conocemos el campo, la carga y la masa del electrón, podemos hallar su aceleración:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Eq}{m_e} = \frac{-5\,000\ \mathrm{V/m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = -8{,}8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m/s^2}$$

es decir, el electrón se frena.

Así, la distancia recorrida por el electrón es:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s})^2 - (2 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s})^2}{-8{,}8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m/s^2}} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

b) La variación de la energía potencial es igual a $q\ \Delta V$. Como el campo es $E = V/d$, resulta que:

$$\Delta E_p = q\ \Delta V = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 5\,000\ \mathrm{V/m} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} =$$

$$= -1{,}68 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

5. Un protón penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme. Explica qué tipo de trayectoria describirá el protón si su velocidad es:

a) **Paralela al campo.**

b) **Perpendicular al campo.**

c) **¿Qué sucede si el protón se abandona en reposo en el campo magnético?**

d) **¿En qué cambiarían las respuestas anteriores si en lugar de un protón fuera un electrón?**

Consultar el Apartado 6.6. de la Unidad 6 del libro del alumno.

6. Un conductor rectilíneo indefinido transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje *Oz*. Un protón, que se mueve a $2 \cdot 10^5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, se encuentra a 50 cm del conductor. Calcula el módulo de la fuerza ejercida sobre el protón si su velocidad:

a) **Es perpendicular al conductor y está dirigida hacia él.**

b) **Es paralela al conductor.**

c) **Es perpendicular a las direcciones definidas en los apartados *a)* y *b)*.**

d) **¿En qué casos, de los tres anteriores, el protón ve modificada su energía cinética?**

Datos: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La fuerza a la que está sometido el protón es la del campo magnético que crea la corriente.

$$F = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$$

La fuerza total dependerá de la orientación del campo respecto a la velocidad del protón.

a) si la velocidad del protón es perpendicular al campo la fuerza magnética será $F = qvB = qv\,\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$.

Sustituyendo:

$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^5\ \text{m/s} \cdot \dfrac{\mu_0 \cdot 10\ \text{A}}{2\pi \cdot 0{,}5\ \text{m}} =$

$= 1{,}28 \cdot 10^{-19}\ \text{N}$

b) Si la velocidad del protón es paralela al campo la fuerza magnética es nula.

c) A efectos de módulo es el mismo caso que el apartado *a)*, solo que la dirección de la fuerza es diferente.

Bloque IV. Ondas y óptica geométrica

1. El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de $2 \cdot 10^{-3}$ s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos, cuya diferencia de fase vale 2 rad, están separados una distancia de 10 cm, calcula:

a) La longitud de onda.

b) La velocidad de propagación.

Si consideramos los dos estados de vibración en un instante dado resulta que:

$y\,(x_1, t) = A \cos\,(2\pi f t - k x_1) \qquad y\,(x_2, t) = A \cos\,(2\pi f t - k x_2)$

a) Conocemos la diferencia de fase y la distancia entre los dos estados de vibración, de modo que:

$\delta = (2\pi f t - k x_1) - (2\pi f t - k x_2) = k\,(x_2 - x_1)$

de donde:

$k = \dfrac{\delta}{(x_2 - x_1)} = \dfrac{2\ \text{rad}}{10\ \text{cm}} = 0{,}2\ \text{cm}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 10\pi\ \text{cm}$

b) La velocidad de propagación de la onda es

$v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{10\pi\ \text{cm}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 5\pi \,.\, 10^4\ \text{cm/s}$

2. Una onda en una cuerda de 0,01 kg m^{-1} de densidad lineal viene dada por la ecuación:

$\boldsymbol{y\,(x, t) = 0{,}2\ \text{sen}\,(\pi x + 100\pi t)\ \text{m}}$

Calcula:

a) La frecuencia de la onda.

b) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

c) La potencia que transporta la onda.

a) La frecuencia de la onda es, según la ecuación $\omega = 100\pi$.

b) La velocidad de propagación es:

$v = \dfrac{dy}{dt} = 20\pi \cos\,(\pi x + 100\pi t)$

c) La potencia que transporta la onda viene dada por la energía de la onda en la unidad $P = \dfrac{E}{t}$. Como la energía de la onda es $E = \dfrac{1}{2} kA^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2$, y la densidad lineal de masa es $d_L = \dfrac{m}{\lambda}$ podemos expresar la potencia que transporta la onda en un periodo como:

$P = \dfrac{E}{T} = \dfrac{2m\pi^2 f^2 A^2}{T} = \dfrac{2d_L \pi^2 f^2 A^2}{T}\lambda = 2d_L \pi^2 f^2 A^2 v$

Sustituyendo:

$P = 2 \cdot 0{,}01\ \text{kg/m} \cdot \pi^2 \cdot (50\ \text{Hz})^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 20\pi\ \text{m/s} = 1\,240\ \text{W}$

3. Una onda armónica que se propaga por un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de propagación de 350 m s^{-1}.

a) ¿Qué distancia mínima hay, en un cierto instante, entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60°?

b) ¿Cuál es la diferencia de fase de oscilación, en un cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^3 s?

a) La velocidad de propagación y la frecuencia nos informan acerca de la ecuación de onda,

$f = 500\ \text{Hz}; \qquad v = 350\ \text{m/s}$

$\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{350\ \text{m/s}}{350\ \text{s}^{-1}} = 0{,}7\ \text{m}$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{0{,}7} = \dfrac{20\pi}{7}\ \text{m}^{-1}$

Así que la ecuación de onda queda así:

$y\,(x, t) = A \cos\left(1\,000\pi t - \dfrac{20\pi}{7}x\right)$

Considerando los dos estados de vibración en un instante dado:

$y\,(x_1, t) = A \cos\left(1\,000\pi t - \dfrac{20\pi}{7}x_1\right)$

$y\,(x_2, t) = A \cos\left(1\,000\pi t - \dfrac{20\pi}{7}x_2\right)$

$\delta = \left(1\,000\pi t - \dfrac{20\pi}{7}x_1\right) - \left(1\,000\pi t - \dfrac{20\pi}{7}x_2\right) =$

$= \dfrac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow (x_2 - x_1) = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{7}{20\pi} = 0{,}12\ \text{m}$

b) Al igual que en el apartado anterior, consideramos un estado de oscilación en dos instantes de tiempo distintos:

$y\,(x, t_1) = A \cos\left(1\,000\pi t_1 - \dfrac{20\pi}{7}x\right)$

$y\,(x, t_2) = A \cos\left(1\,000\pi t_2 - \dfrac{20\pi}{7}x\right)$

La diferencia de fase es:

$\delta = \left(1\,000\pi t_1 - \dfrac{20\pi}{7}x\right) - \left(1\,000\pi t_2 - \dfrac{20\pi}{7}x\right) =$

$1\,000\pi\,(t_1 - t_2) = 1\,000\pi \cdot 10^3 \Rightarrow \delta = 10^6 \cdot \pi$

4. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura *R*. Realiza el diagrama de rayos para construir la imagen de un objeto situado delante del espejo a una distancia igual a:

a) El doble del radio de curvatura.

b) Un cuarto del radio de curvatura.

c) Indica en cada caso la naturaleza de la imagen formada.

a) Ver Figura 10.18, página 254 del libro de texto.

La imagen es real, de menor tamaño que el objeto e invertida.

b) Ver Figura 10.22, página 255 del libro de texto.

La imagen es virtual, de mayor tamaño que el objeto y derecha.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) En un sistema óptico centrado formado por espejos, ¿qué características presentan las imágenes reales y las virtuales?

b) Pon un ejemplo de cada una de ellas utilizando espejos esféricos. Explica el tipo de espejo esférico utilizado en cada caso.

a) En cualquier espejo, plano o esférico, las imágenes virtuales son siempre derechas y las imágenes reales son invertidas.

b) En un espejo plano, la imagen siempre es virtual, derecha y de igual tamaño que el objeto. Se forma al otro lado del espejo.

Espejo cóncavo:

- Si el objeto está situado más allá del centro de curvatura, la imagen es real, menor e invertida.
- Si el objeto se sitúa entre el centro de curvatura y el foco, la imagen es de mayor tamaño que el objeto, real e invertida.
- Si el objeto está entre el foco y el espejo, la imagen es virtual, mayor y derecha.

Espejo convexo:

- La imagen siempre es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

6. Un rayo de luz que viaja por un medio con velocidad de $2,5 \cdot 10^8$ m/s incide con un ángulo de 30º, con respecto a la normal, sobre otro medio donde su velocidad es de $2 \cdot 10^8$ m/s. Calcula el ángulo de refracción.

De acuerdo con las leyes de Snell de la refracción, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante característica de los dos medios:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

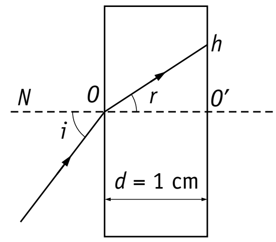
Al introducir en la ecuación los datos del enunciado, se obtiene el ángulo de refracción:

$$\frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } r} = \frac{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}};$$

$$\frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } r} = 1,25; \qquad \text{sen } r = \frac{\text{sen } 30°}{1,25} = 0,4$$

$$r = \text{arc sen } 0,4 = 23,6°$$

La velocidad de la luz disminuye cuando pasa al segundo medio, es decir, pasa de un medio menos refringente a otro más refringente; en consecuencia, el rayo refractado se acerca a la normal: el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.



Para el rayo rojo:

$$\text{tg } r_R = \frac{h_R}{d}; \qquad h_R = d \text{ tg } r_R = 1 \text{ cm} \cdot \text{tg } 38,2° = 0,79 \text{ cm}$$

Para el rayo violeta:

$$\text{tg } r_V = \frac{h_V}{d}; \qquad h_V = d \text{ tg } r_V = 1 \text{ cm} \cdot \text{tg } 32,8° = 0,64 \text{ cm}$$

Como el índice de refracción del color rojo es menor que el del color violeta, el rayo rojo se acerca menos a la normal, es decir, se desvía menos que el rayo violeta.

7. Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente:

***a)* Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.**

***b)* Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.**

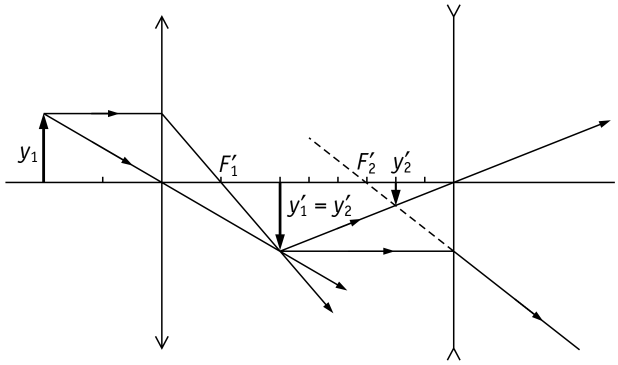
***c)* Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.**

***d)* ¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por el sistema óptico?**

De acuerdo con el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$f'_1 = 10$ cm; $f'_2 = -15$ cm; $y_1 = 5$ cm; $s_1 = -20$ cm

a) La imagen gráfica se obtiene trazando los rayos de trayectorias conocidas (Epígrafe 10.6). La imagen formada por la primera lente actúa como objeto de la segunda lente.



La imagen final es virtual, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) La posición de la imagen producida por la primera lente se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}; \qquad \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{10\text{ cm}}; \qquad s'_1 = 20\text{ cm}$$

Como la distancia imagen es positiva, esta imagen es real.

c) La imagen producida por la primera lente actúa como objeto en la segunda lente. Como la imagen se forma 20 cm detrás de la primera lente, y la distancia que separa ambas lentes es de 50 cm, la distancia objeto para la segunda lente es: $s_2 = -30$ cm.

La imagen final se obtiene aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2}; \qquad \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{-15\text{ cm}}; \qquad s'_2 = -10\text{ cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen es virtual, se forma a la izquierda de la segunda lente y a 10 cm de ella.

d) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral. Para la primera lente se cumple:

$$M_L = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1}; \qquad y'_1 = \frac{y_1 s'_1}{s_1} = \frac{5\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}}{-20\text{ cm}} = -5\text{ cm}$$

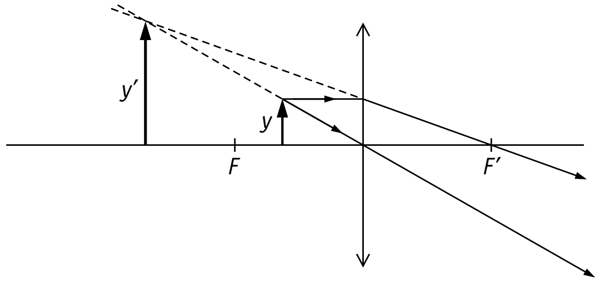
Para la segunda lente: $y_2 = y'_1$

$$M_L = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2}; \qquad y'_2 = \frac{y_2 s'_2}{s_2} = \frac{-5\text{ cm} \cdot (-10\text{ cm})}{-20\text{ cm}} = -1{,}7\text{ cm}$$

El signo negativo indica que la imagen es invertida, además, como hemos visto es virtual, y tiene menor tamaño que el objeto.

8. Para una lente convergente, explica si hay alguna posición del objeto para la que la imagen sea virtual y derecha, y otra para la que la imagen sea real, invertida y del mismo tamaño que el objeto.

En las lentes convergentes sólo se obtienen imágenes virtuales cuando el objeto se sitúa dentro de la distancia focal, es decir, entre el foco y la lente



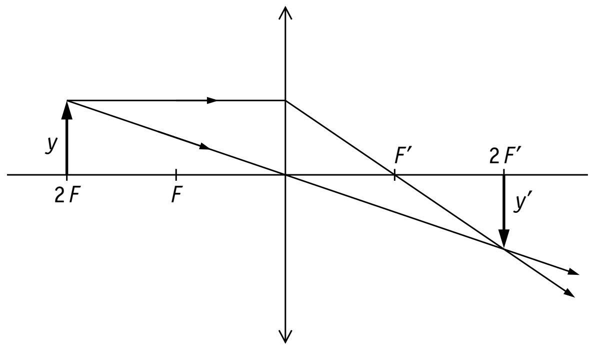
Si la imagen es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto, el aumento lateral es:

$$M_L = \frac{s'}{s} = -1; \qquad s' = -s$$

La ecuación fundamental de las lentes delgadas permite calcular la posición del objeto para que la imagen tenga esas características:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{-2}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad s = -2f'$$

Por tanto, el objeto debe situarse a una distancia de la lente igual dos veces la distancia focal.



9. Una lente convergente forma una imagen derecha y de tamaño doble de un objeto real. Si la imagen queda a 60 cm de la lente, ¿cuál es la distancia del objeto a la lente y la distancia focal de la lente?

Como la imagen es derecha, también es virtual y la distancia imagen negativa:

$s' = -60$ cm

Como la imagen es de tamaño doble que el objeto, el aumento lateral es igual a 2:

$$M_L = \frac{s'}{s} = 2; \qquad s = \frac{s'}{2} = \frac{-60\text{ cm}}{2} = -30\text{ cm}$$

El objeto está situado 30 cm delante de la lente.

La ecuación fundamental de las lentes delgadas nos permite calcular la distancia focal de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-60\text{ cm}} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{f'}; \qquad f' = 60\text{ cm}$$

De estos resultados deducimos que la imagen se forma en el foco imagen y el objeto está situado en el punto medio de la distancia focal.

10. La potencia de una lente es de 5 dioptrías.

a) Si a 10 cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.

b) Si dicha lente es de vidrio (n = 1,5) y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra? ¿De qué tipo de lente se trata?

Como la potencia de la lente es positiva, se trata de una lente convergente, cuya distancia focal imagen es:

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{5\ \text{m}^{-1}} = 0{,}2\ \text{m}$$

a) Según el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$s = -10$ cm; $y = 2$ mm

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\ \text{cm}} = \frac{1}{20\ \text{cm}}; \qquad s' = -20\ \text{cm}$$

La imagen se forma 20 cm delante de la lente, por tanto, es virtual.

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$y' = \frac{ys'}{s} = \frac{0{,}2\ \text{cm} \cdot (-20\ \text{cm})}{-10\ \text{cm}} = 0{,}4\ \text{cm} = 4\ \text{cm}$$

Como el aumento es positivo, la imagen es derecha.

b) Sabemos que la lente es convergente, pero veamos qué tipo de lente convergente es. El radio de curvatura de la otra cara de la lente lo obtenemos a partir de la ecuación de la distancia focal imagen:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

$$5\ \text{m}^{-1} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{0{,}1\ \text{m}} - \frac{1}{R_2}\right); \qquad R_2 = \infty$$

Como el radio de esta cara es infinito, la cara es plana y la lente es plano convexa.

Bloque V. Introducción a la física moderna

1. Una muestra de material radiactivo posee una actividad de 115 Bq inmediatamente después de ser extraída del reactor donde se formó. Su actividad 2 horas después resulta ser 85,2 Bq.

a) Calcule el periodo de semidesintegración de la muestra.

b) ¿Cuántos núcleos radiactivos existían inicialmente en la muestra?

Dato: 1 Bq = 1 desintegración/segundo.

a) Previamente calculamos la constante de desintegración λ:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}; \qquad \text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda t;$$

$$\lambda = \frac{\text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right)}{t} = -\frac{\text{L}\left(\frac{85{,}2\ \text{Bq}}{115\ \text{Bq}}\right)}{2\ \text{horas}} = 0{,}150\ \text{horas}^{-1}$$

Ya podemos calcular el periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\text{L}\ 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} = 4{,}62\ \text{horas}$$

b) El número de núcleos radiactivos que existían inicialmente se obtiene a partir del valor de la actividad inicial:

$$A_0 = \frac{115\ \text{desintegraciones}}{1\,s} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{hora}} =$$

$$= 4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}$$

$$A_0 = \lambda N_0$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} =$$

$$= 2{,}76 \cdot 10^6\ \text{desintegraciones}$$

Como cada núcleo produce una desintegración, en la muestra inicial existían $2{,}76 \cdot 10^6$ núcleos radiactivos.

2. El isótopo de fósforo $^{32}_{15}$P, cuya masa es 31,9739 u, se transforma por emisión beta en cierto isótopo estable de azufre (Z = 16), de masa 31,9721 u. El proceso, cuyo periodo de semidesintegración es 14,28 días, está acompañado por la liberación de cierta cantidad de energía en forma de radiación electromagnética. Con estos datos:

a) Escriba la reacción nuclear y calcule la energía y la frecuencia de la radiación emitida.

b) Calcule la fracción de átomos de fósforo desintegrados al cabo de 48 horas para una muestra formada inicialmente solo por átomos de fósforo $^{32}_{15}$P.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J;
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) La reacción nuclear es la siguiente:

$$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow\ ^{32}_{16}\text{S} +\ ^{0}_{-1}\text{X}$$

Para que se conserven el número atómico y el número másico en la reacción la partícula X debe ser un electrón. Un neutrón del núcleo se convierte en un protón, un electrón y una partícula, sin carga y sin masa en reposo, llamada antineutrino $\bar{\nu}_e$. Por tanto, la reacción completa es:

$$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow\ ^{32}_{16}\text{S} +\ ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$$

A partir de las masas atómicas, calculamos la variación de masa de la reacción:

$$\Delta m = m_s + m_e - m_p$$

La masa del electrón es:

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \frac{1\ \text{u}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 0{,}00055\ \text{u}$$

$\Delta m = 31{,}9721\ \text{u} + 0{,}00055\ \text{u} - 31{,}9739\ \text{u} = -1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{u}$

Esta pérdida de masa en la reacción se convierte en energía que se libera en el proceso:

$E = \Delta m c^2 =$
$= 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u} \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1})^2 =$
$= 1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$

La frecuencia de la radiación emitida es:

$$E = hf; \qquad f = \frac{E}{h} = \frac{1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 2{,}82 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

b) Calculamos la constante de desintegración λ a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\text{L } 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{(14{,}28 \cdot 24)\ \text{horas}} = 2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \text{horas}^{-1}$$

Ahora calculamos la fracción de átomos desintegrados a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\text{L}\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t = -2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \text{horas}^{-1} \cdot 48\ \text{horas} = -0{,}097$$

$$\frac{N}{N_0} = 0{,}91; \qquad N = 0{,}91\ N_0$$

Como quedan sin desintegrar el 91% de los núcleos, se han desintegrado el 9% de los átomos de fósforo.

3. Determina el número másico y el número atómico del isótopo que resultará del $^{238}_{92}U$ después de emitir tres partículas alfa y dos beta.

El número másico es $A = 238$. El nuevo número másico será:

$A' = 238 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 226.$

El número atómico es $Z = 92$. El nuevo número atómico será:

$Z' = 92 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 88.$

Así, el resultado de la emisión de 3α y 2β es $^{226}_{88}Ra$.

4. En una experiencia del efecto fotoeléctrico, la función de trabajo de un material es *W_e*, la constante de Planck *h,* la frecuencia incidente *f* y la velocidad de la luz *c*.

La longitud de onda umbral para la emisión de fotoelectrones es:

a) $\dfrac{W_e}{hf}$; ***b)*** $\dfrac{W_e}{h}$; ***c)*** $\dfrac{c}{W_e}$; ***d)*** $\dfrac{hc}{W_e}$

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

La opción correcta es la *d)*: $W_e = \dfrac{h_c}{\lambda_o}$; $\lambda_o = \dfrac{h_c}{W_e}$

5. Cuando se bombardea un blanco de $^{7}_{3}Li$ con protones rápidos se produce 7 4Be $^{7}_{4}Be$ más una partícula ligera.

a) **Escribe la ecuación de esta reacción nuclear e identifica razonadamente la partícula ligera.**

b) **Calcula la mínima energía cinética que deben tener los protones para que pueda producirse esta reacción.**

Expresa el resultado en MeV y en J.

Datos: masas atómicas: $m_{Li} = 7{,}016004$ u; $m_{Be} = 7{,}016929$ u; $m_n = 1{,}008665$ u; $m_p = 1{,}007276$ u.

a) $^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{7}_{3}Be + ^{1}_{0}n$ (La partícula ligera es un neutrón)

b) $\Delta m = m_{Be} + m_p - (m_{Li} + m_H) = 7{,}016929\ \text{u} + 1{,}008665\ \text{u} -$
$- (7{,}016004\ \text{u} + 1{,}007276\ \text{u}) = 0{,}002314\ \text{u}$

$E = 0{,}002314\ \text{u} \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = 2{,}155491\ \text{MeV}$

$E = 2{,}155491 \cdot 10^{6}\ \text{eV} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}45 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$